

УДК 621.396, 681.5

**С. В. ГЕРАСИМОВ,***доктор технических наук, старший научный сотрудник,***Е. С. РОЩУПКИН,** кандидат технических наук,  
*старший научный сотрудник**(Харьковский национальный университет Воздушных Сил им. Ивана Кожедуба, г. Харьков)*

## Теоретические основы оценки ошибок значений сигналов с гармонически меняющимися параметрами

*Отримано співвідношення для статистичних ха-рактеристик оцінок значень сигналів, параметри яких змінюються за гармонічним законом, і наведені результати їх аналізу. Ґрунтуючись на отриманих співвідношеннях, синтезована схема пристрою контролю трактів і описаний принцип його роботи. Наведено рекомендації щодо практичного застосування отриманих результатів.*

*Ключові слова: корисний сигнал, заважаючий вплив, гармонійно мінливий параметр, статистичні характеристики, контроль параметрів, зво-ротний зв'язок.*

*Получены соотношения для статистических ха-рактеристик оценок значений сигналов, параметры которых меняются по гармоническому закону, и приведены результаты их анализа. На основании полученных соотношений синтезирована схема устройства контроля трактов и описан принцип его работы. Приведены рекомендации по практическому применению полученных результатов.*

*Ключевые слова: полезный сигнал, мешающее воздействие, гармонически меняющийся параметр, статистические характеристики, контроль параметров, обратная связь.*

Широкое распространение в настоящее время при автоматическом управлении и контроле, измерении параметров, передаче данных и т. д. получило применение сигналов, параметры которых меняются как функция гармонического закона вида  $\cos^k(n\varphi + \delta\pi/2)$ , где  $k$  – показатель степени,  $n$  – кратность,  $\varphi$  – параметр,  $\delta$  – символ Кронекера.

Например, при контроле технического состояния сложных систем на их вход подается известный тестовый сигнал, как правило, гармонический, который формируется специальным генератором [1, 2]. При воздействии тестового сигнала на выходе контролируемой системы формируется выходной сигнал (сигнал-отзыв) в виде гармонической функции. В зависимости от вида контроля и технического состояния системы сигнал-отзыв отличается от тестового сигнала параметрами (как правило, фазовым сдвигом и амплитудой). Тестовый и выходной сигналы контролируемой системы подаются в анализатор, где в соответствии с диагностическими параметрами определяются диагностические нормативы, характеризующие ее техническое состояние [2].

В этом случае параметр  $\varphi$  функции гармонического закона можно представить как начальную фазу сигнала, статистические характеристики оценки которой достаточно подробно описаны, например, в работах [3–7].

Однако в большинстве случаев имеет значение не оценка самого параметра  $\varphi$ , который часто известен (например, передаваемое сообщение либо контрольный сигнал), а значение функции от него. Это поясняется тем, что, например, многие объекты управления отрабатывают непосредственно сигнал функции параметра, меняющегося по гармоническому закону (сельсины, энкодеры, фазовые детекторы), а не сам параметр. Также в измерительной технике широкое распространение получили “косвенные измерения”, когда решения принимаются, в том числе, и по значениям функций гармонически меняющихся параметров. Таким образом, возникает необходимость в получении выражений, описывающих статистические характеристики оценок значений сигналов с гармонически меняющимися параметрами.

В работах [1–7] при рассмотрении вопросов оценки статистических характеристик гармонических сигналов в предположении большого отношения сигнал/шум авторы полагают, что в этом случае вполне достаточно после разложения функции, описывающей сигнал, в окрестности оценки в степенной ряд ограничиться первым членом разложения, что в большинстве случаев позволяет получить приемлемые для практики соотношения. Однако вместе с тем указывается об использовании, в случае необходимости, большего числа членов ряда, но их требуемое число не конкретизируется. В работе [8] указано, что сигналы на выходе систем управления в общем случае являются нелинейными, однако дальнейшие исследования также проведены в допущении небольших отклонений. Известно, что большой ряд сигналов (функций) может быть представлен путем преобразования Фурье набором соответствующих гармонических составляющих. В то же время, выражений, строго описывающих статистические характеристики оценок значений сигналов с

гармонически меняющимися параметрами, в известной авторам литературе не приведено.

**Целью** данной статьи является получение статистических характеристик оценок значений сигналов с гармонически меняющимися параметрами.

