УДК 372.851 *Кузьмич В. І.*[*]

ФОРМУВАННЯ В ШКОЛЯРІВ ПОНЯТЬ ВІДСТАНІ ТА ПРЯМОЛІНІЙНОСТІ ЗАСОБАМИ МЕТРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

У статті розглядаються питання поступового включення в навчальний матеріал шкільного курсу геометрії елементів метричної геометрії. Ці питання стосуються шкільної програми поглибленого вивчення математики. Такий підхід можливо використати вже в сьомому класі, оскільки відповідно до програми саме в цьому класі розпочинається систематичне вивчення основних геометричних понять та співвідношень між ними. Крім того, програма з алгебри в цьому класі передбачає вивчення графіків функцій, зокрема графіка лінійної функції, що дозволяє наочно продемонструвати окремі елементи метричної геометрії.

З більшістю матеріалу, що пропонується для вивчення, доцільно знайомити учнів у позаурочний час, оскільки він має значну ступінь формалізації й для оволодіння ним потрібно розвинути у учнів уміння неформального сприйняття основних геометричних понять.

Метою уведення у вивчення елементів метричної геометрії є поступова підготовка учнів до адекватного сприйняття основних положень неевклідових геометрій, зокрема геометрії М. І. Лобачевського. Про геометрію М. І. Лобачевського шкільні підручники з геометрії згадують лише в історичному аспекті, формулюючи п'ятий постулат Евкліда та вказуючи на заміну його М. І. Лобачевським протилежним твердженням. З одного боку, це призводить до нерозуміння суті неевклідової геометрії, а з іншого боку, такий підхід є вимушеним і зумовлений значною кількістю часу, необхідною для викладення основних положень неевклідової геометрії, які важко сприймаються при інтуїтивному розумінні основних геометричних понять.

У статті пропонується знайомити учнів з окремими елементами неевклідової геометрії, без використання складних аналітичних та геометричних конструкцій, на основі поняття відстані між двома точками, що використовується при означенні метричного простору.

Ключові слова: геометрія, поглиблене вивчення, відстань, довжина, метрика, метричний простір, неевклідова геометрія.

З другої половини XIX сторіччя розпочинається стрімкий розвиток неевклідових геометрій, спричинений побудовою Миколою Івановичем Лобачевським (1792–1856) нової геометрії, яка базувалась на запереченні п'ятого постулату геометрії Евкліда. У 1906 році французький математик Моріс Рене Фреше (1878–1973) увів у розгляд поняття метричного простору, що базувалось на понятті відстані між двома точками (метрики простору). З цього часу розпочинається розвиток метричної геометрії – геометричних структур та співвідношень між ними, що базуються лише на понятті відстані між точками метричного простору. За висловленням авторів курсу метричної геометрії, «…метрична геометрія залишається, можливо, одним із самих «елементарних» математичних методів» [7, с. XIV]. Матеріал програми шкільного курсу математики дає можливість розглядати окремі поняття метричної геометрії, що сприятиме формуванню більш широкого розуміння учнями основних геометричних понять.

Основоположниками метричної геометрії уважають англійського математика Артура Келі (1821–1895) та австрійсько-американського математика Карла Менгера (1903–1985). Значний вклад у розвиток метричної геометрії зробив російський математик О. Д. Александров (1912–1999). З основними положеннями метричної геометрії можна ознайомитись як за підручником [7], так і за монографіями відомих математиків Герберта Буземана [6] та Марселя Берже [5].

До математиків, які здійснили значний вклад у розвиток метричної геометрії, відносять також Веніаміна Федоровича Кагана (1869–1953), який значну частину своєї наукової діяльності провів на фізико-математичному факультеті Одеського університету. У 1902 році В. Ф. Каган, обґрунтовуючи основи геометрії Евкліда, побудував геометричну систему, у якій незалежно від М. Р. Фреше використовував поняття точки, що не означується, та на основі якого означаються інші геометричні образи, що розглядаються як сукупності точок. Він увів поняття «відстані» між точками, що не змінюється при русі в просторі. Це дозволяє побудувати геометрію Евкліда, не спираючись на інтуїтивне сприйняття її основних понять [14]. В. Ф. Каган побудував вичерпну теорію прямої лінії, установивши ізоморфізм множини дійсних чисел і точок прямої [15, розділ XIX]. При створенні теорії В. Ф. Каган використовував поняття «прямолінійної розміщеності» точок [16, с. 527]. Це поняття буде головним при викладенні основного матеріалу статті.

