

УДК 517.93

Т. Е. АЛЕКСАНДРОВА, д-р техн. наук

## Построение области устойчивости цифровой системы наведения и стабилизации танковой пушки в плоскости варьируемых констант алгоритма стабилизации

*Розглядається спрощена методика вибору області можливих значень варіаційних параметрів цифрової системи наведення та стабілізації танкової пушки в якості якої використовується область сталої замкнутої системи.*

*Ключові слова: замкнута система стабілізації,*

*Рассматривается упрощенная методика выбора области возможных значений варьируемых параметров цифровой системы наведения и стабилизации танковой пушки, в качестве которой используется область устойчивости замкнутой системы.*

*Ключевые слова: замкнутая система стабилизации.*

**Постановка задачи.** В работе [1] рассмотрена методика параметрического синтеза системы наведения и стабилизации танковой пушки с цифровым электронным блоком. Одним из основных этапов рассмотренной методики является выбор области возможных значений варьируемых констант алгоритма стабилизации, на который отыскивается точка, обеспечивающая максимальную точность замкнутой системы стабилизации. Естественно, в качестве такой области принять область устойчивости замкнутой системы, так как устойчивость является необходимым условием функционирования любой системы управления. Вместе с тем известно [2], что построение области устойчивости замкнутой цифровой системы автоматического управления сложным динамическим объектом в плоскости варьируемых констант алгоритма управления, связанное с отысканием переходной функции непрерывной части объекта и с последующим отысканием дискретной передаточной функции замкнутой дискретной системы, является весьма сложной процедурой. В данной работе предлагается упрощенная процедура построения области устойчивости замкнутой дискретной системы, основанная на предположении о малом значении периода дискретности цифрового электронного блока системы, что для современной элементной базы систем автоматики военного назначения не является существенным ограничением.

**Основная часть.** Пусть непрерывная часть замкнутой дискретной системы описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = \Phi [X(t)] + BU(t), \quad (1)$$

где  $X(t)$  –  $n$ -мерный вектор состояния системы;  $U(t)$  –  $m$ -мерный вектор управления;  $\Phi [X(t)]$  – аналитическая вектор-функция;  $B$  – матрица управления размером  $n \times m$ .

Дискретная часть замкнутой дискретной системы описывается линейным уравнением

$$U[kT] = KX[kT], \quad (2)$$

где  $K$  – матрица варьируемых констант алгоритма управления (2) размером  $m \times n$ .

В общем случае нелинейную вектор-функцию  $\Phi [X(t)]$  разложим в матричный ряд Тейлора и выделим его линейную часть

$$\Phi [X(t)] = AX(t) + R[X(t)], \quad (3)$$

где  $R [X(t)]$  – нелинейные члены матричного ряда. Не накладывая никаких ограничений на компоненты вектор-функции  $R [X(t)]$  рассмотрим линейное векторно-матричное дифференциальное уравнение

$$\dot{X}(t) = A X(t) + BU(t), \quad (4)$$

которые назовем уравнением первого приближения по отношению к исходному уравнению (1).

В соответствии с теоремами А. М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению [2] исходная замкнутая система (1), (2) устойчива, если устойчивой является линейная замкнутая система (4), (2). В этой связи область устойчивости замкнутой системы (4), (2) является областью возможных значений варьируемых параметров стабилизатора (2).

В соответствии с [3] разностное уравнение, которое связывает начальное состояние непрерывной части системы  $X[kT]$  с конечным состоянием  $X[(k+1)T]$  на каждом периоде дискретности, имеет вид

$$X[(k+1)T] = QX[kT] + HU[kT], \quad (5)$$

где матрицы  $Q$  и  $H$  определяются формулами

$$Q = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i T^i; \quad (6)$$

$$H = \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(i+1)!} A^i T^{i+1} \right] B. \quad (7)$$

Качество членов матричных рядов (6) и (7), которые необходимо просуммировать, зависит от величины периода дискретности  $T$ . Современные бортовые цифровые вычислительные машины как правило реализуют достаточно малый период дискретности  $T \gg 0,0005, 0,001$  с. Поэтому с достаточной для решения практических задач точностью можно положить

$$Q = E + AT; \quad H = BT.$$

Подставим соотношение (2) в разностное уравнение (5). В результате получаем разностное уравнение возмущенного движения замкнутой системы стабилизации

$$X[(k+1)T] = [E + AT + BTK] X[kT], \quad (8)$$

а характеристическое уравнение замкнутой системы (8) записывается в виде

$$\det [E(1-z) + AT + BTK] = 0. \quad (9)$$

Математическая модель возмущенного движения непрерывной части замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки в конце вертикального наведения записывается в виде [2]

$$I_{\Pi} \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = -k_{\text{м}} k_{\text{д}} \beta(t); \quad (10)$$

$$I_{\text{к}} \frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} + f \dot{\beta}(t) + c \beta(t) = \frac{k_{\text{е}}}{r_{\text{у}}} U(t), \quad (11)$$