**1. Расчет статистических характеристик значений сигналов, параметры которых меняются по гармоническому закону.** Положим, что косвенно измеряемый параметр (задающее воздействие, передаваемый сигнал) имеет вид

$$\hat{\varphi} = \varphi^* + \Delta\varphi, \quad (1)$$

где  $\varphi^*$  – истинное значение параметра,  $\Delta\varphi$  – мешающее воздействие (нормальная ошибка, обусловленная шумами), со следующими характеристиками:

$$\begin{cases} f(\Delta\varphi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma_\varphi}} \exp\left\{-\frac{\Delta\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2}\right\}; \\ M[\Delta\varphi] = 0; \\ D[\Delta\varphi] = M[(\Delta\varphi - M[\Delta\varphi])^2] = \sigma_\varphi^2. \end{cases} \quad (2)$$

Несложно показать, что характеристики параметра  $\hat{\varphi} = \varphi^* + \Delta\varphi$  описываются следующими соотношениями:

$$\begin{cases} f(\hat{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma_\varphi}} \exp\left\{-\frac{(\hat{\varphi} - \varphi^*)^2}{2\sigma_\varphi^2}\right\}; \\ M[\hat{\varphi}] = \varphi^*; \\ D[\hat{\varphi}] = M[(\hat{\varphi} - M[\hat{\varphi}])^2] = \sigma_\varphi^2. \end{cases} \quad (3)$$

Необходимо получить плотности вероятности  $f[\Phi_i(\hat{\varphi}_n)]$  и статистические характеристики  $M[\Phi_i(\hat{\varphi}_n)]$ ,  $D[\Phi_i(\hat{\varphi}_n)]$  ( $i=1..4$ ) оценок  $\Phi_i(\hat{\varphi}_n)$  – значений гармонических функций от параметра  $\hat{\varphi}_n = n\hat{\varphi}$ , где  $n$  – некоторая постоянная:

$$\begin{cases} \Phi_1(\hat{\varphi}_n) = \sin(n\hat{\varphi}) \\ \Phi_2(\hat{\varphi}_n) = \cos(n\hat{\varphi}) \\ \Phi_3(\hat{\varphi}_n) = \sin^2(n\hat{\varphi}) \\ \Phi_4(\hat{\varphi}_n) = \cos^2(n\hat{\varphi}) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} f(\sin(\hat{\varphi}_n)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)n\sigma_\varphi} \sqrt{1 - \sin^2(n\hat{\varphi})}} \exp\left\{-\frac{(\arcsin(\sin(n\hat{\varphi})) - n\varphi^*)^2}{2n^2\sigma_\varphi^2}\right\}; \\ f(\cos(\hat{\varphi}_n)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)n\sigma_\varphi} \sqrt{1 - \cos^2(n\hat{\varphi})}} \exp\left\{-\frac{(\arccos(\cos(n\hat{\varphi})) - n\varphi^*)^2}{2n^2\sigma_\varphi^2}\right\}; \\ f(\sin^2(\hat{\varphi}_n)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)n\sigma_\varphi} \sqrt{[1 - \sin^2(n\hat{\varphi})] \sin^2(n\hat{\varphi})}} \exp\left\{-\frac{(\arcsin(\sqrt{\sin^2(n\hat{\varphi})}) - n\varphi^*)^2}{2n^2\sigma_\varphi^2}\right\}; \\ f(\cos^2(\hat{\varphi}_n)) = \frac{1}{n\sqrt{(2\pi)n\sigma_\varphi} \sqrt{[1 - \cos^2(n\hat{\varphi})] \cos^2(n\hat{\varphi})}} \exp\left\{-\frac{(\arccos(\sqrt{\cos^2(n\hat{\varphi})}) - n\varphi^*)^2}{2n^2\sigma_\varphi^2}\right\}. \end{cases} \quad (6)$$

Применив правило нахождения плотности вероятности функции независимой случайной величины [9–10]

$$f[\Phi_i(\hat{\varphi})] = f[\Phi_i(\hat{\varphi})^{-1}] \left| \frac{\partial[\Phi_i(\hat{\varphi})^{-1}]}{\partial\hat{\varphi}} \right|, \quad (5)$$

где  $\Phi_i(\hat{\varphi})^{-1}$  – функция, обратная  $\Phi_i(\hat{\varphi})$ , запишем выражения для плотностей вероятности гармонических функций от параметра  $\hat{\varphi}_n$  (формулы (4)).

При использовании (6) необходимо учитывать, что входящие в выражения круговые (обратные тригонометрические) функции многозначны, а их главные значения ограничены пределами

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\alpha_k) \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \arccos(\alpha_k) \leq \pi. \quad (7)$$

Определим числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсию) оценок значений гармонических функций от параметра  $\hat{\varphi}$  (4). Для их нахождения воспользуемся следующими соотношениями [9–11]:

$$\begin{cases} M[\Phi_i(\hat{\varphi}_n)] = \int \Phi_i(\hat{\varphi}_n) f(\hat{\varphi}) d\hat{\varphi} \\ D[\Phi_i(\hat{\varphi}_n)] = \int [\Phi_i(\hat{\varphi}_n)]^2 f(\hat{\varphi}) d\hat{\varphi} - (M[\Phi_i(\hat{\varphi}_n)])^2 \end{cases}, \quad (8)$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \end{cases}, \quad (9)$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[q(t+\lambda)]}{\exp\{pt^2\}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left\{-\frac{q^2}{4p}\right\} \sin(q\lambda); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[q(t+\lambda)]}{\exp\{pt^2\}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left\{-\frac{q^2}{4p}\right\} \cos(q\lambda); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(qt)}{\exp\{pt^2\}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{q^2}{p}\right\}\right); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2(qt)}{\exp\{pt^2\}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(1 + \exp\left\{-\frac{q^2}{p}\right\}\right). \end{cases} \quad (10)$$