У недавніх роботах з метричної геометрії активно досліджувались питання прямолінійного та плоского розміщення точок метричного простору [19–23].

Мета статті – показати, яким чином можна застосувати засоби метричної геометрії для формування поняття відстані між двома точками та поняття прямолінійності на базі шкільного курсу математики.

Наведемо основні означення, що стосуються метричних просторів.

Означення 1. *Метричним простором називається сукупність непорожньої множини X елементів якої завгодно природи й однозначної дійсної невід'ємної функції $\rho(x; y)$, означеної для будь-яких елементів x і y з X і яка задовольняє такі умови:*

1) $\rho(x; y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x=y$;

2) $\rho(x; y) = \rho(y; x)$ (аксіома симетрії);

3) для будь-яких трьох елементів x, y, z виконується нерівність

$$\rho(x; y)\le \rho(x; z) + \rho(z; y) \text{ (аксіома трикутника).}$$

(дивись, наприклад, [10, с. 102]).

При цьому елементи множини X називають точками метричного простору, функцію ρ – метрикою простору X, а числове значення функції $\rho(x; y)$ – відстанню між елементами (точками) x і y. Метричний простір X з метрикою ρ позначають $(X; \rho)$.

Зрозуміло, що в такому вигляді, як це наведено в означенні 1, знайомити учнів з поняттям метрики й метричного простору недоцільно, оскільки при цьому використовується поняття функції двох змінних, а якщо точніше, то функціоналу, оскільки точками простору X можуть бути не лише числа.

Звернемо увагу на те, що в означенні 1 елементи множини X можуть мати будь-яку природу. Евклід описував точку так: «Точка є те, що не має частин» [30, с. 11]. Це узгоджується з описом точки в шкільних підручниках: «Точка найпростіша геометрична фігура. Це єдина фігура, яку не можливо розбити на частини» [25, с. 12]; «Точка не має ані довжини, ані ширини, її форму ми не можемо визначити» [1, с. 15]. Інколи точку описують за допомогою графічного її опису: «Якщо на аркуш паперу натиснути добре загостреним олівцем, то залишиться слід, який дає уявлення про точку» [8, с. 9]; «Уявлення про точку можна отримати, якщо на аркуш паперу натиснути добре загостреним олівцем або на шкільну дошку – добре загостреним шматком крейди» [11, с. 6], або простіше: «Найпростіша геометрична фігура – точка» [2, с. 6].

Перше знайомство з поняттям відстані між двома точками на рівні означення відбувається в сьомому класі під час ознайомлення з основними геометричними поняттями: «Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB. Якщо точки A і B збігаються, то уважають, що відстань між ними дорівнює нулю» [25, с. 17]; «Відстань між двома точками – це довжина відрізка з кінцями в цих точках» [1, с. 18]; «Довжину відрізка AB називають також відстанню між точками A і B» [8, с. 17]. На цьому етапі вивчення математики, на наш погляд, ще рано говорити про інші означення відстані між точками, хоча можна звернути увагу учнів на те, що при русі по місту найменша відстань, яку вони повинні подолати між двома об'єктами, не завжди вимірюється довжиною відрізка, що з'єднує ці об'єкти, а може її перевищувати. Більше того, таких шляхів (геодезичних ліній) може бути декілька. Це може стати першим прикладом неоднозначності (відносності) поняття відстані між двома точками, крім того, це допоможе підготувати учнів до сприйняття в подальшому нерівності трикутника. З цією нерівністю учні знайомляться теж у 7 класі: «Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін…» [1, с. 109; 2, с. 108–109; 8, с. 74; 11, с. 115; 25, с. 113].

