Practical significance of the investigation is that the suggested methodological approaches may be actively used by school and university teachers for increasing the effectiveness of research skills' formation in mathematics.

Prospects for the further research are connected with working out of innovative educational technologies of interaction «School – University».

***Key words**: succession, research skills, psychological peculiarities, creativity, cognitive activity.*

УДК 372.851: 373.1

О. В. Школьний
Національний педагогічний
університет імені М. П. Драгоманова

ПРО ДВОРІВНЕВЕ ЗНО З МАТЕМАТИКИ ТА ОСОБЛИВОСТІ ПІДГОТОВКИ ДО НЬОГО

У роботі розглянуто особливості дворівневого зовнішнього незалежного оцінювання якості знань із математики в порівнянні з традиційною однорівневою системою загальнодержавного стандартизованого підсумкового оцінювання, наведено методичні рекомендації щодо підготовки учнів до даного виду тестування, які стосуються тем «Планіметрія» та «Стереометрія».

***Ключові слова**: дворівневе оцінювання навчальних досягнень з математики, загальнодержавне стандартизоване оцінювання, учні старшої школи, державна підсумкова атестація, зовнішнє незалежне оцінювання.*

Постановка проблеми. У 2015 році в Україні було здійснено спробу впровадження дворівневої систему проведення зовнішнього незалежного оцінювання якості знань з математики (далі – ЗНО). Природність і доцільність саме такої системи проведення ЗНО з математики обґрунтовувалася нами d роботах [1] і [2]. У цих роботах нами пропонувалася власна дворівнева система проведення загальнодержавного стандартизованого оцінювання навчальних досягнень з математики українських випускників. Реалізований Українським центром оцінювання якості освіти (далі – УЦОЯО) в 2015 році варіант дворівневого ЗНО з математики відрізнявся від нашого проекту, хоч і враховував окремі його положення. На нашу думку, варіант дворівневого ЗНО з математики, що складається з тесту (сертифікаційної роботи) поглибленого рівня, який містить у собі в якості частини тест базового рівня, не є досконалим і містить певні недоліки, які варто врахувати в майбутньому, оскільки ми переконані, що саме така форма ЗНО є оптимальною для сучасних українських реалій.

Ми усвідомлюємо також, що введення дворівневого тестування з математики породжує низку методичних проблем для фахівців, які здійснюють підготовку учнів старшої школи до такого виду оцінювання. Учителям математики було досить складно забезпечити належну якість підготовки до ЗНО з математики 2015 року, оскільки рішення про введення дворівневого тесту з математики було прийнято досить несподівано. Унаслідок цього, крім демонстраційного варіанта такого тесту на сайті

УЦОЯО (www.testportal.gov.ua), практично ніякого іншого методичного забезпечення підготовки до дворівневого ЗНО не було ще за кілька місяців до проведення самого тестування.

Для порівняння, у Польщі, яка з 2015 року також ввела дворівневе оцінювання з математики, підготовча робота до цього велася, починаючи з 2012 року, коли було офіційно оголошено про такий перехід. За цей час за допомогою роз'яснювальних методичних публікацій для фахівців та публікацій у пресі для широкого загалу вдалося підготувати до переходу на дворівневе оцінювання з математики і старшокласників, і їхніх батьків, і вчителів, які готують учнів до такого виду тестування.

Другою причиною складності підготовки українських випускників до дворівневого тесту з математики 2015 року є виснажливий для більшості з них 210-хвилинний марафон, необхідний для написання поглибленого тесту. На нашу думку, напружено думати протягом такого тривалого часу здатні далеко не всі випускники. Як наслідок, стає не зовсім зрозуміло, що, власне, перевіряє такий тест: фізичну витривалість учасника тестування чи його знання, уміння, навички (компетентності)?

Наведених вище проблем можна було би уникнути, оголосивши про введення дворівневого оцінювання з математики, але відклавши його на кілька років з метою проведення детальної роз'яснювальної роботи серед розробників тестових завдань, учителів, методистів, а також майбутніх учасників дворівневого тестування та їх батьків. За ці кілька років також можна було би провести експеримент щодо різних моделей проведення такого оцінювання. Зокрема, можна було би з'ясувати, наскільки успішно учні справляються з 210-хвилинним поглибленим тестом і чи не краще поглиблений тест відокремити від основного.

Ми сподіваємося, що наведені вище недоліки введення дворівневого ЗНО з математики в подальшому будуть ураховані. Зауважимо також, що, не зважаючи на відмову від дворівневої моделі ЗНО в 2016 році, методичні публікації щодо особливостей підготовки до нього не втратили актуальності, оскільки, на наше переконання, повернення до такої моделі є лише питанням часу та набуття необхідного досвіду. Тому природно, що саме цій проблемі ми й присвятили дану роботу.

Аналіз актуальних досліджень. На сьогодні в Україні ґрунтовні дослідження, присвячені аналізу та розробці багаторівневих тестів із математики, зустрічаються нечасто. Крім уже згаданих статей [1] і [2], кількох газетних інтерв'ю, а також аналітичної доповіді [3], де згадана проблема розглядається в контексті створення та впровадження в Україні системи моніторингу якості освіти, нам не відомі вітчизняні публікації в цьому напрямі. Водночас, багаторівневе тестування з математики вже впроваджено й успішно використовується в багатьох країнах світу. Наприклад, у США поширена дворівнева система предметних тестів з математики, яка містить SAT Subject Test in Math Level 1 and SAT Subject Test in Math Level 2. Дворівнева система тестування застосовується також у Фінляндії, яка є одним із світових лідерів учнівських навчальних досягнень з математики (за даними міжнародних порівняльних досліджень PISA, TIMMS та IPMA). У Великі Британії застосовується ще більш розгалужена система тестування навчальних досягнень випускників – існує 6 рівнів тестування з математики, причому кожен із них поділяється на дві частини: А (без використання калькулятора) та В (з використанням калькулятора). Список країн, які ефективно використовують багаторівневі тести, можна продовжити, а значні результати, які демонструють ці країни під час згаданих міжнародних порівняльних досліджень, наштовхують на думку, що ігнорувати подібний досвід принаймні нераціонально.