Используя соотношения (8) – (10), рассчитаем математические ожидания оценок значений степеней гармонических функций от параметра  $\hat{\varphi}_n$ :

$$M[\sin(\hat{\varphi}_n)] = \int \sin[n(\varphi^* + \Delta\varphi)] \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma_\varphi}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\left\{-\frac{[(\varphi^* + \Delta\varphi) - \varphi^*]^2}{2\sigma_\varphi^2}\right\} d\hat{\varphi} = \\ & = \int (\sin(n\varphi^*) \cos(n\Delta\varphi) + \cos(n\varphi^*) \sin(n\Delta\varphi)) \times \\ & \quad \times \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma_\varphi}} \exp\left\{-\frac{(\Delta\varphi)^2}{2\sigma_\varphi^2}\right\} d\Delta\varphi = \\ & = \frac{\sin(n\varphi^*)}{\sqrt{(2\pi)\sigma_\varphi}} \int \cos(n\Delta\varphi) \exp\left\{-\frac{(\Delta\varphi)^2}{2\sigma_\varphi^2}\right\} d\Delta\varphi + \\ & \quad + \frac{\cos(n\varphi^*)}{\sqrt{(2\pi)\sigma_\varphi}} \int \sin(n\Delta\varphi) \exp\left\{-\frac{(\Delta\varphi)^2}{2\sigma_\varphi^2}\right\} d\Delta\varphi = \\ & = \frac{\sin(n\varphi^*)}{\sqrt{(2\pi)\sigma_\varphi}} \frac{\sqrt{(2\pi)\sigma_\varphi}}{1} \exp\left\{-\frac{2(n\sigma_\varphi)^2}{4}\right\} \cos(0) + \\ & \quad + \frac{\cos(n\varphi^*)}{\sqrt{(2\pi)\sigma_\varphi}} \frac{\sqrt{(2\pi)\sigma_\varphi}}{1} \exp\left\{-\frac{2(n\sigma_\varphi)^2}{4}\right\} \sin(0) = \\ & = \sin(n\varphi^*) \exp\left\{-\frac{(n\sigma_\varphi)^2}{2}\right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогічно маємо

$$M[\cos(\hat{\varphi}_n)] = \cos(n\varphi^*) \exp\left\{-\frac{(n\sigma_\varphi)^2}{2}\right\}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} M[\sin^2(\hat{\varphi}_n)] &= \\ &= \int (\sin(n\varphi^*) \cos(n\Delta\varphi) + \cos(n\varphi^*) \sin(n\Delta\varphi))^2 \times \\ & \quad \times \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma_\varphi}} \exp\left\{-\frac{(\Delta\varphi)^2}{2\sigma_\varphi^2}\right\} d\Delta\varphi = \\ & = \frac{1 - \cos(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{2}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} M[\cos^2(\hat{\varphi}_n)] &= \\ &= \int (\cos(n\varphi^*) \cos(n\Delta\varphi) - \sin(n\varphi^*) \sin(n\Delta\varphi))^2 \times \\ & \quad \times \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma_\varphi}} \exp\left\{-\frac{(\Delta\varphi)^2}{2\sigma_\varphi^2}\right\} d\Delta\varphi = \\ & = \frac{1 + \cos(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из соотношения

$$\begin{aligned} 1^2 &= (\sin^2(\hat{\varphi}_n) + \cos^2(\hat{\varphi}_n))^2 = \\ &= \sin^4(\hat{\varphi}_n) + 2\sin^2(\hat{\varphi}_n)\cos^2(\hat{\varphi}_n) + \cos^4(\hat{\varphi}_n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sin^4(\hat{\varphi}_n) + \frac{\sin^2(2\hat{\varphi}_n)}{2} + (1 - \sin^2(\hat{\varphi}_n))^2 = \\ &= (1 - \cos^2(\hat{\varphi}_n))^2 + \frac{\sin^2(2\hat{\varphi}_n)}{2} + \cos^4(\hat{\varphi}_n) \\ & \text{следует} \begin{cases} \sin^4(\hat{\varphi}_n) = \sin^2(\hat{\varphi}_n) - \frac{\sin^2(2\hat{\varphi}_n)}{4} \\ \cos^4(\hat{\varphi}_n) = \cos^2(\hat{\varphi}_n) - \frac{\sin^2(2\hat{\varphi}_n)}{4} \end{cases}. \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом (13) – (15) запишем выражения для математического ожидания оценок значений четвертой степени гармонических функций от параметра  $\hat{\varphi}_n$ :

