МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 621.35, 004.02

К. Д. ПІДГОРНА
кандидат технічних наук,
доцент кафедри економічної інформатики,
Національна металургійна академія України

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМ ПЛАНУВАННЯ РОЗКРОЮ МАТЕРІАЛІВ

У статті розглядаються методологічні засади дослідження методичних питань, щодо формування плану розкрою нарізання металу на смуги, обґрунтування об'єктивної необхідності побудови моделі для визначення оптимального плану розкрою, що забезпечить ефективне використання матеріалів, обґрунтування алгоритму розв'язання, проведення модельного експерименту, дослідження ефективності обраної математичної моделі. Для розв'язання задачі формування оптимального плану розкрою використані методи системного аналізу та економіко-математичного моделювання. Результати досліджень можуть бути застосовані при розв'язанні задачі оптимального розкрою матеріалу довільної довжини на заготовки з заданими довжинами і у замовленій кількості.

Ключові слова: економіко-математичне моделювання, симплекс-метод, метод гілок та меж, оптимальний розкрій, метод оптимізації, ефективне використання матеріалів.

Постановка проблеми. На сьогоднішній день і в найближчому майбутньому в різних сферах виробництва виникають і будуть виникати проблеми ресурсо- та енергозбереження, пов'язані із задачами розкрою і упаковки (компонування) [1-3]. До таких задач відносяться:

− задача оптимального розкрою матеріалу на заготовки довільної форми, які вирішуються при виробництві виробів в машинобудівній, авіабудівній, суднобудівній, текстильній, шкіряній, деревообробній, меблевій та багатьох інших галузях промисловості;

− задача компонування: вантажів у різноманітного виду контейнери, схем генеральних планів промислових підприємств, двигунів, радіоелементів на платах та ін.;

‒ задача розподілу ‒ від пам’яті обчислювальних машин до ділянок лісу, призначених для вирубки або посадки.

Всі перераховані вище задачі відносяться до проблеми оптимізаційного геометричного моделювання, що полягає в оптимізації розміщення даного виду об’єктів в заданих областях.

Складність розв’язку цих задач полягає в тому, що вони відносяться до класу NP-важких проблем оптимізації [4], тобто для яких поки не існує методів і алгоритмів, що знаходять точне рішення за поліноміальний час.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Аналіз вітчизняної та зарубіжної літератури, інформаційних інтернет-джерел дозволяє зробити висновок, що дослідженням і розробкою методів розв’язку даного класу задач займаються: Харківська школа розкрою та упаковки Академіка Ю.Г. Стояна [5]; Інститут алгоритмів і наукових обчислень Німеччини (Т. Ленгауер); В. Міленковік, К. Даніельс (США); К. Доусланд, В. Доусланд (Великобританія); ряд російських вчених, серед яких Е.А. Мухачева [6], М.А. Верхотуров [7, 8], В.В. Мартинов, А.А. Петунін, В.Д. Фроловський.

У класі задач двовимірного розкрою та упаковки на верхніх ступенях складності, по відношенню до інших задач розкрою та упаковки, перебувають задачі нерегулярного розміщення геометричних об’єктів складних форм. Це пов’язано з трудомісткістю формалізації умов взаємного неперетину об’єктів і умов їх розміщення в заданих областях розкрою та упаковки.

Розроблені на сьогоднішній день точні методи розв’язання таких задач не знаходять свого застосування на практиці, так як виявляються ефективними тільки при порівняно невеликій кількості об’єктів. При збільшенні кількості об’єктів значно ускладнюється пошук не тільки глобального, а й локальних екстремумів, точні методи перестають відповідати вимогам надійності, швидкості роботи. Дискретність роботи засобів цифрової обчислювальної техніки та трудомісткість аналітичних алгоритмів, що базуються на них, в більшості випадків обумовлюють складність математичних моделей і, як наслідок, нестійкість роботи створюваного математичного забезпечення. У зв'язку з цим найпоширеніше застосування отримали наближені методи розв’язку, засновані на евристичних і метаевристичних підходах і дискретних цілочисельних моделях задач розкрою та упаковки. Основний недолік цих методів – відсутність математично обґрунтованого доказу не тільки глобальної, але навіть локальної оптимальності отриманого розв’язку. Застосування до розв’язків, отриманих такими методами, точних алгоритмів пошуку локального екстремуму дозволило б отримати математично обґрунтований локальний екстремум задачі двовимірного розміщення об’єктів різного виду при розкрої і упаковці промислових матеріалів, що веде до більшої економії матеріалів. Все вище сказане визначає актуальність розробки ефективних і надійних методів пошуку локального екстремуму задачі двовимірного розміщення геометричних об'єктів різного виду при розв'язанні задач розкрою та упаковки промислових матеріалів.