Мета статті. Метою даної роботи є висвітлення особливостей дворівневого ЗНО з математики, зокрема, особливостей підготовки до цього оцінювання українських випускників. Також ми поділимося власним досвідом підготовки до дворівневого незалежного оцінювання: наведемо дворівневі тематичні тренувальні тести, що стосуються тем «Планіметрія» і «Стереометрія» та розв’яжемо окремі завдання цих тестів, додавши до них методичні роз’яснення та коментарі.

Методи дослідження. Для досягнення поставленої мети в роботі використано *теоретичні методи*: аналіз методичної літератури з досліджуваного питання та *емпіричні методи*: спостереження за навчальним процесом слухачів курсів по підготовці до ЗНО з математики та аналіз їхніх навчальних досягнень. У дослідженні також використано *комплекс методів наукового пізнання*: порівняльний аналіз для з’ясування різних поглядів на проблему й визначення напрямів дослідження; систематизація та узагальнення для формулювання висновків і рекомендацій щодо вдосконалення процесу підготовки до ЗНО з математики; узагальнення авторського педагогічного досвіду і спостережень.

Виклад основного матеріалу. *Особливості дворівневого ЗНО з математики.* Необхідність упровадження дворівневого ЗНО з математики, на нашу думку, зумовлена низкою причин.

1. *За традиційної однорівневої системи проведення ЗНО з математики одним тестом перевіряються навчальні досягнення випускників як загальноосвітніх шкіл та класів, так і класів із профільним та поглибленим вивченням математики*. Це веде до того, що учасники тестування з математики в Україні перебувають у нерівних умовах щодо рівня складності завдань. Дійсно, випускники класів фізико-математичного профілю мають кращий рівень математичної підготовки в порівнянні з випускниками класів гуманітарного чи суспільного спрямування, що дає їм додаткові переваги під час проходження ЗНО.

2. *За традиційної однорівневої системи проведення ЗНО з математики результатами одного й того самого тесту доводиться користуватися вишам, які потребують різного рівня та різної специфіки математичних знань у відповідності до наявних спеціальностей.* Абітурієнти спеціальностей, для яких математика є профільною дисципліною, повинні були би мати не лише глибокі знання з математики, а ще й здатність до високого рівня абстрагування і навіть до математичної творчості. А до абітурієнтів, наприклад, економічних спеціальностей настільки високі вимоги щодо рівня математичної підготовки висувати не дуже логічно, оскільки для них математика є важливим, але все-таки інструментом.

Виходячи з наведених причин, у роботі [1] ми запропонували замінити традиційний тест ЗНО на два *різних* тести: Основний (Basic) та Поглиблений (Advanced). Кожен із цих тестів орієнтований на відповідну учнівську аудиторію з одного боку та на відповідну категорію спеціальностей вищих навчальних закладів з іншого. У [1] і [2] нами детально розроблено специфікації кожного з цих тестів (загальна структура тесту, розподіл тестових завдань за змістом, формою подання, рівнем складності та когнітивним рівнем) та наведено конкретні приклади Основного та Поглибленого тестів.

У 2015 році УЦОЯО впровадило *один* дворівневий тест (сертифікаційну роботу) з математики, що містить основну частину (базовий рівень), яка виконується всіма учасниками тестування, та додаткову частину (поглиблений рівень), яка виконується лише тими учасниками тестування, які виявили таке бажання. За подібною схемою протягом останніх десяти років проводилася державна підсумкова атестація (далі – ДПА) українських випускників. Але принциповою відмінністю ДПА від ЗНО-2015 є те, що завдання тесту незалежного оцінювання не є відомими до його проведення, на відміну від завдань ДПА, які містилися в спеціальних збірниках завдань, доступних у процесі підготовки до атестації.

На нашу думку, рішення про введення дворівневого ЗНО саме в такій формі є половинчастим, оскільки не дозволяє належним чином розділити учнівську аудиторію на дві цільові групи: учнів, які бажають зробити математику сферою своєї майбутньої професійної реалізації та учнів, які бажають використовувати знання з математики більшою мірою як інструмент для своєї фахової реалізації (економістів, інженерів, програмістів тощо). Ми вважаємо, що в подальшому при введенні дворівневого тестування цей недолік буде усунуто шляхом введення двох різних тестів, завдання кожного з яких будуть орієнтовані саме на вказані цільові учнівські аудиторії.

Підготовка до ЗНО з математики, по суті, полягає в повторенні та систематизації учнями теоретичних відомостей, отриманих під час навчання в школі, а також у розв'язуванні тренувальних тестових завдань із математики тих форм, які використовуються під час незалежного оцінювання. На сьогодні в тестах ЗНО з математики використовуються завдання з альтернативами (вибір однієї правильної відповіді з 5 запропонованих), завдань із короткою відповіддю (десятковим дробом або цілим числом), завдань на встановлення відповідностей (відшукання логічних пар) та завдань відкритої форми (з повним поясненням).

Основний тест (базовий рівень сертифікаційної роботи) не містить завдань відкритої форми, а тому методика підготовки до нього майже нічим не відрізняється від методики підготовки до традиційного однорівневого тестування. Поглиблений тест (поглиблений рівень сертифікаційної роботи) додатково містить завдання відкритої форми, на які ми звернемо особливу увагу в подальшому викладі.

Завдання відкритої форми з повним поясненням, що містяться в стандартизованих тестах, тільки на перший погляд нагадують «звичайні задачі», за допомогою яких, по суті, здійснюється процес навчання математики в школі. Принциповою відмінністю тестового завдання відкритої форми від завдань, які використовує вчитель на уроках, є можливість створення для нього приблизно однакових за кількістю логічних кроків схем оцінювання. З цією метою тестові завдання відкритої форми містять в умові явні чи неявні «підказки» щодо їх розв'язування, які звужують спектр можливих способів розв'язування таких завдань. Така будова тестових завдань відкритої форми є природною, оскільки при двох різних способах розв'язування, один із яких містить, наприклад, 4 логічних кроки, а другий – 6 логічних кроків, важко виробити для них рівноцінні схеми оцінювання.

