*На допомогу вчителю*

УДК 378.011

**С. О. Панова,**
кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики та методики навчання математики Бердянського державного педагогічного університету

# Математичні знання Стародавньої Греції

## *Методична розробка*


*Викладено авторську методичну розробку плану-конспекту лекції з описом усіх етапів роботи на занятті. Подано деякі методичні рекомендації щодо розробки завдань для самостійної та індивідуальної роботи студентів під час підготовки до практичного заняття.*

***Ключові слова:*** *математика, історія математики, план-конспект лекції, методична розробка, фахова підготовка майбутніх учителів математики.*

**Panova S. O. Mathematical Knowledge of Ancient Greece.**

*The author's methodical elaboration of the summary of lecture describes all stages of work in the class. Some methodical recommendations for the development of tasks for independent and individual work of students during preparation for a practical lesson are given.*

***Key words:*** *mathematics, history of mathematics, summary of lecture, methodical development, professional preparation of future teachers of mathematics.*

**Постановка проблеми.** Поліпшення підготовки вчителів математики є однією з ідей реформування освіти в Україні. Разом з тим, підготовка фахово компетентних спеціалістів не може здійснюватися без якісного методичного забезпечення навчальних дисциплін. Поряд із навчальною, науковою та організаційною роботою викладач педагогічного ВНЗ виконує і методичну. Таке індивідуальне навантаження потребує багато часу та уваги. Це не завжди якісно відбивається на розробці методичного забезпечення для навчальних курсів із програми підготовки майбутніх учителів математики.

Одним із обов'язкових предметів програми підготовки здобувачів першого рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика) є «Історія математики». Існує декілька навчальних посібників, які висвітлюють історію розвитку математики як науки (В. Бевз, Л. Вивальнюк, М. Ігнатенко та інші). Це достатньо ґрунтовні праці, на які необхідно спиратися при виконанні методичної роботи викладачам курсу. Разом з тим вважаємо, що питання методичного забезпечення цієї навчальної дисципліни недостатньо розроблене.

**Виклад основного матеріалу.** Лекційне заняття передбачає проходження декількох етапів. Першим є організаційний момент, який може тривати 2–3 хвилини. Він включає: вітання зі студентами; формулювання мети і завдання лекції; повідомлення про те, яких саме знань, умінь та навичок повинен набути студент після опрацювання лекції, практичних занять і самостійної роботи; на яку кількість балів студент може розраховувати в межах кредитно-трансферної системи оцінювання знань.

Другий етап – вступна частина (5–6 хвилин):

– короткий пролог, у якому акцентується увага на розв'язанні проблеми, яка буде предметом лекції;

– наводиться приклад (ситуація), яким підкреслюється значущість проблеми, виходячи із практичної діяльності, досягнень науки, світового досвіду;

– оголошення теми і плану лекції;

– її роль у навчальній дисципліні, в професії, бюджет часу на її розгляд;

– зв'язок теми з попередньою і наступними, з практичними заняттями;

– розподіл знань, умінь і навичок, які студент повинен набути на лекції, на практичному занятті, під час самостійної роботи;

– характеристика літератури, рекомендованої до теми, враховуючи, що її перелік студент має у відповідній методичній розробці (тематика і плани практичних занять і СРС, роздруковані та розміщені в електронній бібліотеці).

Найважливішим етапом є виклад основної частини. Він може тривати від 1 години до 1 години 10 хвилин. Початок основної частини лекції тісно поєднано зі вступною, де викладається основний матеріал змістового модуля за допомогою мультимедійної презентації.

Подаємо навчальний матеріал лекції з методичними коментарями.

*План*

1. Загальна характеристика математичних знань античної цивілізації.
2. Натурфілософська математична школа Фалеса.
3. Піфагорійський союз.

Мета лекційного заняття: сформувати уявлення у студентів щодо розвитку елементарної математики в Стародавній Греції; сформувати здатність аналізувати, узагальнювати та критично оцінювати історико-математичні надбання й біографічні відомості цього періоду.

**1. Загальна характеристика математичних знань античної цивілізації.**

Грецькі математики жили в містах, розташованих по всьому Східному Середземномор'ї від Італії до Північної Африки, але були об'єднані культурою і мовою. Антична математика ділиться на декілька періодів: класичний період перших математичних теорій (VI–V ст. до н. е.); елліністичний (IV–I ст. до н. е.); занепад античної цивілізації. Оскільки греки поширювали свою сферу впливу на Малу Азію, Месопотамію тощо, то прийняли та пристосували корисні деталі з інших суспільств. Від вавилонян і єгиптян вони перейняли елементи математики. Але незабаром почали робити власні важливі внески у розвиток математики як науки. В елліністичний період греки здійснили одну з найбільш важливих революцій у математичній думці всіх часів.