где  $j(t)$  – угол рассогласования оси канала ствола танковой пушки и линии прицеливания;  $b(t)$  – угол отклонения коромысла электрогидравлического усилителя (ЭГУ) от нейтрального положения;  $U(t)$  – выходной сигнал электронного блока стабилизатора;  $I_{\Pi}$  – момент инерции танковой пушки относительно оси цапф;

$I_{\text{к}}$  – момент инерции коромысла ЭГУ относительно оси вращения;  $f$  – коэффициент жидкостного трения в оси коромысла;  $c$  – коэффициент жесткости фиксирующей пружины;  $r_{\text{у}}$  – омическое сопротивление обмотки управления ЭГУ;  $k_{\text{м}}, k_{\text{д}}, k_{\text{е}}$  – коэффициенты пропорциональности.

Приведем математическую модель (10), (11) к нормальной форме Коши, для чего представим их в следующем виде

$$T_{\Pi}^2 \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = -\beta(t); \quad (12)$$

$$T_1^2 \frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} + T_2^2 \frac{d \beta(t)}{dt} + \beta(t) = k \cdot U(t), \quad (13)$$

где  $T_{\Pi}$  – постоянная времени танковой пушки;  $T_1, T_2$  – постоянные времени ЭГУ;  $k$  – коэффициент усиления ЭГУ, причем

$$T_{\Pi}^2 = \frac{I_{\Pi}}{k_{\text{м}} k_{\text{д}}}; \quad T_1^2 = \frac{I_{\text{к}}}{c}; \quad T_2 = \frac{f}{c}; \quad k = \frac{k_{\text{е}}}{c r_{\text{у}}}.$$

Уравнения (12) и (13) разрешим относительно старших производных

$$\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = -\frac{1}{T_{\Pi}^2} \beta(t); \quad (14)$$

$$\frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} = -\frac{1}{T_1^2} \beta(t) - \frac{T_2}{T_1^2} \frac{d \beta(t)}{dt} + \frac{k}{T_1^2} U(t). \quad (15)$$

Введем в рассмотрение вектор состояния непрерывной части системы

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ \beta(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда система дифференциальных уравнений (14), (15) записывается в нормальной форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{T_{\Pi}^2} x_3(t); \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t); \\ \dot{x}_4(t) &= -\frac{1}{T_1^2} x_3(t) - \frac{T_2}{T_1^2} x_4(t) + \frac{k}{T_1^2} U(t). \end{aligned} \quad (16)$$

При записи математической модели непрерывной части системы в векторно-матричной форме (4) матрицы  $A$  и  $B$  равны

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_n^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_1^2} & -\frac{T_2}{T_1^2} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k}{T_1^2} \end{bmatrix}$$

Пусть цифровой электронный блок стабилизатора реализует алгоритм стабилизации

$$u[nT] = k_\varphi u_\varphi[nT] + k_\dot{\varphi} u_{\omega\dot{\varphi}}[nT], \quad (17)$$

где  $u_\varphi[nT]$  и  $u_{\omega\dot{\varphi}}[nT]$  – решетчатые функции, соответствующие выходным сигналам гироскопических датчиков угла и угловой скорости

$$u_\varphi(t) = k_\Gamma \varphi(t); \quad u_{\omega\dot{\varphi}}(t) = k_c \omega_\varphi(t) = k_c \dot{\varphi}(t)$$

или

$$u_\varphi(t) = k_\Gamma x_1(t); \quad u_{\omega\dot{\varphi}}(t) = k_c x_2(t). \quad (18)$$

Тогда, в соответствии с формулами (18), алгоритм (17) записывается в виде

$$u[nT] = k_\varphi k_\Gamma x_1[nT] + k_\dot{\varphi} k_c x_2[nT], \quad (19)$$

а матрица  $K$  констант алгоритма стабилизации равна

$$K = \begin{bmatrix} k_\varphi k_\Gamma & k_\dot{\varphi} k_c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Подставляя матрицы  $A$ ,  $B$  и  $K$  в уравнение (9), получаем

$$\begin{vmatrix} 1-z & T & 0 & 0 \\ 0 & 1-z & -\frac{T}{T_n^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-z & T \\ \frac{kk_\Gamma T}{T_1^2} k_\varphi & \frac{kk_c T}{T_1^2} k_\dot{\varphi} & -\frac{T}{T_1^2} & 1-z - \frac{T_2 T}{T_1^2} \end{vmatrix} = \quad (20)$$

$$= (1-z)^4 - \frac{T_2 T}{T_1^2} (1-z)^3 + \frac{T^2}{T_1^2} (1-z)^2 - \frac{T^3 k k_c}{T_n^2 T_1^2} (1-z) k_\varphi + \frac{T^4 k k_\Gamma}{T_n^2 T_1^2} k_\dot{\varphi} = 0.$$