До «звичайних задач» вимога приблизно однакової кількості логічних кроків та обмеженості способів розв'язування не висувається. Навпаки, чим більше оригінальних способів розв'язування завдання запропонує учень, тим краще, оскільки те чи інше завдання з математики може використовуватися в навчальному процесі не лише з контролювальною метою, а також і з навчальною, розвивальною, виховною тощо.

Із наведених вище причин написання тестових завдань відкритої форми з повним поясненням для стандартизованих оцінювань є складнішим, ніж написання «звичайних задач» для підручників та посібників з математики. Однак із тих самих причин підготовка учнів до розв'язування таких завдань дещо спрощується, оскільки від учасників тестування здебільшого не вимагається демонстрації творчого підходу під час їх розв'язування. Іншими словами, завдання відкритої форми Поглибленого тесту найчастіше є досить складними, але не «олімпіадними», тобто їх розв'язання має бути доступним більшості сумлінних учнів із високим рівнем математичної підготовки.

Традиційно завдання з повним поясненням у тестах ЗНО стосуються тем «Рівняння та системи рівнянь», «Нерівності та системи нерівностей», «Функції та їх графіки», «Планіметрія» та «Стереометрія». При цьому під час розв'язування геометричних завдань може використовуватися векторно-координатний метод, а для розв'язування рівнянь і нерівностей можуть використовуватися перетворення виразів зі змінними та елементи математичного аналізу (дослідження на найбільше та найменше значення за допомогою похідної). Тому під час підготовки до дворівневого ЗНО з математики природно використовувати завдання відкритої форми в проміжних тематичних тестах, що стосуються всіх виділених нами в [1] і [2] десяти тем: «Числа і вирази», «Функції та їх графіки», «Рівняння та системи рівнянь», «Нерівності та системи нерівностей», «Текстові задачі», «Елементи математичного аналізу», «Планіметрія», «Стереометрія», «Координати і вектори» та «Елементи стохастики».

Ще однією особливістю дворівневого стандартизованого тестування є відбір теоретичного матеріалу, що стосується Основного та Поглибленого тестів. Спираючись на досвід колег із Польщі та інших країн, які використовують багаторівневу систему підсумкового оцінювання, природно розділити теоретичний матеріал програми ЗНО з математики на той, що стосується лише Основного тесту (базового рівня сертифікаційної роботи) і той, що стосується Поглибленого тесту (поглибленого рівня сертифікаційної роботи). Таке відокремлення теоретичного матеріалу значно спростить учителям процес підготовки, оскільки дозволить розділити учнівські аудиторії, які обрали той чи інший рівень тесту ЗНО з математики.

В офіційній документації щодо дворівневого ЗНО з математики 2015 року такого поділу не відображено, учасникам пропонується однакова програма для підготовки до тестів обох рівнів. Зважаючи на світовий досвід багаторівневих тестувань, ми вважаємо це не зовсім природним. Цей факт зумовлений лише згаданою поспішністю введення дворівневої моделі ЗНО і найближчим часом розділення теоретичного матеріалу, що стосується тестів обох рівнів, буде здійснено.

Нижче ми наводимо один із можливих дворівневих тестів, за допомогою якого можна оцінити готовність учнів до розв'язування завдань ЗНО з математики, що стосуються тем «Планіметрія» і «Стереометрія». Цей тест за будовою подібний до тесту ЗНО-2015. Він містить по 6 завдань із альтернативами, по 3 завдання з короткою відповіддю, одне з яких є структурованим (тобто містить два завдання, що стосуються однієї умови), по одному завданню на встановлення відповідностей та по одному завданню з повним поясненням із кожної з наведених тем. До поглибленого рівня відносяться 2 завдання з кожної теми: 1 завдання з короткою відповіддю і 1 завдання з повним поясненням. Завдання з альтернативами оцінюються в 1 бал кожне, завдання з короткою відповіддю – в 2 бали кожне (за структуроване завдання можна набрати 0, 1 або 2 бали), а завдання відкритої форми – в 4 бали кожне. Таким чином, за завдання тесту базового рівня учень може отримати з кожної теми 14 балів, а завдання поглибленого рівня – додатково ще 6 балів.

Виходячи з нашого досвіду, саме така кількість завдань тесту є оптимальною для абітурієнтів середнього рівня підготовки, якщо на розв'язання тесту виділяти до 90 хвилин. Даний тест можна розділити на два окремих тематичних тести тривалістю до 45 хвилин, якщо вчитель працює за традиційною урочною системою. Природним є також відокремлення учнів, які пишуть тест базового рівня від учнів, які пишуть тест поглибленого рівня. Під час складання тесту ми прагнули здійснити максимально широке «покриття», яке стосується підтем розглядуваних двох тем, а також представити в ньому «класичні» тестові завдання, характерні для тестів ЗНО з математики останніх років.

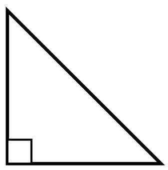
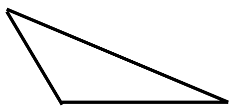
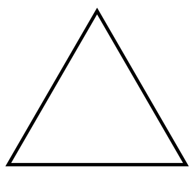
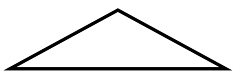
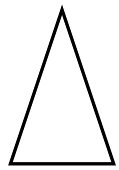
БАЗОВИЙ РІВЕНЬ

У завданнях 1-12 оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

1. Кути α і β – суміжні, причому $\beta = 4\alpha$. Знайдіть градусну міру кута α.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
72°	45°	144°	90°	36°

2. Серед зображених трикутників укажіть той, у якого центр *описаного* кола знаходиться на одній із його сторін.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
				

3. Сторона квадрата дорівнює a. Укажіть формулу, за якою обчислюється радіус кола R, описаного навколо цього квадрата.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$R = a\sqrt{2}$	$R = \frac{a}{2}$	$R = a$	$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$	$R = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

4. У деякого правильного n – кутника градусна міра внутрішнього кута більша за 140° і менша за 145°. Знайдіть n.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$

5. Довжина кола дорівнює C. Укажіть формулу, за якою обчислюється площа S круга, обмеженого цим колом.