***1.1. Античні системи числення (аттична, іонійська, римська).***

У Стародавній Греції до римського завоювання існували дві системи числення: одна – ієрогліфічна, інша – алфавітна. Ієрогліфічна система давніша, виникла в Аттиці й поширилася по всій Греції. Тому історики називають її аттичною. Після того як Рим почав завойовувати грецьку цивілізацію, почала поширюватися римська система числення.

*Аттична система* (найдавніший запис відноситься до VI ст. до н. е.) – непозиційна система числення, яка використовувалася у Греції до III ст. до н. е. (табл. 1).

*Таблиця 1*

**Аттична система числення**

| *Значення в арабській системі* | *Знак в аттичній системі* | *Назва в аттичній системі* |
|---|---|---|
| 1 | I | ἴος «іос» |
| 5 | Г | Πέντε «пенте» |
| 10 | Δ | δέκα «дека» |
| 100 | H | ἑκατόν «гекатон» |
| 1000 | X | Χίλιοι «хіліоі» |
| 10 000 | M | μύριοι «міриоі» |

Ця система використовує акрофонічні цифри, тобто як цифри застосовуються перші літери слів, що позначають назву цифри грецькою мовою (наприклад «Р» або «Г» – грец. Πέντε, «пенте» – цифра 5). Після III ст. до н. е. аттична система числення була витіснена іонійською.

Вузлові числа зображено на рис. 1.

| Δ | 𐅄 | H | 𐅅 | X | 𐅆 | M | 𐅇 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 | 5000 | 10 000 | 50 000 |

***Рисунок 1***

Вживалися також додаткові цифри для позначення чисел 50, 500, 5000 і 50 000, які являли собою сполучення цифри 5 із цифрами 10, 100, 1000, 10 000.

Операції над числами в цій системі мало чим відрізнялися від операцій, прийнятих у Єгипті.

Алгоритмічні числа складалися з вузлових за адитивним принципом. При запису чисел спочатку нотували більші, потім – менші. Наприклад: 128 – HΔΔГIII

*Іонійська система* числення – непозиційна, адитивна, яка використовує для представлення чисел літери грецької абетки.

У сучасній Греції вони використовуються і нині для позначення порядкових числівників, подібно до застосування римських цифр – системи, популярної на Заході, де для позначення кількісних числівників використовуються арабські цифри.

Нова алфавітна система числення виникла в торгових грецьких колоніях іонійського узбережжя, тому її називають іонійською. Найдавніший запис, зроблений в ній, відноситься до середини V ст. до н. е. У цій системі всі числа від 1 до 999 записувалися за допомогою 27 букв грецького алфавіту (рис. 2). Для того, щоб відрізняти числа від слів, над ними ставили або риску, або в кінці штрих.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{\alpha}$ | $\overline{\beta}$ | $\overline{\gamma}$ | $\overline{\delta}$ | $\overline{\varepsilon}$ | $\overline{\varsigma}$* | $\overline{\zeta}$ | $\overline{\eta}$ | $\overline{\theta}$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $\overline{\iota}$ | $\overline{\kappa}$ | $\overline{\lambda}$ | $\overline{\mu}$ | $\overline{\nu}$ | $\overline{\xi}$ | $\overline{o}$ | $\overline{\pi}$ | $\overline{q}$* |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| $\overline{\rho}$ | $\overline{\sigma}$ | $\overline{\tau}$ | $\overline{\upsilon}$ | $\overline{\varphi}$ | $\overline{\chi}$ | $\overline{\phi}$ | $\overline{\varpi}$ | ϡ* |
| 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |

***Рисунок 2*** [3, с. 48]

Запис числа здійснювався за адитивним принципом.

Нова система числення стала важливим кроком на шляху створення сучасної універсальної нумерації. Вона була добре пристосована до оперування з не дуже великими числами і цілком відповідала господарським запитам того часу.