Ця задача може бути вирішена за допомогою розробки ефективних математичних моделей і їх розв'язання за допомогою методів математичного програмування.

Формулювання цілей статті. Метою статі є розробка алгоритму розв'язання задачі розкрою та упаковки нерегулярних плоских геометричних об'єктів, заснованому на використанні методів математичного програмування та дослідження операцій для розв'язання задачі розкрою плоских геометричних об'єктів за умов забезпечення ефективного використання матеріалу.

Виклад основного матеріалу. На виробничих ділянках підприємств під час виготовлення замовлень з поздовжньо-поперечного різання матеріалу з рулонів на смуги виникає задача оптимального розкрою листів заданих розмірів на прямокутні заготовки. Це завдання полягає в наступному: відомо початковий розмір металевого рулону та розміри шматків, на які треба його розрізати. Потрібно розмістити в лист задані замовлення без перекриття між собою так, щоб можна було кроїти лист гільйотиною з мінімальними показниками відходів. Під гільйотинним розуміється розкрій, реалізований послідовністю наскрізних розрізів, паралельних кромкам матеріалу.

Оскільки проблеми ресурсо- та енергозбереження на підприємствах безпосередньо пов'язані із задачами розкрою і упаковки, то для побудови найбільш відповідної економіко-математичної моделі було проведено класифікацію цих задач (рис. 1).

Найбільш близькими до потреб підприємств можна віднести наступні:

– задача лінійного розкрою. Така модель відповідає задачам для розкрою деталей однієї довжини);

– задача прямокутного розкрою - відповідає завданню розкрою смуги на прямокутні заготовки, що розміщуються як вертикально, так і горизонтально;

– задача розміщення плоских геометричних об'єктів. Добре вирішує завдання розкрою складних елементів, але потребує значно більшої кількості ресурсів та часу для її розв'язання.

Найбільш відповідною для вирішення поставлених задач є задача лінійного розкрою.

Задача лінійного розкрою. Нехай Lз – довжина вихідних заготовок, $Lд_i$ – довжина деталей, $Nд_i$ – кількість деталей, Lo_j – довжина відходів. При цьому необхідно притримуватися наступних обмежень: $0<Lo_j<Lд_{min}$ – тобто довжини відходів мають бути меншими за найменшу деталь. Розміщення деталей в