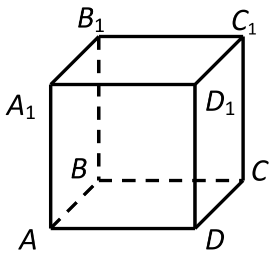
А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**

$S=\frac{C^2}{\pi}$	$S=4\pi C^2$	$S=\frac{C^2}{4\pi}$	$S=\pi C^2$	$S=\frac{\pi C^2}{4}$

6. Укажіть *хибне* твердження.

А	Діагоналі будь-якого паралелограма точкою перетину діляться навпіл
Б	Будь-які два кола можуть мати не більше однієї спільної точки
В	Сума градусних мір внутрішніх кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°
Г	Будь-які дві прямі можуть мати не більше однієї спільної точки
Д	Діагоналі будь-якого ромба перпендикулярні

7. На малюнку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть пряму, яка є мимобіжною до прямої C_1D_1.



А	Б	В	Г	Д
AB	BC	BD_1	A_1C_1	CD_1

8. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 1 см. Знайдіть синус кута γ між прямою A_1C і площиною грані $ABCD$.

А	Б	В	Г	Д
$\sin\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sin\gamma=\frac{1}{2}$	$\sin\gamma=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	$\sin\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin\gamma=\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. Площа основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює Q. Укажіть формулу, за якою обчислюється площа S бічної поверхні цієї піраміди, якщо її апофема дорівнює l.

А	Б	В	Г	Д
$S=4l\sqrt{Q}$	$S=\frac{1}{3}l\cdot Q$	$S=2l\sqrt{Q}$	$S=2l\cdot Q$	$S=\frac{1}{2}l\sqrt{Q}$

10. Квадрат зі стороною 2 см обертають навколо його діагоналі. Знайдіть об'єм V утвореного тіла обертання (у см^3).

А	Б	В	Г	Д
$V=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ см^3	$V=4\pi$ см^3	$V=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$ см^3	$V=2\pi\sqrt{2}$ см^3	$V=\frac{8}{3}\pi$ см^3

11. Навколо якого з наведених геометричних тіл *не завжди* можна *описати* кулю?

А	Б	В	Г	Д
Циліндр	Куб	Правильний тетраедр	Призма	Конус

12. Укажіть *правильне* твердження.

А	Якщо дві прямі в просторі перпендикулярні до третьої прямої, то вони паралельні між собою
Б	Якщо пряма має з площиною спільну точку, то вона належить цій площині

В	Якщо прямі a і b мимобіжні та прямі b і c мимобіжні, то прямі a і c мимобіжні
Г	Якщо прямі a і b мимобіжні та прямі b і c мимобіжні, то $a \parallel c$
Д	Якщо дві прямі перпендикулярні до однієї площини, то вони паралельні між собою

У завданнях 13–14 установіть відповідність між об’єктами 1–4 і А–Д.

13. Установіть відповідність між геометричними фігурами на площині (1–4) та формулами їх площ (А–Д).

Геометричні фігури *Формули площ*

1 Трикутник, сторона якого дорівнює πx, а висота, проведена до цієї сторони, дорівнює $2x$

2 Круг, радіус якого дорівнює $2x$

3 Прямокутник, сторони якого дорівнюють πx і $2x$

4 Ромб, діагоналі якого дорівнюють x і πx

А $4\pi x^2$

Б $2\pi x^2$

В $\frac{3}{2}\pi x^2$

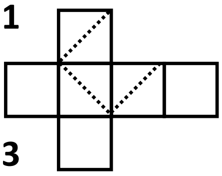
Г πx^2

Д $\frac{1}{2}\pi x^2$

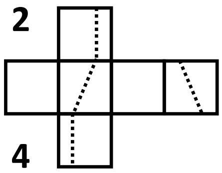
14. На розгортках куба (1–4) пунктиром позначено лінію перетину куба та деякої площини перерізу. Установіть відповідність між зображеннями перерізів на розгортках (1–4) та геометричними фігурами, якими є ці перерізи (А–Д).

Зображення перерізів *Геометричні фігури*

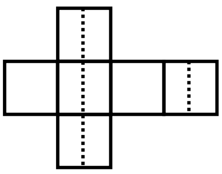
1



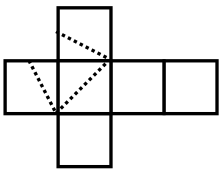
2



3



4



А Правильний трикутник

Б Квадрат

В Трикутник, який не є правильним

Г Прямокутник, який не є квадратом

Д Чотирикутник, що не є паралелограмом

У завданнях 15–20 запишіть відповідь *десятковим дробом.*

15. У рівнобічній трапеції $ABCD$ нижня основа AD дорівнює 22 см. Середня лінія LP дорівнює 15,5 см, а кут при основі дорівнює 45°.

1. Визначте довжину (у см) верхньої основи BC.
2. Визначте довжину (у см) висоти трапеції $ABCD$.

16. Дано правильний трикутник. У нього вписано коло і навколо нього описано коло. Знайдіть відношення площі круга, обмеженого вписаним колом, до площі круга, обмеженого описаним колом.

17. Основою прямої призми є прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^{\circ}$), $AC = 12$ см, $AB = 13$ см. Бічне ребро призми дорівнює найменшій стороні її основи.

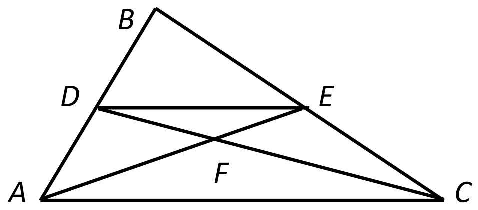
1. Знайдіть довжину (у см) висоти цієї призми.

2. Знайдіть об’єм (у см^3) цієї призми.