У зв'язку з нерівністю трикутника, як правило, робиться висновок про характеристичну властивість трьох точок, що належать одній прямій, та уводиться поняття «точка B міститься між точками A і C», що є ознакою «прямолінійного розміщення» [16, с. 527] точок A, B, C: «якщо для трьох точок A, B і C виконується рівність $AB = AC + CB$, то точка C є внутрішньою точкою відрізка AB» [25, с. 114]; «якщо для трьох точок A, B, C виконується рівність $AB + BC = AC$, то ці точки лежать на одній прямій і точка B міститься між точками A і C» [1, с. 109]; «…якщо точка C лежить між точками A і B…, то правильні такі співвідношення: $AB = BC + CA$, $BC < CA + AB$, $CA < AB + BC$» [2, с. 108-109]. Ці факти повністю узгоджуються з аксіомами розміщення, запропонованими В. Ф. Каганом при побудові теорії прямої лінії [15, с. 260].

Тепер перейдемо до фактичного матеріалу, який пропонується для вивчення. Спочатку сформулюємо дещо спрощене, але більш об'ємне, означення метричного простору та відстані між його точками. Це означення використовує поняття множини та її елементів, що сформовані у восьмому класі [26, с. 24].

Означення 2. *Непорожню множину X елементів якої завгодно природи будемо називати метричним простором, якщо кожній парі $(x; y)$ різних елементів цієї множини за певним правилом ρ поставлене у відповідність єдине додатне число $\rho(x; y)$, що називається відстанню між елементами x і y, і яке задовольняє умовам:*

1) для будь-яких двох різних елементів x і y відстань між елементами x і y дорівнює відстані між елементами y і x, тобто виконується рівність $\rho(x; y) = \rho(y; x)$ (умова симетрії),

2) для будь-яких трьох різних елементів x, y, z відстань між елементами x і y не більша, ніж сума відстаней між елементами x і z та між елементами z і y, тобто виконується нерівність $\rho(x; y) \leq \rho(x; z) + \rho(z; y)$ (нерівність трикутника).

При виконанні умов Означення 2 елементи множини будемо називати точками метричного простору, правило ρ – метрикою простору. Метричний простір X з метрикою ρ будемо позначати (X, ρ).

Необхідно звернути увагу на те, що це означення нагадує означення функції, яке подається в курсі алгебри в дев'ятому класі [27, с. 11]. Однак є декілька суттєвих відмінностей: елементами множини можуть бути не лише числа, число ставиться у відповідність двом елементам множини й це число повинно бути лише додатнім, потрібно перевіряти виконання умови симетрії та нерівність трикутника для всіх пар елементів множини.

Означення 2 метричного простору у такій формі, як воно записане, необхідно подавати в старших класах, а в дев'ятому класі його доцільно подати (як й означення функції) в описовій формі, використовуючи достатню кількість прикладів. При цьому можна розділити формулювання умов 1) і 2) означення на словесну й аналітичну форми.

Укажемо декілька найпростіших прикладів метричних просторів, доступних для легкого засвоєння учнями. При цьому ми будемо використовувати означення відстані між точками числової осі [28, с. 82], у відповідності до якого відстань між двома точками x і y числової осі знаходять як абсолютну величину (модуль) різниці відповідних чисел

x і y: $\rho(x; y) = |x - y|$. Крім того, будемо використовувати нерівність для модуля суми двох чисел [31, с. 60]:

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \qquad (1)$$

Приклад 1. Візьмемо в якості відстані між точками $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ координатної площини число $\rho(M_1; M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Це число для двох різних точок є додатнім. Виконання умови симетрії очевидне внаслідок властивостей модуля числа. Нерівність трикутника для трьох точок $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_1(x_1; y_1)$ має вигляд:

$$\rho(M_1; M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq$$
$$\leq (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) + (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|$$

Виконання цієї нерівності очевидне, оскільки за рівністю (1) кожен з модулів у лівій частині нерівності не перевищує суми модулів своїх доданків.