$$\begin{aligned} M[\sin^4(\hat{\varphi}_n)] &= M[\sin^2(\hat{\varphi}_n)] - M\left[\frac{\sin^2(2\hat{\varphi}_n)}{4}\right] = \\ &= \frac{1 - \cos(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{2} - \\ & \quad - \frac{1 - \cos(4n\varphi^*) \exp\{-2(2n\sigma_\varphi)^2\}}{8}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} M[\cos^4(\hat{\varphi}_n)] &= M[\cos^2(\hat{\varphi}_n)] - M\left[\frac{\sin^2(2\hat{\varphi}_n)}{4}\right] = \\ &= \frac{1 + \cos(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{2} - \\ & \quad - \frac{1 - \cos(4n\varphi^*) \exp\{-2(2n\sigma_\varphi)^2\}}{8}. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражения (11) – (14), (16), (17) описывают математические ожидания (начальные моменты первого порядка) для оценок значений первой, второй и четвертой степеней значений гармонических функций  $\Phi_i(\hat{\varphi}_n)$  от параметра  $\hat{\varphi}$ . Начальные моменты второго порядка  $M[(\Phi_i(\hat{\varphi}_n))^2] = \int [\Phi_i(\hat{\varphi}_n)]^2 f(\hat{\varphi}) d\hat{\varphi}$  для оценок значений функций  $\Phi_1(\hat{\varphi}_n)$ ,  $\Phi_2(\hat{\varphi}_n)$  описываются выражениями (13), (14), а для оценок значений функций  $\Phi_3(\hat{\varphi}_n)$ ,  $\Phi_4(\hat{\varphi}_n)$  – выражениями (16), (17). Дисперсии оценок  $D[\Phi_i(\hat{\varphi}_n)]$  определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} D[\Phi_1(\hat{\varphi}_n)] &= \frac{1 - \cos(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{2} - \\ & \quad - \sin^2(n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} D[\Phi_2(\hat{\varphi}_n)] &= \frac{1 + \cos(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{2} - \\ & \quad - \cos^2(n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$D[\Phi_3(\hat{\varphi}_n)] = \frac{1 - \cos(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - \cos(4n\varphi^*) \exp\{-2(2n\sigma_\varphi)^2\}}{8} \\
 & - \left( \frac{1 - \cos(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{2} \right)^2 = \\
 & = \frac{1 - \cos^2(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{4} \\
 & - \frac{1 - \cos(4n\varphi^*) \exp\{-2(2n\sigma_\varphi)^2\}}{8}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D[\Phi_4(\hat{\varphi}_n)] &= \frac{1 + \cos(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{2} \\
 & - \frac{1 - \cos(4n\varphi^*) \exp\{-2(2n\sigma_\varphi)^2\}}{8} \\
 & - \left( \frac{1 + \cos(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{2} \right)^2 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{1 - \cos^2(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{4} \\
 & - \frac{1 - \cos(4n\varphi^*) \exp\{-2(2n\sigma_\varphi)^2\}}{8}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Для удобства полученные соотношения, описывающие статистические характеристики оценок значений гармонических функций от параметра  $\hat{\varphi}_n$  (4), сведены в табл. 1.

Выражения для систематических ошибок  $\Delta M[\Phi_i(\hat{\varphi}_n)] = \Phi_i(\varphi_n^*) - M[\Phi_i(\hat{\varphi}_n)]$  имеют вид

$$\begin{cases}
 \Delta M[\sin(\hat{\varphi}_n)] = \sin(\varphi_n^*) \left( 1 - \exp\left\{-\frac{(n\sigma_\varphi)^2}{2}\right\} \right); \\
 \Delta M[\cos(\hat{\varphi}_n)] = \cos(\varphi_n^*) \left( 1 - \exp\left\{-\frac{(n\sigma_\varphi)^2}{2}\right\} \right); \\
 \Delta M[\sin^2(\hat{\varphi}_n)] = -\frac{\cos(2\varphi_n^*)}{2} \left( 1 - \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\} \right); \\
 \Delta M[\cos^2(\hat{\varphi}_n)] = \frac{\cos(2\varphi_n^*)}{2} \left( 1 - \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\} \right)
 \end{cases} \quad (22)$$

Таблица 1. Статистические характеристики оценок значений гармонических функций от параметра  $\hat{\varphi}_n$