18. У правильній чотирикутній піраміді діагональний переріз є рівнобедреним прямокутним трикутником, площа якого дорівнює 32 см^2. Знайдіть площу основи цієї піраміди (у см^2).

ПОГЛИБЛЕНИЙ РІВЕНЬ

19. На малюнку зображено трикутник ABC, DE – його середня лінія, а F – точка перетину діагоналей чотирикутника $ADEC$. Знайдіть площу трикутника ABC (у см^2), якщо площа трикутника AFC дорівнює 12 см^2.



20. Капелюх ляльки має форму конуса, радіус основи якого дорівнює 12 см, а висота дорівнює 9 см. Маленький хлопчик під час дослідження будови ляльки розрізав капелюха по твірній конуса і отримав сектор круга. Знайдіть градусну міру центрального кута цього сектора.

Розв’язання завдань 21–22 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення всіх етапів розв’язання завдань, зробіть посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв’язання завдань рисунками, графіками тощо.

21. Трикутник ABC, сторона AB якого дорівнює 4 см і кут A дорівнює 60^o, вписано в коло радіуса $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть: а) довжину сторони BC; б) довжину середньої лінії трикутника, яка паралельна стороні AC; в) відстань між точками кола, у яких пряма, що містить середню лінію трикутника ABC, паралельну до сторони AC, перетинає коло.

22. У правильній трикутній піраміді $SABC$ кут між бічним ребром і площиною основи дорівнює β, сторона основи дорівнює a. SH – висота піраміди. З’ясуйте, якою геометричною фігурою є переріз цієї піраміди площиною, що проходить через точку H, паралельно ребрам SA і BC. Знайдіть площу цього перерізу.

Відповіді до тесту.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Д	А	Г	Г	В	Б	Б	А	В	В	Г	Д

13	14	15	16	17	18	19	20
1 – Г, 2 – А, 3 – Б, 4 – Д.	**1 – А, 2 – Г, 3 – Б, 4 – В.**	1. 9 2. 6,5	0,25	1. 5 2. 300	64	36	288

21. а) 6 см; б) $1+\sqrt{6}$ см; в) $2\sqrt{10}$ см.

22. Переріз є прямокутником, його площа $S = \dfrac{2a^2}{9\sqrt{3}\cos\beta}$.

Методичні поради щодо розв'язування окремих завдань тесту. Далі ми наведемо розв'язання та методичні коментарі для окремих завдань тесту, які здалися нам важливими під час підготовки учнів до ЗНО з математики. Основну увагу при цьому зосередимо на завданнях поглибленого рівня та структурованих завданнях із короткою відповіддю.

5. Довжина кола дорівнює C. Укажіть формулу, за якою обчислюється площа S круга, обмеженого цим колом.

А	Б	В	Г	Д
$S = \dfrac{C^2}{\pi}$	$S = 4\pi C^2$	$S = \dfrac{C^2}{4\pi}$	$S = \pi C^2$	$S = \dfrac{\pi C^2}{4}$

Розв'язання. Відомо, що $C = 2\pi R,$ а $S = \pi R^2$, де R – радіус кола і круга. Тому $R = \dfrac{C}{2\pi}$ і $S = \pi\left(\dfrac{C}{2\pi}\right)^2 = \dfrac{C^2}{4\pi}$. Отже, правильною є відповідь **В**.

<u>Коментар</u>. Трудність цього завдання зумовлена тим, що воно не містить числових даних, а отже, вимагає певного рівня абстрактного мислення. При розділенні теоретичного матеріалу на базовий і поглиблений рівень завдання такого типу природно віднести до Поглибленого тесту. Дистрактори до такого завдання підібрати непросто, оскільки важко передбачити, які саме помилки допустить учень при його виконанні. Для завдання 5 ми здійснили його апробацію на невеликій вибірці, подавши це завдання як «звичайну задачу», тобто завдання з відкритої форми з повним поясненням. Найбільш типові неправильні відповіді ми й обрали в якості дистракторів.

10. Квадрат зі стороною 2 см обертають навколо його діагоналі. Знайдіть об'єм V утвореного тіла обертання (у см^3).

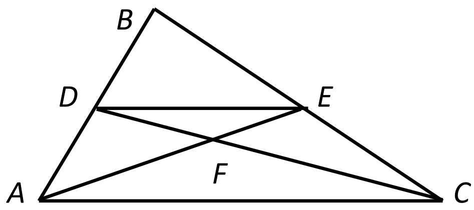
А	Б	В	Г	Д
$V = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ см^3	$V = 4\pi$ см^3	$V = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$ см^3	$V = 2\pi\sqrt{2}$ см^3	$V = \dfrac{8}{3}\pi$ см^3

Розв'язання. При обертанні квадрата навколо його діагоналі утворюється геометричне тіло, що являє собою два однакових конуси зі спільною основою. І радіус r, і висота h цього конуса дорівнює половині діагоналі квадрата. Тому $r = h = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, а шуканий об'єм $V = 2\cdot\dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{2}{3}\cdot\pi\cdot 2\cdot\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$ см^3 і правильною є відповідь **В**.

<u>Коментар</u>. Трудність цього завдання полягає в тому, що воно, крім знання відповідних формул, перевіряє ще й просторову уяву учнів. Формування просторової уяви під час вивчення стереометрії традиційно є непростим завданням. Для полегшення сприйняття умови в подібних завданнях можна або користувалися ППЗ на кшталт GRAN-3d, або ж

використовувати моделі з підручних матеріалів (паперу, пластику тощо). Підбір дистракторів до даного завдання здійснювався тим самим способом, як і в завданні 5.

19. На малюнку зображено трикутник ABC, DE – його середня лінія, а F – точка перетину діагоналей чотирикутника $ADEC$. Знайдіть площу трикутника ABC (у см^2), якщо площа трикутника AFC дорівнює 12 см^2.



Розв'язання. За властивістю середньої лінії $\frac{DE}{AC}=\frac{1}{2}$. Оскільки трикутники DEF і CAF подібні за трьома кутами, то їх площі відносяться як квадрати відповідних лінійних розмірів, тобто $\frac{S_{DEF}}{S_{CAF}}=\frac{1}{4}$, звідки $S_{DEF}=3$ см^2.