Виконані усі умови означення 2, отже, розглянутий простір є метричним. Цей простір позначають R_1^2.

Простір R_1^2 цікавий тим, що його суть легко пояснити навіть учням сьомого класу. За цією метрикою на координатній площині найменшу відстань між точками M_1 і M_2 можна подолати, йдучи паралельно координатним осям (по катетах прямокутного трикутника, для якого відрізок M_1M_2 є гіпотенузою). Подібна ситуація виникає в місті з прямокутним розташуванням вулиць. Це один із прикладів, де поняття відстані між точками не збігається з класичним, як довжини відрізка, що з'єднує ці точки.

Приклад 2. Візьмемо в якості відстані між точками $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ координатної площини число $\rho(M_1; M_2) = max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$. Це число для двох різних точок є додатнім. Виконання умови симетрії очевидне внаслідок означення модуля числа. Нерівність трикутника для трьох точок $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_1(x_1; y_1)$ має вигляд:

$$\rho(M_1; M_2) = max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} \leq max\{|x_1 - x_3|; |y_1 - y_3|\} +$$
$$+ max\{|x_3 - x_2|; |y_3 - y_2|\} = \rho(M_1; M_3) + \rho(M_3; M_2).$$

Використовуючи нерівність (1) для модуля суми двох чисел, отримуємо:

$$|x_1 - x_2| = |(x_1 - x_3) + (x_3 - x_2)| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq$$
$$\leq max\{|x_1 - x_3|; |y_1 - y_3|\} + max\{|x_3 - x_2|; |y_3 - y_2|\}.$$

Аналогічно отримуємо нерівність:

$$|y_1 - y_2| = |(y_1 - y_3) + (y_3 - y_2)| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \leq$$
$$\leq max\{|x_1 - x_3|; |y_1 - y_3|\} + max\{|x_3 - x_2|; |y_3 - y_2|\}.$$

Порівнюючи обидві отримані нерівності, остаточно отримуємо:

$$\rho(M_1; M_2) = max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} \leq$$
$$\leq ma\,x\{|x_1 - x_3|; |y_1 - y_3|\} + ma\,x\{|x_3 - x_2|; |y_3 - y_2|\}.$$

Таким чином, виконані всі умови означення 2, тому розглянутий простір є метричним, його позначають R_0^2. Простір R_0^2 теж може бути прикладом простору, у якому відстань між точками не завжди є довжиною відрізка, що з'єднує ці точки.

Приклад 3. Розглянемо в просторі R_0^2 чотири точки: $M_1(0; 1)$, $M_2(0; -1)$, $M_3(-1; 0)$, $M_4(1; 0)$. Знайдемо за метрикою простору відстані між цими точками: $\rho(M_1; M_2) = 2$, $\rho(M_1; M_3) = 1$, $\rho(M_1; M_4) = 1$, $\rho(M_2; M_3) = 1$, $\rho(M_2; M_4) = 1$, $\rho(M_3; M_4) = 2$.

Необхідно звернути увагу на рівності, які при цьому виконуються:

$\rho(M_1; M_2) = \rho(M_1; M_3) + \rho(M_2; M_3) = 1 + 1 = 2;$
$\rho(M_1; M_2) = \rho(M_1; M_4) + \rho(M_2; M_4) = 1 + 1 = 2;$
$\rho(M_3; M_4) = \rho(M_1; M_3) + \rho(M_1; M_4) = 1 + 1 = 2;$
$\rho(M_3; M_4) = \rho(M_2; M_3) + \rho(M_2; M_4) = 1 + 1 = 2.$

Геометрично на координатній площині, точки M_1, M_2, M_3, M_4 є вершинами квадрата, довжина сторони якого дорівнює $\sqrt{2}$. У геометрії Евкліда довжина діагоналі квадрата менша за суму довжин двох його сторін, а у цьому прикладі вони виявляються рівними. Більше того, з кожної із отриманих чотирьох рівностей у геометрії Евкліда випливає, що всі три точки, які є у рівності, повинні лежати на одній прямій.