Наприклад, порівняймо записи числа 128 в аттичній та іонійській системах числення:

| *Запис в аттичній нумерації* | *Запис в іонійській нумерації* |
|---|---|
| HΔΔГIII | $\overline{\rho\kappa\eta}$ |

Згодом необхідність записувати в цій системі числа більше тисячі привели до позначень, які можна розглядати як зачатки позиційної системи. Так, для позначення тисячі стали застосовувати ту ж букву, що і для позначення одиниці: $\alpha$, але позначали її рискою зліва внизу ${}_{/}\alpha$.

*Римська система* числення, або римські цифри, – непозиційна система числення, що використовувалися стародавніми римлянами. Запозичена в етрусків. У ній збереглися сліди п'ятиричної системи числення. Але вона не давала можливості легко здійснювати арифметичні операції, тому тепер використовується для запису строго зафіксованих чисел (дати, глави, цифри на циферблаті та ін.).

Ця система базується на використанні особливих знаків (літер латинської абетки) для десяткових розрядів: I = 1, X = 10, C = 100, M = 1000 та їх половин: V = 5, L = 50, D = 500. Натуральні числа записуються за допомогою повторення цих цифр. Якщо більша цифра стоїть перед меншою, то вони додаються (принцип додавання), якщо ж менша перед більшою, то менша віднімається від більшої (принцип віднімання). Останнє правило застосовується тільки для уникнення чотириразового повторення однієї цифри. Наприклад, I, X, C ставляться відповідно перед X, C, M для позначення 9, 90, 900 або перед V, L, D для позначення 4, 40, 400: VI = 5+1 = 6, IV = 5 − 1 = 4 (замість IIII). XIX = 10 + 10 − 1 = 19 (замість XVIIII), XL = 50 − 10 = 40 (замість XXXX), XXXIII = 10 + 10 + 10 + + 1 + 1 + 1 = 33 тощо.

Методичний коментар. Запис чисел в античних системах числення треба розглядати більш детально на практичних заняттях. З метою активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів приклади переведення з однієї нумерації в іншу видаються як завдання для підготовки до практичного заняття. Такий підхід організовує самостійну роботу студентів та дає можливість виявити тих, хто не встигає у навчанні.

***1.2. Арифметичні дії та система дробів в античній цивілізації*** [3, с. 48–50].

Вчені припускають, що схема додавання у греків була та ж, що і в нас.

Множення багатозначних чисел виконували за допомогою розподільного закону – «грецьке множення» (рис. 3) [3, с. 48–49].

Наприклад:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sigma\xi\varepsilon'$ | 2 6 5 | | |
| $\sigma\xi\varepsilon'$ | 2 6 5 | | |
| $\overset{\delta}{\mathrm{M}}\,\overset{\alpha}{\mathrm{M}}\,{}_{/}\beta\,{}_{/}\alpha'$ | 40000 | 12000 | 1000 |
| $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}\,{}_{/}\beta\,{}_{/}\gamma\,\chi\,\tau'$ | | 12000 3600 | 300 |
| ${}_{/}\alpha\,\tau\,\kappa\,\varepsilon'$ | | 1000 300 | 25 |
| $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}\,\sigma\,\kappa\,\varepsilon'$ | | 70225 | |

***Рисунок 3*** [3, с. 49].

Для виконання такого множення необхідні спеціальні таблиці, що містять добуток «однозначних» (в іонійській нумерації) чисел на «однозначні» множники. Ці таблиці повинні були бути дуже великими. Адже в них 1 повинна фігурувати 37 разів, 2–36 разів і т. д.

Поряд із «грецьким множенням» було в ходу «єгипетське множення» – за допомогою послідовного подвоєння і складання, з яким ми вже ознайомилися, вивчаючи математику Стародавнього Єгипту.

Як проводилося в Давній Греції ділення, нам невідомо. Оскільки письмові обчислення були складні, а папірус дорогий, то використовували абак (лічильну дошку) і рахункові камінці.

Три системи канонічного подання дробів [3, с. 48–49].

1. Система аліквотних дробів – дуже схожа на ту, яка існувала в Стародавньому Єгипті, тому історики називають її єгипетською. З 540 по 450 рр. до н. е. вона набула поширення серед грецьких купців, ремісників і художників.