У довільному опуклому чотирикутнику $ADEC$ з діагоналями AE і DC, які перетинаються в точці F, справедлива рівність $S_{DEF}\cdot S_{CAF}=S_{DAF}\cdot S_{ECF}$. Крім того, за властивістю трапеції $S_{DAF}=S_{ECF}=S$, а тому $S^2=12\cdot 3=36$, звідки $S=6$. Отже, площа трапеції $ADEC$ дорівнює $12+3+2\cdot 6=27$ см^2.

Трикутники BDE і BAC подібні за трьома кутами. Оскільки $\frac{DE}{AC}=\frac{1}{2}$, то $\frac{S_{BDE}}{S_{BAC}}=\frac{1}{4}$, звідки $S_{ADEC}=\frac{3}{4}S_{ABC}$. Таким чином, $S_{ABC}=\frac{4}{3}\cdot 27=36$ см^2.

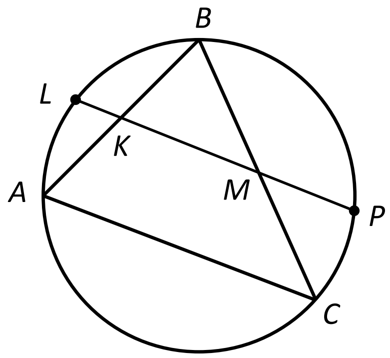
Коментар. Для учня з належним рівнем математичної підготовки ця задача не є надмірно складною, оскільки не вимагає громіздких обчислень. Однак, наш досвід показує, що далеко не всі учні під час вивчення чотирикутників у 8 класі звернули увагу на згадані в розв'язанні властивості опуклих чотирикутників та трапеції. Під час підготовки до ЗНО варто нагадати учням ці властивості, оскільки вони значно спрощують розв'язання цілого класу типових задач планіметрії.

20. Капелюх ляльки має форму конуса, радіус основи якого дорівнює 12 см, а висота дорівнює 9 см. Маленький хлопчик під час дослідження будови ляльки розрізав капелюха по твірній конуса і отримав сектор круга. Знайдіть градусну міру центрального кута цього сектора.

Розв'язання. За відомими радіусом основи r та висотою h знайдемо твірну конуса: $l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{144+81}=15$ см. При розгортанні поверхні конуса після розрізу по твірній отримаємо сектор круга, радіус якого $R=l=15$ см. При цьому довжина дуги, що обмежує сектор круга, дорівнює довжині кола основи конуса. Отже, $15\cdot\alpha=2\cdot\pi\cdot 12$, звідки $\alpha=\frac{24\pi}{15}=\frac{8\pi}{5}=\frac{8\cdot 180^{\circ}}{5}=288^{\circ}$.

Коментар. Формули довжини дуги $l_\alpha=R\cdot\alpha$ і площі сектора $S_\alpha=\frac{1}{2}R^2\cdot\alpha$, які відповідають центральному куту в α радіан технічно простіше застосовувати, ніж відповідні формули $l_\alpha = \dfrac{\pi R \cdot \alpha^{\circ}}{180^{\circ}}$ і $S_\alpha = \dfrac{\pi R^2 \cdot \alpha^{\circ}}{360^{\circ}}$, де центральний кут α вимірюється в градусах. Однак, наш досвід показує, що перші формули менш відомі учням, ніж другі. Цей факт зумовлений тим, що в шкільному курсі математики радіанна міра кута вивчається пізніше, ніж формули довжини дуги та площі сектора. З цієї причини вчителі при вивченні кола і круга та його частин дають громіздкі формули з градусною мірою. Після вивчення радіанної міри кута природно було би дати учням більш прості формули довжини дуги і площі сектора, але далеко не всі вчителі це роблять. Тому ми вважаємо, що під час підготовки до ЗНО з математики варто акцентувати увагу і на цьому моменті.

21. Трикутник ABC, сторона AB якого дорівнює 4 см і кут A дорівнює 60°, вписано в коло радіуса $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть: а) довжину сторони BC; б) довжину середньої лінії трикутника, яка паралельна стороні AC; в) відстань між точками кола, у яких пряма, що містить середню лінію трикутника ABC, паралельну до сторони AC, перетинає коло.



Розв'язання. Нехай на малюнку зображено даний трикутник ABC, KM – його середня лінія, LP – хорда кола, описаного навколо ABC, яка містить середню лінію KM.

а) Щоб знайти сторону BC, скористаємося теоремою синусів, за якою $\dfrac{BC}{\sin\angle A} = 2R$, де R – радіус описаного кола. Отже, $BC = 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sin 60^{\circ} = 6$ см.

б) Оскільки KM – середня лінія $\triangle ABC$, то $BM = \dfrac{1}{2}BC = 3$ см, $BK = \dfrac{1}{2}AB = 2$ см і $KM \parallel AC$. Тому $\angle BKM = \angle A = 60^{\circ}$ як відповідні кути при двох паралельних прямих KM і AC та січній AB. За теоремою косинусів із трикутника BKM: $3^2 = 2^2 + KM^2 - 2\cdot 2\cdot KM\cdot\cos 60^{\circ}$, звідки маємо рівняння $KM^2 - 2KM - 5 = 0$. Отже, $KM = \dfrac{2+\sqrt{4+20}}{2} = 1+\sqrt{6}$ см.