$\Phi_i(\hat{\varphi}_n)$	$M[\Phi_i(\hat{\varphi}_n)]$	$D[\Phi_i(\hat{\varphi}_n)]$
$\sin(n\hat{\varphi})$	$\sin(n\varphi^*) \exp\left\{-\frac{(n\sigma_\varphi)^2}{2}\right\}$	$M[\sin^2(n\hat{\varphi})] - (M[\sin(n\hat{\varphi})])^2 =$ $= \frac{1 - \cos(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{2} -$ $-\sin^2(n\varphi^*) \exp\left\{-\frac{(n\sigma_\varphi)^2}{2}\right\}$
$\cos(n\hat{\varphi})$	$\cos(n\varphi^*) \exp\left\{-\frac{(n\sigma_\varphi)^2}{2}\right\}$	$M[\cos^2(n\hat{\varphi})] - (M[\cos(n\hat{\varphi})])^2 =$ $= \frac{1 + \cos(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{2} -$ $-\cos^2(n\varphi^*) \exp\left\{-\frac{(n\sigma_\varphi)^2}{2}\right\}$
$\sin^2(n\hat{\varphi})$	$\frac{1 - \cos(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{2}$	$M[\sin^4(n\hat{\varphi})] - (M[\sin^2(n\hat{\varphi})])^2 =$ $= \frac{1 - \cos^2(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{4} -$ $-\frac{1 - \cos(4n\varphi^*) \exp\{-2(2n\sigma_\varphi)^2\}}{8}$
$\cos^2(n\hat{\varphi})$	$\frac{1 + \cos(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{2}$	$M[\cos^4(n\hat{\varphi})] - (M[\cos^2(n\hat{\varphi})])^2 =$ $= \frac{1 - \cos^2(2n\varphi^*) \exp\{-2(n\sigma_\varphi)^2\}}{4} -$ $-\frac{1 - \cos(4n\varphi^*) \exp\{-2(2n\sigma_\varphi)^2\}}{8}$

**2. Анализ полученных результатов и предложения по их практическому применению.** Анализ выражений, описывающих статистические характеристики значений функций  $\Phi_i(\hat{\varphi}_n)$  (табл. 1), показывает, что их математические ожидания являются смещенными относительно истинных значений функций. Систематическая ошибка (смещение)  $\Delta M[\Phi_i(\hat{\varphi}_n)]$  зависит как от дисперсии мешающего воздействия (нормальной ошибки, обусловленной шумами)  $\sigma_\varphi$ , так и от истинного значения гармонической функции  $\Phi_i(n \cdot \varphi^*)$  и кратности измеряемого параметра (задающего воздействия)  $n$ .

Зависимости систематических ошибок и дисперсий ошибок для функций  $\sin(n\hat{\varphi})$  и  $\sin^2(n\hat{\varphi})$  от

параметра  $\varphi^*$  для двух значений  $\sigma_\varphi$  при  $n=1$  показаны на рис. 1.

Статистические характеристики ошибок значений гармонических функций имеют выраженную нелинейную осциллирующую зависимость. Экстремумы математического ожидания и дисперсии ошибки значения соответствующей гармонической функции сдвинуты относительно друг друга на  $\pi/2$  (максимальному модульному значению систематической ошибки соответствует минимальная дисперсия, и наоборот).

Сумма квадратов систематических ошибок функций  $\Delta M^2[\sin(\hat{\varphi}_n)]$  и  $\Delta M^2[\cos(\hat{\varphi}_n)]$  определяется выражением