Цей приклад наочно демонструє відмінність понять відстані між точками однієї і тієї ж множини при різному їх означенні. Крім того, цей приклад указує на неоднозначність (відносність) поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору.

Розглянемо більш детально поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору. Воно є частинним випадком означення 2 у випадку, коли нерівність трикутника перетворюється в рівність.

Означення 3. *Будемо казати, що точки x, y, z метричного простору (X, ρ) розміщені прямолінійно в цьому просторі, якщо виконується рівність*

$$\rho(x; y) = \rho(x; z) + \rho(z; y) \qquad (2)$$

(див. [16, с. 527]).

При виконанні рівності (2) природно казати, що точка z «лежить між» точками x і y, або називати її «внутрішньою» для точок x, y, z. Одночасно про точку x (точку y) можна казати, що вона «лежить поза» точками y і z (точками x і z), або називати її «крайньою» для точок x, y, z (порівняйте [8, с. 16; 25, с. 16]).

Можна звернути увагу учнів на те, що рівність (2) повинна виконуватись для деяких двох точок із трьох заданих (наприклад, для точок x і y). Для інших пар точок при цьому буде виконуватись рівність $\rho(x; z) = \rho(x; y) - \rho(z; y)$ або рівність $\rho(z; y) = \rho(x; y) - \rho(x; z)$, які теж можуть указувати на прямолінійне розміщення точок x, y, z.

Можна дати означення прямолінійного розміщення множини точок метричного простору. Для цього необхідно вимагати прямолінійного розміщення будь-яких трьох точок цієї множини.

Означення 4. *Будемо казати, що множина точок метричного простору прямолінійно розміщена, якщо будь-які три точки цієї множини прямолінійно розміщені* (див. [16, с. 527]).

Тепер розглянемо декілька прикладів прямолінійного розміщення точок у різних метричних просторах.

Приклад 4. Розглянемо множину лінійних функцій $y = kx$, визначених на відрізку $x \in [0; 1]$. Графіками цих функцій є прямі лінії, що проходять через початок координат. На відрізку $[0; 1]$ графіками будуть відрізки цих прямих. Досить ґрунтовно з властивостями функцій учні знайомляться в дев'ятому класі [3, с. 73; 12, с. 68; 17, с. 72; 27, с. 24; 31, с. 65]. Однак з окремими елементарними функціями та їхніми найпростішими властивостями, зокрема з лінійною функцією, знайомство розпочинається ще із сьомого класу [4, с. 141; 13, с. 130; 18, с. 96; 24, с. 103; 29, с. 137; 32, с. 139]. Зауважимо, що дві функції, означені на деякому проміжку, ми будемо уважати різними, якщо хоча б в одній точці цього проміжку вони мають різні значення.

Уведемо метрику в цій множині, вибравши за відстань між двома різними її елементами $y = k_1 x$ і $y = k_2 x$ число: $\rho(k_1 x\, ; k_2 x) = max_{x \in [0;1]} |k_1 x - k_2 x|$. Покажемо, що при такому виборі відстані між елементами множина функцій $y = kx$ є метричним простором. У подальшому для зручності будемо користуватись позначеннями: $k_i x = y_i$, $\rho\big(k_i x\, ; k_j x\big) = \rho\big(y_i\, ; y_j\big) = \rho_{ij}$ $(i, j = 1,2,3, \dots)$.

Для двох різних функцій відстань ρ_{12} є додатною внаслідок означення модуля числа. Якщо припустити, що ця відстань дорівнює нулю, то в кожній точці відрізка $[0; 1]$ значення обох функцій повинні бути однаковими, тобто функції повинні збігатися.

Із властивостей модуля числа випливає властивість симетрії відстані: $\rho(y_1\, ; y_2) = max_{x \in [0;1]} |k_1 x - k_2 x| = max_{x \in [0;1]} |k_2 x - k_1 x| = \rho(y_2\, ; y_1)$.