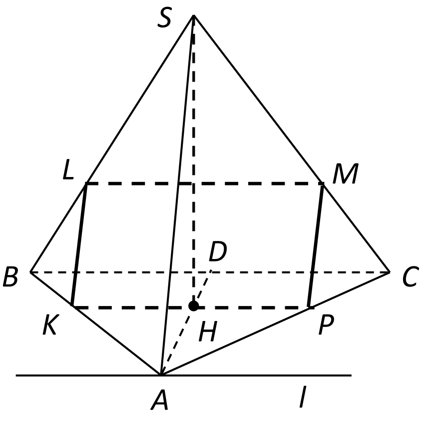
в) Позначимо $LK = a$, $MP = b$. За властивістю хорд кола $LK\cdot KP = AK\cdot KB$ і $LM\cdot MP = BM\cdot MC$, звідки $\begin{cases} a\cdot(1+\sqrt{6}+b) = 4, \\ (a+1+\sqrt{6})\cdot b = 9. \end{cases}$ Розв'яжемо цю систему рівнянь: $\begin{cases} ab = 4 - a(1+\sqrt{6}), \\ ab = 9 - b(1+\sqrt{6}), \end{cases}$ а отже, $b - a = \dfrac{5}{1+\sqrt{6}} = \sqrt{6}-1$, тобто $b = a+\sqrt{6}-1$. Після підстановки b у перше рівняння системи маємо: $a(a+\sqrt{6}-1) + a(1+\sqrt{6}) - 4 = 0$, $a^2 + 2a\sqrt{6} - 4 = 0$, $a = -\sqrt{6}+\sqrt{10}$. Тоді

$b=-\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{6}-1=\sqrt{10}-1$. У підсумку $LP=a+KM+b=$ $=-\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{6}+1+\sqrt{10}-1=2\sqrt{10}$ см.

Коментар. Схема оцінювання до цього завдання є такою. Якщо учень правильно знайшов сторону BC, то він отримує 1 бал. Якщо учень правильно знайшов середню лінію KM, то він отримує ще 1 бал. Якщо учень правильно склав систему рівнянь для знаходження a і b, то він отримує ще 1 бал. Якщо учень правильно знайшов довжину LP, то він отримує ще 1 бал. Таким чином, за повне і правильне розв'язання завдання 21 учень може отримати 4 бали.

При аналізі цього завдання з учнями слід наголосити, що під час оцінювання бали нараховуються не лише за отримання правильної відповіді на кожному етапі, а й за обґрунтування всіх етапів розв'язання. Наприклад, якщо учень для пункту б) не обґрунтує, чому саме $\angle BKM=60^{\circ}$ і не пошлеться на теорему косинусів, то бал йому не буде зараховано навіть за умови отримання правильного значення для довжини KM.

Зауважимо, що пункт б) має альтернативне розв'язання: можна спочатку з трикутника ABC знайти довжину сторони AC, а потім використати властивість середньої лінії. Даний спосіб є рівноцінним до авторського, оскільки також використовує теорему косинусів. При цьому способі розв'язання для отримання балу обов'язковим є посилання на властивість середньої лінії та теорему косинусів.



22. У правильній трикутній піраміді $SABC$ кут між бічним ребром і площиною основи дорівнює β, сторона основи дорівнює a. SH – висота піраміди. З'ясуйте, якою геометричною фігурою є переріз цієї піраміди площиною, що проходить через точку H, паралельно ребрам SA і BC. Знайдіть площу цього перерізу.

Розв'язання. Нехай на малюнку зображено дану піраміду. Проведемо через точку H пряму, паралельну до сторони BC основи піраміди. Ця пряма перетне сторони основи AB і AC у точках K і P відповідно. Через точки K і P в площинах граней ABS і ACS відповідно проведемо прямі, паралельні до ребра SA. Нехай ці прямі перетинають ребра SB і SC у точках L і M відповідно. Чотирикутник $KLMP$ є шуканим перерізом, оскільки його площина паралельна до ребер SA і BC за ознакою паралельності прямої і площини.

Оскільки трикутники AKP і ABC подібні за трьома кутами, а піраміда є правильною, то $AK=AP$ і $BK=PC$. Із правильності піраміди також слідує, що $\angle BKL=\angle CPM$, $\angle LBK=\angle MCP$. Отже, $\triangle LBK=\triangle MCP$ за другою ознакою рівності трикутників. Тоді $LK=MP$ і за ознакою паралелограма чотирикутник $KLMP$ є паралелограмом. Проведемо в площині основи піраміди через точку A пряму l, паралельну до прямої KP. Із правильності піраміди слідує, що $AH \perp KP$, а тому $AH \perp l$. За теоремою про три перпендикуляри $SA \perp l$. Оскільки $LK \parallel SA$ за побудовою, то $LK \perp KP$ і шуканий переріз є прямокутником.

Знайдемо площу перерізу. Відрізок AH є радіусом кола, описаного навколо основи піраміди, а відрізок DH – радіусом кола, вписаного в цю основу. Тоді $AH = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $DH = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ і $AH : DH = 2:1$, $AH : AD = 2:3$, звідки $AK = KP = \frac{2}{3} BC = \frac{2}{3} a$. Трикутники KBL і ABS подібні за трьома кутами, причому $\frac{LK}{SA} = \frac{BK}{BA} = \frac{1}{3}$. Кут між бічним ребром і площиною основи піраміди $\angle SAH = \beta$. Із прямокутного трикутника ASH із прямим кутом H маємо: $SA = \frac{AH}{\cos\beta} = \frac{a}{\sqrt{3} \cdot \cos\beta}$. Тому $LK = \frac{1}{3} SA = \frac{a}{3\sqrt{3}\cos\beta}$. Отже, шукана площа перерізу $S_{KLMP} = LK \cdot KP = \frac{2a^2}{9\sqrt{3}\cos\beta}$.

Коментар. Схема оцінювання до цього завдання є такою. Якщо учень правильно вказав і обґрунтував алгоритм побудови перерізу, то він отримує 1 бал. Якщо учень показав, що побудований переріз є паралелограмом, то він отримує ще 1 бал. Якщо учень показав, що побудований переріз є прямокутником, то він отримує ще 1 бал. Якщо учень правильно знайшов площу перерізу, то він отримує ще 1 бал. Таким чином, за повне і правильне розв’язання завдання 22 учень може отримати 4 бали.

Зауважимо, що в цьому завданні найбільш важливим елементом розв’язання є саме обґрунтування способу побудови перерізу та його форми. Після доведення того, що цей переріз є прямокутником, обчислювальне завдання для учнів з належним рівнем математичної підготовки здебільшого проблем не складає. За 4 роки відсутності в тестах ЗНО з математики завдань із повним поясненням багато вчителів почали приділяти значно менше уваги навчанню учнів належному оформленню розв’язання таких завдань.