Воспользуемся методом  $w$ -преобразования [2] и в характеристическом уравнении (20) произведем замену

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+w}{1-w}; \quad (1-z) = -\frac{2w}{1-w}; \\ (1-z)^2 &= \frac{4w^2}{1-2w+w^2}; \\ (1-z)^3 &= -\frac{8w^3}{1-3w+3w^2-w^3}; \\ (1-z)^4 &= \frac{16w^4}{1-4w+6w^2-4w^3+w^4}. \end{aligned} \quad (21)$$

В соотношениях (21) произведем замену  $w = j\omega$ . В результате получаем:

$$\begin{aligned} 1-z &= \alpha_1(\omega) + j\beta_1(\omega); & (1-z)^2 &= \alpha_2(\omega) + j\beta_2(\omega); \\ (1-z)^3 &= \alpha_3(\omega) + j\beta_3(\omega); & (1-z)^4 &= \alpha_4(\omega) + j\beta_4(\omega), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1(\omega) &= \frac{2w^2}{1+w^2}; & \beta_1(\omega) &= -\frac{2w}{1+w^2}; \\ \alpha_2(\omega) &= -\frac{4w^2(1-w^2)}{(1-w^2)^2+4w^2}; & \beta_2(\omega) &= -\frac{8w^3}{(1-w^2)^2+4w^2}; \\ \alpha_3(\omega) &= -\frac{8w^4(3-w^2)}{(1-3w^2)^2+w^2(3-w^2)^2}; \\ \beta_3(\omega) &= \frac{8w^3(1-3w^2)}{(1-3w^2)^2+w^2(3-w^2)^2}; \\ \alpha_4(\omega) &= \frac{16w^4(1-6w^2+w^4)}{(1-6w^2+w^4)^2+16w^2(1-w^2)^2}; \\ \beta_4(\omega) &= \frac{64w^5(1-w^2)}{(1-6w^2+w^4)^2+16w^2(1-w^2)^2}. \end{aligned}$$

С учетом соотношений (22) характеристическое уравнение (20) принимает вид

$$\begin{aligned} \alpha_4(\omega) + j\beta_4(\omega) - \frac{T_2 T}{T_1^2} [\alpha_3(\omega) + j\beta_3(\omega)] + \frac{T^2}{T_1^2} [\alpha_2(\omega) + j\beta_2(\omega)] - \\ - \frac{T^3 k k_c}{T_n^2 T_1^2} [\alpha_1(\omega) + j\beta_1(\omega)] k_\varphi + \frac{T^4 k k_\Gamma}{T_n^2 T_1^2} k_\dot{\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Комплексная величина равняется нулю в том случае, если отдельно являются нулю отдельно её действительная и мнимая части, поэтому уравнение (24) эквивалентно двум уравнениям

$$X(\omega, k_\varphi, k_\dot{\varphi}) = \alpha_4(\omega) - \frac{T_2 T}{T_1^2} \alpha_3(\omega) + \frac{T^2}{T_1^2} \alpha_2(\omega) - \quad (25)$$

$$- \frac{T^3 k k_c}{T_n^2 T_1^2} \alpha_1(\omega) k_\varphi + \frac{T^4 k k_\Gamma}{T_n^2 T_1^2} k_\dot{\varphi} = 0;$$

$$Y(\omega, k_\varphi, k_\dot{\varphi}) = \beta_4(\omega) - \frac{T_2 T}{T_1^2} \beta_3(\omega) + \frac{T^2}{T_1^2} \beta_2(\omega) - \quad (26)$$

$$- \frac{T^3 k k_c}{T_n^2 T_1^2} \beta_1(\omega) k_\varphi = 0.$$

Из уравнений (25) и (26) имеем

$$\begin{aligned} k_\varphi = \frac{T_n^2 T_1^2}{T^4 k k_\Gamma} \left\{ \frac{\alpha_1(\omega)}{\beta_1(\omega)} \left[ \frac{T^2}{T_1^2} \beta_2(\omega) - \frac{T_2 T}{T_1^2} \beta_3(\omega) + \beta_4(\omega) \right] - \right. \\ \left. - \frac{T^2}{T_1^2} \alpha_2(\omega) + \frac{T_2 T}{T_1^2} \alpha_3(\omega) - \alpha_4(\omega) \right\}; \end{aligned} \quad (27)$$

$$k_\dot{\varphi} = \frac{T_n^2 T_1^2}{T^4 k k_c} \cdot \frac{1}{\beta_1(\omega)} \left[ \frac{T^2}{T_1^2} \beta_2(\omega) - \frac{T_2 T}{T_1^2} \beta_3(\omega) + \beta_4(\omega) \right]. \quad (28)$$