2. Система «звичайних дробів» (450–250 рр. до н. е.), в якій вони не мали загальноприйнятого письмового вираження. По суті, не відрізнялася від нашої системи, тільки чисельник писали знизу, а знаменник зверху. Дробової риски між ними не було (рис. 4.1 та 4.2) [3, с. 49].

$$\frac{5358}{10201}$$

***Рисунок 4.1***

$$\begin{array}{c}\alpha\cdot\beta\alpha' \\ {}_{/}\varepsilon\tau\nu\eta\end{array}$$

***Рисунок 4.2***

Арифметичні дії з ними не описано в жодному з математичних джерел. Скоріш за все, вони не відрізняються від сучасних.

3. Система дробів на основі запозиченої у вавилонян системи шістдесятичних дробів. У ній грецькі математики замінили клинописні символи буквами свого алфавіту відповідно до прийнятої у них системою числення (рис. 5.1 та 5.2) [3, с. 49].

$$\overline{\lambda\zeta}\,\delta'\nu\varepsilon''$$

***Рисунок 5.1***

$$37+\frac{4}{60}+\frac{55}{3600}$$

***Рисунок 5.2***

Ця система вважається більш досконалою, але вона використовувалась тільки для наукових досліджень.

Таким чином, у сенсі обчислювальної техніки греки мали хорошу базу для розвитку абстрактної математичної теорії.

Методичний коментар. На практичному занятті докладніше розбирається питання арифметичних дій над натуральними та дробовими числами. Розв'язуються історичні задачі.

*Натурфілософська школа Фалеса* (іонійська) – перша давньогрецька філософська школа, заснована Фалесом у Мілеті, одному з міст Іонії, у першій половині VI ст. до н. е.

Основні напрямки роботи: емпіричне дослідження різних явищ у природі («Земля – це плоске тіло, що плаває у воді»), питання астрономії (побудова світу), геометрія, задачі на побудову.

Школі Фалеса приписують формулювання основного означення арифметики: число є сукупність одиниць [1, с. 46].

Представники: Фалес, Анаксимандр й Анаксимен.

Фале́с Міле́тський (прибл. 624–548 рр. до н. е.) – давньогрецький філософ досократського періоду, математик, астроном, засновник іонійської школи натурфілософії, купець і політичний діяч. Фалес був першим давньогрецьким філософом і математиком, тому вважається першим носієм наукової думки в історії [4, с. 176].

У своїй творчості поєднував питання практики з теоретичними проблемами, що стосувалися проблем Всесвіту. Усі натурфілософські пізнання Фалес використовував для створення завершеного філософського вчення. Так, він вважав, що все існуюче – породжене водою. Вода – це джерело, з якого все постійно виникає. При цьому вода й усе, що з неї виникло, не є мертвими, вони живі. Як приклад Фалес згадував магніт і бурштин: вони породжують рух, отже, мають душу.

Він передбачив сонячне затемнення (28 травня 585 р. до н. е.). Йому належить заслуга у визначенні часу сонцестояння і рівнодення, у встановленні тривалості року в 365 днів, відкриття руху Сонця відносно зірок. У наш час іменем Фалеса названо кратер на видимій стороні Місяця.

Фалес також має великі заслуги у створенні наукової математики. У нього вперше в історії математики зустрічаються доведення теорем. Нині відомо, що багато математичних правил було відкрито набагато раніше, ніж у Стародавній Греції, але усі – дослідним шляхом. Строго логічне доведення правильності тверджень на підставі загальних положень, прийнятих за достовірні істини, було винайдено греками. Характерна і зовсім нова риса грецької математики полягає в поступовому переході за допомогою доведення від одного твердження до іншого. Саме такий характер був наданий математиці Фалесом. І навіть сьогодні, розпочинаючи доведення, наприклад, теореми про властивості ромба, ми, по суті, міркуємо майже так само, як це робили учні Фалеса.

Вважається, що Фалес першим ознайомив греків з геометрією. Йому приписують відкриття і доведення ряду теорем: про поділ кола діаметром навпіл; про те, що кут, вписаний у півколо, є прямим (теорема Фалеса про три точки на колі); про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника; про рівність вертикальних кутів; про пропорційність відрізків, утворених на прямих, що перетинаються декількома паралельними прямими (теорема Фалеса – пропорційні відрізки). Фалес установив, що трикутник повністю визначається стороною і прилеглими до неї кутами.

Фалес відкрив цікавий спосіб визначення відстані від берега до видимого корабля. Деякі історики стверджують, що для цього він використав ознаку подібності прямокутних трикутників. Фалесу приписують також спосіб визначення висоти різних предметів, зокрема пірамід, за довжиною тіні, коли Сонце піднімається над горизонтом на 45 градусів.