Завдання 22 може мати і альтернативні розв’язання. Зокрема, для доведення того, що шуканий переріз є прямокутником, може бути використана симетрія правильної піраміди відносно площини, що проходить через її висоту і одну з вершин основи. Учень може також використати й векторно-координатний метод розв’язання, про який детальніше йтиметься в наступних публікаціях. Однак, зміна способу розв’язання кожного конкретного кроку в даному завданні не призводить до принципових відмінностей в оцінюванні завдання, що говорить про його належну якість.

Висновки перспективи подальших наукових розвідок. Спроба введення в Україні в 2015 році дворівневої моделі проведення ЗНО з математики спричинило низку проблем, що стосуються як методики створення тестових завдань, так і методики підготовки українських випускників до цього виду тестування. Ми вважаємо реалізований у 2015 році варіант дворівневого незалежного оцінювання проміжним і, спираючись на світовий досвід, переконані в необхідності введення двох різних тестів – Основного і Поглибленого – замість пропонованого УЦОЯО одного дворівневого тесту, у якому тест базового рівня є частиною тесту поглибленого рівня.

Проте на сучасному проміжному етапі, одночасно з критикою чинної системи, природним є усвідомлення особливостей як самого дворівневого тестування, так і підготовки до нього учнів старшої школи. Найбільш принциповою особливістю ми вважаємо наявність у тесті поглибленого рівня завдань відкритої форми з повним поясненням, методика підготовки до розв’язання яких відрізняється від методики підготовки до розв’язування традиційних завдань із повним поясненням. Ця відмінність проявляється в тому, що завдання з повним поясненням стандартизованих тестів в умові містять явні чи неявні вказівки, які дозволяють звузити кількість способів розв’язання і тим самим полегшити створення рівноцінних схем оцінювання для таких завдань.

Ми розуміємо, що будь-яка система підготовки потребує постійної корекції та модернізації, а тому будемо раді конструктивним зауваженням з боку фахівців та плідній дискусії в даному напрямі. Усі зауваження та пропозиції щодо тематики цієї статті можна надсилати на електронну пошту автора shkolnyi@ukr.net.

ЛІТЕРАТУРА

1. Захарійченко Ю. О. Проект концепції проведення в Україні зовнішнього незалежного оцінювання з математики / Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний // Вісник ТІМО. – 2009. – № 9. – С. 29–43.

2. Школьний О. В. Про дворівневу модель проведення ЗНО з математики в Україні / О. В. Школьний, Ю. О. Захарійченко // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки : реалії та перспективи. – Вип. 43 : збірник наукових праць. – К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. – С. 237–245.

3. Аналітична доповідь про стан моніторингу якості освіти в Україні / МБО «Центр тестових технологій і моніторингу якості освіти» ; за ред. І. Л. Лікарчука. – К. : МБО «Центр тестових технологій і моніторингу якості освіти» ; Х. : Факт, 2011. – 96 с.

РЕЗЮМЕ

Школьный А. В. Об особенностях подготовки к двухуровневому ВНО по математике.

В работе рассмотрены особенности двухуровневого внешнего независимого оценивания качества знаний по математике по сравнению с традиционной одноуровневой системой общегосударственного стандартизированного оценивания, приведены методические рекомендации по подготовке учащихся к данному виду тестирования, касающиеся тем «Планиметрия» и «Стереометрия». В *частности, в данной статье нами рассмотрены примеры решения конкретных структурированных тестовых заданий с коротким ответом и тестовых заданий с полным объяснением, относящихся к двум указанным темам. На примере этих заданий и решений к ним мы демонстрируем основные подходы к обеспечению качества таких заданий, а также некоторые методические тонкости, позволяющие учителям повысить качество подготовки учеников старшей школы к внешнему независимому оцениванию по математике. Кроме того, приведенный в статье двухуровневый тематический тест может использоваться как вспомогательное средство для подготовки к ВНО по математике.*

***Ключевые слова**: двухуровневое оценивание учебных достижений по математике, общегосударственное стандартизированное оценивание, ученики старшей школы, государственная итоговая аттестация, внешнее независимое оценивание.*

SUMMARY

Shkolnyi O. On the peculiarities of two-level independent external assessment of quality of knowledge in mathematics.

In 2015 Ukraine has attempted introduction of two-level system of external assessment of quality of knowledge in mathematics. The naturalness and usefulness of such system of testing in math was based in our series of publications in scientific pedagogical literature. In these works we proposed two-level system of standardized national assessment of educational progress in mathematics for Ukrainian pupils. Implemented by the Ukrainian Center for Educational Quality Assessment in 2015 two-level test in mathematics is different from our project, although some of our suggestions were taken into account. We believe that the option of two-level testing in math, consisting of test advanced level, which includes as part basic level is not perfect and has some shortcomings that should be removed in the future.

We are aware that the introduction of a two-level math test raises a number of methodological issues for professionals who prepare pupils for this type of assessment. It was very difficult for Mathematics teacher to provide adequate quality of math testing in 2015, since the decision to impose of two-level math test was made quite suddenly. The second reason for the complexity of training of Ukrainian pupils for two-level math test 2015 is tedious for most of them the 210-minute marathon, you need to write in-depth test. In our view, not all pupils are capable to thinking in the situation of stress for so long. As a result, it is not clear what actually checks realized test: physical endurance of the test participant or his knowledge, skills (competencies)?

We hope that the above mentioned disadvantages of introducing two-level math testing will continue to be taken into account. It is also noted that, despite the rejection of the two-level model of testing in 2016, methodological publications on the specifics of preparation have not lost relevance because, in our opinion, returning to such model is only a matter of time and valuable experience.

In this paper we consider the features of two-level independent external assessment of quality of knowledge in math compared with traditional one-tier system of national standardized test and put methodological recommendations for preparing pupils for this type of testing related to topics «Plane geometry» and «Space geometry».

***Key words**: two-level math achievements assessment, national standardized outcome assessment, senior school pupils, state final attestation, independent external assessment.*