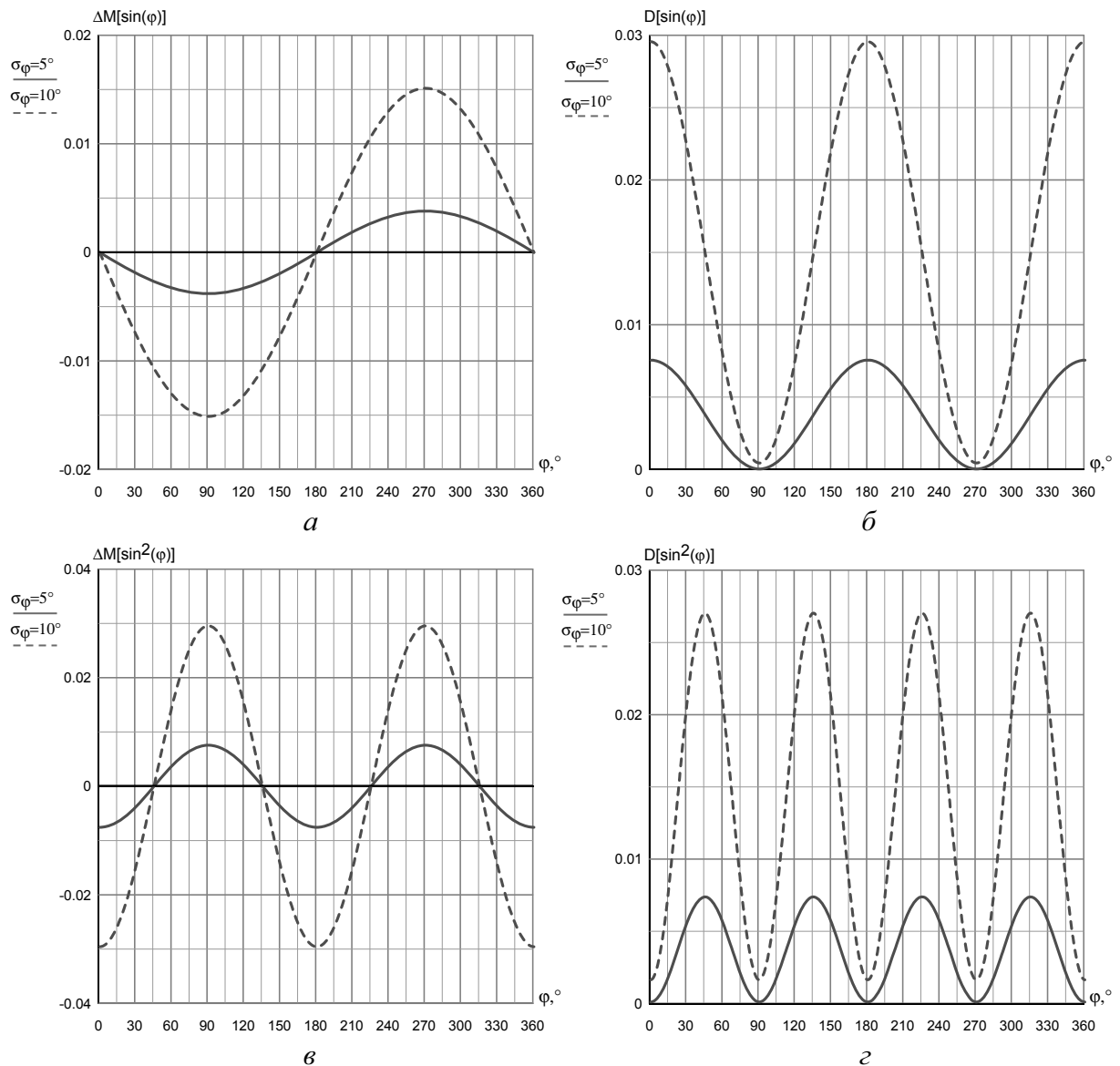


Рис. 1. Зависимости систематических ошибок и дисперсий ошибок от параметра  $\varphi^*$  ( $n=1$ ):

- а – систематическая ошибка  $\sin(n\hat{\varphi})$  ( $\sigma_\varphi = 5^\circ$  и  $\sigma_\varphi = 10^\circ$ );
- б – дисперсия ошибки  $\sin(n\hat{\varphi})$  ( $\sigma_\varphi = 5^\circ$  и  $\sigma_\varphi = 10^\circ$ );
- в – систематическая ошибка  $\sin^2(n\hat{\varphi})$  ( $\sigma_\varphi = 5^\circ$  и  $\sigma_\varphi = 10^\circ$ );
- г – дисперсия ошибки  $\sin^2(n\hat{\varphi})$  ( $\sigma_\varphi = 5^\circ$  и  $\sigma_\varphi = 10^\circ$ )

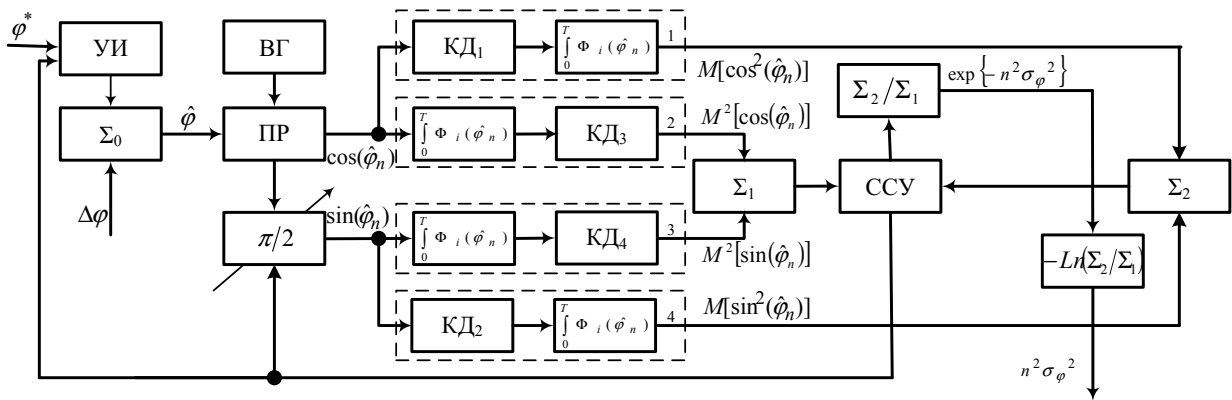


Рис. 2. Упрощенная схема устройства контроля трактов

$$\Delta M^2[\sin(\hat{\phi}_n)] + \Delta M^2[\cos(\hat{\phi}_n)] = \left(1 - \exp\left\{-\frac{(n \cdot \sigma_\phi)^2}{2}\right\}\right)^2, \quad (23)$$