Усі ці досягнення принесли Фалесові славу першого мудреця серед знаменитих «семи мудреців» далекого минулого.

Іонійська школа припинила існувати після завоювання персами м. Мілет (495 р. до н. е.).

Представниками школи Фалеса були Анаксимандр й Анаксимен.

*Піфагорійський союз* (VI ст. до н. е. – ?) – наукова школа, схожа на таємне об'єднання, заснована Піфагором.

Основні напрямки роботи: теоретична арифметика (основи теорії чисел), астрономія, теоретична геометрія, теорія музики (гармонія).

Основний зміст математики піфагорійців: «усе є число» [2, с. 42]; Бог – це єдність; світ – множина, яка складається з протилежностей; «сутність речей та їх природа є число, яке вносить у різноманітність єдність і гармонію» [3, с. 54].

Піфагорійцям приписують виникнення аксіоматичного методу побудови науки (перші аксіоми геометрії) [2, с. 45–46]. Вивчали арифметичну, геометричну та «гармонійну» пропорції [1, с. 50–51].

Піфагорійці заклали основи теорії чисел. Вважали, що 1 (монада) – мати всіх чисел; тетрада 1, 2, 3, 4 – свята четвериця, першооснова усього (вогонь, земля, вода, повітря); 10 – досконале число (1+2+3+4=10). Таке трактування призвело до містифікації їхнього вчення, але це сприяло й створенню вчення про парність та непарність чисел. Усі числа натурального ряду розділяли на парні (чоловічі) та непарні (жіночі) – гномони.

Число називали досконалим, якщо сума всіх його дільників, за винятком самого числа, дорівнює самому числу (наприклад: 6 є досконалим, оскільки 1+2+3=6). Дружніми називають числа, у яких сума дільників кожного з них дорівнює другому (наприклад: 220 та 284).

Розробили: теорію фігурних чисел, учення про правила дій над числами (таблиця Піфагора) [3, с. 55; 2, с. 42–45]. Дослідили розв'язок невизначеного рівняння у натуральних числах – задача Піфагора (x, y, z – піфагорова трійка). Розробили концепцію теоретичної (арифметичної) геометрії, як наслідок поступово розвивалася геометрична алгебра без символічних позначень (приклад: виведення формул скороченого множення) [1, с. 54].

У школі Піфагора були вперше побудовані правильні п'ятикутники, а за ними – правильні многокутники, а потім – правильні многогранники, які ми називаємо платоновими тілами (тетраедр – вогонь; октаедр – повітря; гексаедр – земля; ікосаедр – вода; додекаедр – усесвіт). Піфагор вважав, що Земля має форму кулі як найпрекраснішої фігури [1, с. 56].

Піфагорійці знали теорему про рівність трикутників, вчення про паралельні, подібність, суму кутів трикутника; володіли методом побудови рівновеликих фігур та основними положеннями стереометрії; доводили теорему Піфагора.

Занепад школи Піфагора настав тоді, коли вони підійшли до несумірності відрізків (поняття ірраціонального числа).

Методичний коментар. Робота над біографіями вчених є одним із завдань для самостійної роботи під час підготовки до практичного завдання. Вважаємо, що доцільно давати майбутнім учителям математики такі завдання для індивідуальної роботи як підготовка цікавого матеріалу (легенди, факти тощо) про видатних математиків Стародавньої Греції та їх наукових праць.

Останнім етапом заняття є заключна частина (5–6 хвилин). Викладач робить коротке резюме матеріалу лекції; запрошує сформулювати питання, які виникли; звертається увага на завдання для підготовки до практичного заняття.

Отже, нами поетапно викладено план-конспект одного з лекційних занять курсу «Історія математики», що може бути використаний не тільки викладачами та студентами педагогічних ВНЗ, але й учителями загальноосвітніх навчальних закладів для підготовки до позакласної роботи з математики.

**Література**

1. Болгарский Б. В. Очерк по истории математики. Минск: Вышэйшая шк., 1979. 368 с.
2. Гильмуллин М. Ф. История математики: учеб. пособие. Елабуга: Изд-во ЕГПУ, 2009. 212 с.
3. Майер Р. А. История математики: курс лекций. Часть 1. Красноярск: РИО КГПУ, 2001. 191 с.
4. Шмигевський М. В. Видатні математики. *Б-ка журн. «Математика в школах України»*; вип. 6 (18). Харків: Основа, 2004. 176 с.