С помощью соотношений (27) и (28) построим границу области устойчивости замкнутой дискретной системы. Для выделения области устойчивости воспользуемся правилом штриховки [2]. Составим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X(\omega, k_\varphi, k_\psi)}{\partial k_\varphi} & \frac{\partial X(\omega, k_\varphi, k_\psi)}{\partial k_\psi} \\ \frac{\partial Y(\omega, k_\varphi, k_\psi)}{\partial k_\varphi} & \frac{\partial Y(\omega, k_\varphi, k_\psi)}{\partial k_\psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{T^4 k k_\Gamma}{T_n^2 T_1^2} & -\frac{T^3 k k_c}{T_n^2 T_1^2} \alpha_1(\omega) \\ 0 & -\frac{T^3 k k_c}{T_n^2 T_1^2} \beta_1(\omega) \end{vmatrix} = (29)$$

$$= -\frac{T^7 k^2 k_\Gamma k_c}{T_n^4 T_1^4} \beta_1(\omega) = \frac{T^7 k^2 k_\Gamma k_c}{T_n^4 T_1^4} \cdot \frac{2\omega}{1 + \omega^2}.$$

При изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  определитель (29) положителен, следовательно, границу области устойчивости при перемещении вдоль неё в сторону возрастания  $\omega$  следует штриховать слева.

На рис. 1 приведены границы области устойчивости при различных значениях величины периода квантования  $T$ .

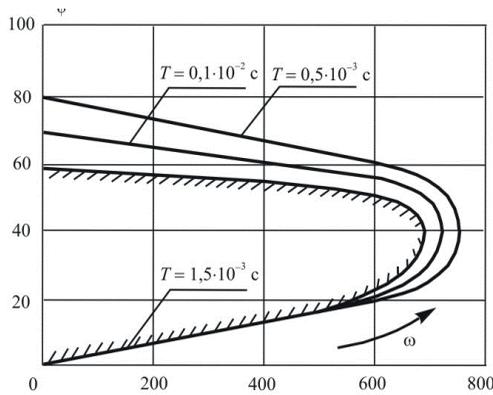


Рис. 1. Области устойчивости замкнутой дискретной системы при различных значениях периода квантования  $T$

При построении областей устойчивости значения параметров объекта стабилизации принимались равными:

$$a_{\psi\psi} = -2 \text{ с}^{-2}; \quad a'_{yy} = -10 \text{ с}^{-1}; \quad a_{y\delta} = 4 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$a_{y\psi} = -35 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}; \quad a'_{\psi y} = -5 \text{ м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}; \quad a_{\psi\delta} = -1,2 \text{ с}^{-2}.$$

### Выводы и рекомендации

Из анализа рис. 1 следует вывод, что область устойчивости замкнутой системы с цифровым электронным блоком управления существенным образом зависит от величины периода квантования  $T$  при фиксированном числе учитываемых членов разложения рядов (6) и (7). С увеличением величины периода  $T$  область устойчивости суживается и дает искаженное представление о множестве допустимых значений варьируемых констант алгоритма наведения и стабилизации. Если выбранный период квантования цифрового электронного блока превышает значение  $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ , то для построения правдоподобного множества допустимых значений варьируемых констант алгоритма (17) недостаточно учета только лишь линейных членов матричных рядов (6) и (7). В этом случае ряды (6) и (7) следует выбирать как минимум в виде

$$Q = E + AT + \frac{1}{2} A^2 T^2; \quad H = BT + \frac{1}{2} ABT^2,$$

что приведет к усложнению поставленной задачи, впрочем, вполне преодолимому, ибо степень характеристического полинома (20) не возрастет, а усложнятся лишь соотношения для его постоянных коэффициентов.

### СПИСОК ССЫЛОК

1. Александров Е. Е. Параметрический синтез цифровой системы стабилизации танковой пушки / Е. Е. Александров, Т. Е. Александрова // Проблемы управления и информатики. – 2015. – № 6. – С. 5–20.
2. Александров Е. Е. Математическое моделирование, системный анализ и синтез динамических систем / Е. Е. Александров, Т. Е. Александрова. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2014. – 200 с.
3. Васильев С. К. Кибернетика в системах военного назначения / С. К. Васильев, В. Н. Захаров, Ю. Ф. Прохоров. – М. : Воениздат, 1979. – 263 с.

Стаття надійшла до редколегії 29.08.2018 р.

**Рецензент Д.О. Волонцевич,**

д-р техн. наук, професор.

(НТУ «Харьковский политехнический институт», г. Харьков)