а систематические ошибки значений второй степени гармонических функций  $\Delta M[\sin^2(\hat{\phi}_n)]$  и  $\Delta M[\cos^2(\hat{\phi}_n)]$  равны по абсолютному значению и противоположны по знаку, т. е.

$$\Delta M[\sin^2(\hat{\phi}_n)] + \Delta M[\cos^2(\hat{\phi}_n)] = 0. \quad (24)$$

Дисперсии ошибок значений второй степени гармонических функций  $D[\sin^2(\hat{\phi}_n)]$  и  $D[\cos^2(\hat{\phi}_n)]$ , в отличие от дисперсий ошибок значений первой степени гармонических функций  $D[\sin(\hat{\phi}_n)]$  и  $D[\cos(\hat{\phi}_n)]$ , равны между собой при любых  $\hat{\phi}_n$ .

Полученные результаты позволяют синтезировать схемы устройств контроля трактов (УКТ), упрощенный вариант одного из них изображен на рис. 2.

Упрощенная схема УКТ (рис. 2) включает следующие основные элементы:

УИ – управляемый инвертор;

$\Sigma_i$  – сумматор сигналов;

ВГ – высокостабильный генератор;

ПР – преобразователь сигналов;

$\pi/2$  – управляемый фазовращатель;

КД<sub>*i*</sub> – квадратичный детектор;

$\int_0^T \Phi_i(\hat{\phi}_n)$  – интегратор (накопитель) сигнала;

$\Sigma_2/\Sigma_1$  – делитель напряжения (сигналов);

$-Ln(\Sigma_2/\Sigma_1)$  – логарифмический усилитель;

ССУ – схема сравнения и управления.

Блоки 1–4, выделенные на рис. 2 пунктирной линией,

включают в себя квадратичные детекторы КД<sub>*i*</sub>, интеграторы  $\int_0^T \Phi_i(\hat{\phi}_n)$  и коммутирующие элементы (для про-

сты не показаны). Они отличаются друг от друга порядком коммутации детекторов и интеграторов, а также коммутацией с сумматорами сигналов  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ . Несложно показать, что при соответствующей коммутации блоки 1 и 2, 3 и 4 эквивалентны, а саму схему УКТ можно свести к одноканальной с разными режимами работы с сигналами  $\Phi_i(\hat{\phi}_n)$ . Делитель напряжения (сигналов)  $\Sigma_2/\Sigma_1$  и логарифмический усилитель  $-Ln(\Sigma_2/\Sigma_1)$  входят в состав схемы сравнения и управления, но для наглядности понимания описываемых процессов они вынесены отдельно.

Рассмотрим принцип работы упрощенной схемы устройства, изображенного на рис. 2.

Положим, что идентичность соответствующих элементов УКТ установлена заранее. При отсутствии полезного сигнала (косвенно измеряемого параметра, задающего воздействия) путем соответствующей коммутации в схеме сравнения и управления ССУ проверяется уровень шумов в каналах УКТ и достигается их выравнивание. Полезный сигнал  $\phi^*$ , смешавшись с шумом, поступает на вход преобразователя ПР, на второй вход которого поступает сигнал высокостабильного генератора ВГ. С выхода преобразователя ПР сигнал, являющийся гармонической функцией от параметра  $\hat{\phi}_n$ , разветвляясь, поступает на квадратурные каналы, каждый из которых разветвляется на каналы формирования математического ожидания квадрата и квадрата математического ожидания гармонической функции. Квадратурность каналов достигается внесением управляемым фазовращателем фазового сдвига  $\pi/2$ . Положим, что сигналы формируются так, как изображено на схеме на рис. 2. Тогда с выхода сумматоров  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  на схему сравнения и управления ССУ поступают сигналы, равные  $T \exp\left\{-\left(n\sigma_\phi\right)^2\right\}$  и  $T$  соответственно, где  $T$  – известное время накопления. С выхода делителя  $\Sigma_2/\Sigma_1$  сигнал, равный  $\exp\left\{-\left(n\sigma_\phi\right)^2\right\}$ , поступает на логарифмический усилитель  $-Ln(\Sigma_2/\Sigma_1)$ , с выхода которого снимается напряжение  $\left(n\sigma_\phi\right)^2$ . Значение напряжения на выходе сумматора  $\Sigma_2$ , отличное от  $T$ , свидетельствует о неквадратурности каналов, т. е. о внесении

фазовращателем фазового сдвига  $(\pi/2 + \xi)$ , где  $\xi$  – фазовая ошибка. В этом случае на вход управляемого инвертора поступает сигнал об изменении знака входящего полезного сигнала. Разность прямого и инвертированного сигналов  $\Delta^\pm$  с выходов сумматоров  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  в схеме сравнения и управления будет определяться выражением