Розглянемо на відрізку $[0; 1]$ три функції: $y_1 = k_1 x$, $y_2 = k_2 x$, $y_3 = k_3 x$, де k_1, k_2, k_3 – різні числа. Нехай, наприклад, виконуються нерівності: $k_1 < k_2 < k_3$. Знайдемо відстані між функціями:

$\rho_{12} = max_{x \in [0;1]} |k_1 x - k_2 x| = max_{x \in [0;1]} |k_1 - k_2||x| = k_2 - k_1$,

Аналогічно отримуємо: $\rho_{13} = k_3 - k_1$, $\rho_{23} = k_3 - k_2$.

Із отриманих значень слідує справедливість рівності:

$$\rho_{13} = k_3 - k_1 = (k_2 - k_1) + (k_3 - k_2) = \rho_{12} + \rho_{23}. \quad (3)$$

Отже, нерівність трикутника для точок y_1, y_2, y_3 виконується. Таким чином, вибрана відстань є метрикою, а множина функцій $y=kx$, означених на відрізку $x\in[0; 1]$, є метричним простором.

Оскільки для точок y_1, y_2, y_3 виконується рівність (2), а точки ми вибрали довільно, то з рівності (3), за Означенням 4, випливає прямолінійне розміщення всієї множини функцій.

Повернемось до прикладу 3. Ми встановили, що для будь-яких трьох точок, із розглянутих чотирьох M_1, M_2, M_3, M_4 у цьому прикладі, виконується рівність (2), і тому кожні три точки за Означенням 3 розміщені прямолінійно, а отже, за Означенням 4, усі чотири точки розміщені прямолінійно в просторі R_0^2. Цей результат дещо відрізняється від інтуїтивного сприйняття поняття прямої лінії в геометрії Евкліда, оскільки ці чотири точки, як відзначалось вище, на координатній площині є вершинами квадрата.

Розглянуті особливості прямолінійного розміщення точок пояснюються тим, що в геометрії Евкліда однозначність прямолінійного розміщення точок та її властивості, встановлюється відповідними аксіомами [9, с. 3–4], які в наведених прикладах не використовувались.

З наведеного вище можна зробити висновок про те, що матеріал шкільного курсу математики достатній для поступового, починаючи з сьомого класу, знайомства учнів з найпростішими елементами метричної геометрії. Систематичне ознайомлення з цими елементами необхідно розпочинати в дев'ятому класі. Основні геометричні поняття, (числова вісь, координатна площина) тісно пов'язані з метричною геометрією. Ознайомлення учнів з елементами метричної геометрії сприятиме формуванню в них більш широкого розуміння основних геометричних понять і готуватиме їх до адекватного сприйняття в подальшому основних понять і положень неевклідових геометрій.

У подальших дослідженнях можуть бути розглянуті питання щодо методичних аспектів ознайомлення учнів старших класів з елементами метричної геометрії, оскільки математичний матеріал, що розглядається в десятому й одинадцятому класах, значно розширює можливість розгляду більш складніших метричних просторів, а на їхній основі – можливість знайомства з основними поняттями неевклідових геометрій.

Література:

1. Апостолова Г. В. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза, 2015. 216 с.
2. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Відродження, 2015. 192 с.
3. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.
4. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Відродження, 2015. 288 с.
5. Берже М. Геометрия. Том 1. М.: Мир, 1984. 559 с.
6. Буземан Г. Геометрия геодезических. М.: Физматгиз, 1962. 503 с.
7. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. 512 с.
8. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Видавничий дім «Освіта», 2015. 208 с.
9. Давид Гильберт. Основания геометрии. Петроград: Сеятель, 1923. 152 с.
10. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. Частина 3. К.: Вища школа, 1979. 383 с.
11. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза, 2015. 184 с.
12. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза, 2017. 264 с.
13. Істер О. Н. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза, 2015. 256 с.
14. Каган В. Ф. Система посылок, определяющих евклидову геометрию. *Зап. матем. отд. О-ва естествознания*. Одесса, 1902. № 20. С. 67–105.