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \Delta^\pm_{\Sigma_1} &= (M^2 [\cos(\hat{\varphi}_n)] + M^2 [\sin(\xi + \hat{\varphi}_n)]) - \\ &- (M^2 [\cos(-\hat{\varphi}_n)] + M^2 [\sin(\xi - \hat{\varphi}_n)]) = \\ &= T \frac{4 \cos(\varphi_n^*) \sin(\varphi_n^*) \cos(\xi) \sin(\xi)}{\exp\{(n\sigma_\varphi)^2\}}, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 : \Delta^\pm_{\Sigma_2} &= M [\cos^2(\hat{\varphi}_n) + \sin^2(\xi + \hat{\varphi}_n)] - \\ &- M [\cos^2(-\hat{\varphi}_n) + \sin^2(\xi - \hat{\varphi}_n)] = \\ &= T \frac{4 \cos(\varphi_n^*) \sin(\varphi_n^*) \cos(\xi) \sin(\xi)}{\exp\{2(n\sigma_\varphi)^2\}}, \quad (26) \end{aligned}$$

где значения функций  $\cos(n\varphi^*)$ ,  $\sin(\xi \pm n\varphi^*)$  могут быть предварительно оценены с точностью до множителя  $\exp\{-(n\sigma_\varphi)^2/2\}$  по значениям напряжений, снятых с выходов интеграторов блоков 2, 3 соответственно.

Логарифм отношения разностей прямого и инвертированного сигналов  $\Delta^\pm$  с выходов сумматоров  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  на выходе логарифмического усилителя определяется соотношением

$$-Ln \left( \frac{\Delta^\pm_{\Sigma_2}}{\Delta^\pm_{\Sigma_1}} \right) = (n\sigma_\varphi)^2, \quad (27)$$

и не зависит от фазовой ошибки  $\xi$  фазовращателя, что позволяет произвести оценку дисперсии мешающего воздействия.

Таким образом, используя разности прямого и инвертированного сигналов  $\Delta^\pm$  в качестве сигналов рассогласования, производится устранение фазовой ошибки фазовращателя, так как  $\Delta^\pm \rightarrow 0|_{\xi \rightarrow 0}$ . Предложенная схема позволяет контролировать квадратурность каналов устройства, производить измерение уровня шумов и оценку дисперсии ошибок измерения и может быть использована в существующих и перспективных системах управления и контроля.

#### Выводы:

1. В работе получены выражения для плотностей вероятностей оценок и числовых характеристик оценок значений гармонических функций и их ошибок.

2. На основании полученных соотношений синтезирована схема устройства контроля трактов, которое позволяет контролировать квадратурность каналов,

производить измерение уровня шумов и оценку дисперсии ошибок измерения.

3. Полученные в работе результаты целесообразно использовать в существующих и перспективных системах обработки данных, измерительных системах и системах управления.

#### СПИСОК ССЫЛОК

1. Чинков В. М., Герасимов С. В. Математична постановка проблеми синтезу вимірювальних сигналів для визначення технічного стану зразків озброєння при їх експлуатації за технічним станом // Системи озброєння і військова техніка. 2013. № 4 (36). С. 128–131.
2. Чинков В. М., Герасимов С. В. Дослідження та обґрунтування критеріїв оптимізації вимірювальних сигналів для контролю технічного стану систем автоматичного управління // Український метрологічний журнал. 2013. № 4. С. 43–47.
3. Маслов А. Ф., Рошупкин Е. С., Хмелевський С. И., Селевко В. Н. Потенциальная точность измерения времени запаздывания путем учета фазовой структуры принимаемых разнесенными апертурами сигналов // Збірник наук. праць / ХВУ. Х. : ХВУ, 2002. Вип. 3 (41). С. 83–85.
4. Радиотехнические системы: Основы построения и теория : справ. / Ширман Я. Д., Лосев Ю. И., Минервин Н. Н. [и др.] ; под ред. Ширмана Я. Д. М. : ЗАО “Маквис”, 1998. 828 с.
5. Дудник П. И., Ильчук А. Р., Татарский Б. Г. Многофункциональные радиолокационные системы : учеб. пособие для вузов / под ред. Б. Г. Татарского. М. : Дрофа, 2007. 283 с.
6. Пространственно-временная обработка сигналов / И. Я. Кремер, А. И. Кремер, В. М. Петров [и др.] ; под ред. И. Я. Кремера. М. : Радио и связь, 1984. 224 с.
7. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М. : Сов. радио, 1975. 704 с.
8. Герасимов С. В., Кукобко С. В., Рошупкин Е. С., Расстригин О. О. Синтез вимірювальних сигналів для визначення технічного стану систем автоматичного управління // Озброєння та військова техніка. № 4 (12), 2016. С. 32–36.
9. Вентцель Е. С. Теория вероятностей : учеб. для вузов. М. : Высш. шк., 2001. 575 с.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М. : Наука, 1984. 831 с.
11. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. : Физматгиз, 1987. 1100 с.

**Рецензент Г. С. Залевський**, д-р техн. наук, старший научный сотрудник (Харьковский национальный университет Воздушных Сил им. Ивана Кожедуба)