15. Каган В. Ф. Основания геометрии. Часть 2. М.–Л.: Гостехиздат, 1956. 344 с.
16. Каган В. Ф. Очерки по геометрии. М.: Издательство Московского университета, 1963. 571 с.
17. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра: підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль: Підручники і посібники, 2017. 264 с.
18. Кравчук В. Р., Підручна М. В., Янченко Г. М. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль: Підручники і посібники, 2015. 224 с.
19. Кузьмич В. І. Поняття кута при вивченні властивостей метричного простору. *Вісн. Черкас. ун-ту. Пед. науки*, 2016. № 13. С. 26–32.
20. Кузьмич В. І. Кутова характеристика у метричному просторі. *Algebr. and Geom. Methods of Analysis: Int. Sci. Conf.: Abstracts*, 2017. С. 11–12.
21. Кузьмич В. І. Плоско розміщені множини точок у метричному просторі. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер: мех.-мат.*, 2017. Вип. 83. С. 58–71.
22. Кузьмич В. І. Побудова плоских образів у довільному метричному просторі. *Вісн. Черкас. ун-ту. Пед. науки*, 2017. № 11. С. 40–46.
23. Кузьмич В. І. Геометричні властивості метричних просторів. *Укр. мат. журн.*, 2019. № 3(71). С. 382–399.
24. Мальований Ю. І., Литвиненко Г. М., Бойко Г. М. Алгебра: підручник для 7 кл. загальноосвітн. навч. закл. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2015. 256 с.
25. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія. Пропедевтика поглибленого вивчення: навч. посіб. для 7 кл. з поглибленим вивченням математики. Х.: Гімназія, 2015. 192 с.
26. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: підруч. для 8 кл. з поглибленим вивченням математики. Х.: Гімназія, 2016. 384 с.
27. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х.: Гімназія, 2017. 416 с.
28. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х.: Гімназія, 2017. 304 с.
29. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра. Пропедевтика поглибленого вивчення: навч. посіб. для 7 кл. з поглибленим вивченням математики. Х.: Гімназія, 2015. 240 с.
30. Начала Евклида. Книги I-VI. М.–Л.: Гостехиздат, 1948. 447 с.
31. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Алгебра: підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. К.: УОВЦ «Оріон», 2017. 272 с.
32. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Математика: підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. К.: Видавничий дім «Освіта», 2015. 288 с.

Kuz'mich V. I.

FORMATION OF THE CONCEPTS OF DISTANCE AND STRAIGHTNESS IN SCHOOLCHILDREN USING METRIC GEOMETRY

The article deals with the questions of gradual inclusion in the educational material of the school course on the geometry of elements of metric geometry. These questions relate to the school curriculum for in-depth study of mathematics. Such an approach can be used already in the seventh class, because, according to the program, it is in this class that a systematic study of the basic geometric concepts and relationships between them begins.

It is advisable to familiarize students with the majority of the material offered for study, because it has a significant degree of formalization, and for mastering it is necessary to develop the students' ability to informally perceive the basic geometric concepts.

The purpose of introducing into the study of elements of metric geometry is the gradual preparation of students for an adequate perception of the basic provisions of non-Euclidean geometries, in particular the geometry of M. I. Lobachevsky. On the geometry of M. I. Lobachevsky, school textbooks on geometry are mentioned only in the historical aspect, formulating the fifth Euclidean postulate, and pointing to the replacement of it by M. I. Lobachevsky's opposite statement. On the one hand, this leads to a misunderstanding of the essence of non-Euclidean geometry, and on the other hand, such an approach is forced and due to the considerable amount of time necessary to elaborate the *basic provisions of non-Euclidean geometry that are difficult to perceive under the intuitive understanding of basic geometric concepts.*

The article proposes to introduce students to separate elements of non-Euclidean geometry, without the use of complex analytical and geometric constructions, on the basis of the concept of distance between two points, used in the definition of metric space.

Key words: geometry, in-depth study, distance, length, metric, metric space, non-Euclidean geometry.

Дата надходження статті: «17» квітня 2019 р.