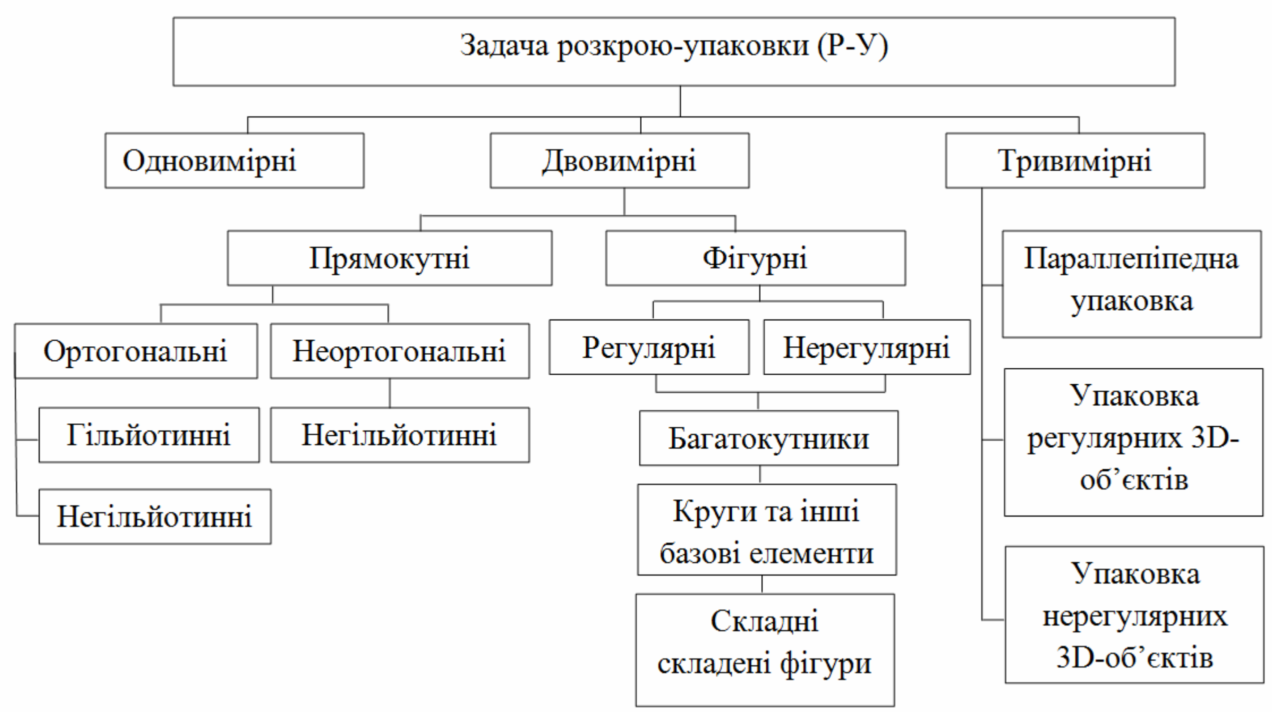

Рис. 1. Загальна класифікація задач розкрою та упаковки

заготовку розпочинаємо з найбільших деталей та з найбільшої їх кількості послідовно направляючись в сторону зменшення.

Довжини відходів (обрізків), що залишаються в результаті виконання розкрою, обчислюються за формулою:

$$Lo_j=Lз— \Sigma(Lд_i*Nд_{ij}), \qquad (1)$$

де

i – типорозмір деталей, від самої довгої до самої короткої;

j – номер способу розкрою;

$Nд_{ij}$ – кількість деталей $Д_i$ в j-му способі розкрою.

Кількість деталей кожного типорозміру, виготовлених по всім застосованим варіантам розкрою, розраховуються за формулою:

$$Nд_{iрозр}=\Sigma(Nд_{ij}*Nз_j) \qquad (2)$$

Кількість деталей в визначеному плані розкрою повинна повністю відповідати заданій кількості деталей.

Необхідна кількість заготовок для виконання оптимального плану розкрою буде визначатися за формулою:

$$Nз_{расч}=\Sigma Nз_j \tag{3}$$

Загальна довжина всіх заготовок, необхідних щоб виконати лінійний розкрій всіх деталей, буде обчислюватися за формулою:

$$Lз_{\Sigma}= Lз*Nз_{розр} \tag{4}$$

Загальна довжина всіх відходів, одержаних при виконанні знайденого плану розкрою, обчислюється за формулою:

$$Lo_{\Sigma}= \Sigma(Lo_j*Nз_j) \tag{5}$$

Частка відходів, отриманих при виконанні оптимального плану лінійного розкрою від загальної кількості використаного матеріалу, буде обчислюватися за формулою:

$$\Omega o= Lo_{\Sigma}/Lз_{\Sigma} \tag{6}$$

Таким чином визначається оптимальний план розкрою – скільки заготовок і за якими варіантами розкрою різати, щоб в результаті отримати всі необхідні деталі в потрібній кількості при мінімумі відходів.

В якості умов обмежень вказуємо необхідність рівності заданого $Nд_i$ і розрахункового $Nд_{iрозр}$ кількості деталей, а так само на змінні $Nз_j$ – розрахункова кількість заготовок за варіантами розкрою – накладаємо обмеження: це повинні бути цілі числа.

Таким чином, математична модель нашої задачі лінійного розкрою може бути записана у вигляді:

Знайти мінімальне значення функції:

$$\sum_{i=1}^{M} L_{вi} \times K_i \to \min, \tag{7}$$

за умов

$$K_i \geq 0, \quad K_i \in I, \quad \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{M}}, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{M} N_{Дij} \times K_i = N_j, \quad \overline{j=1,N}. \tag{9}$$

Наведена модель повністю відповідає потребам підприємств, що здійснюють виготовлення замовлень з поздовжньо-поперечного різання матеріалу з рулонів на смуги. Розв'язання цієї задачі можна отримати за допомогою симплекс-методу та методу «гілок та меж».

Модельний експеримент для розв'язання поставленої задачі розкрою (7) – (9) реалізовували засобами MS Excel за наступними вхідними даними: для комплектації замовлень виробничий цех повинен порубати на комбінованих ножицях з рулону металевого листа заготовки довжиною 1500 м три типорозміри деталей: 151 штуку довжиною 330 м; 206 штук довжиною 270 м; 163 штуки довжиною 190 м (див. табл. 1). Потрібно знайти оптимальний план розкрою, який використовує мінімальну кількість матеріалу і дає, відповідно, мінімальну кількість відходів.

Таблиця 1

Технічні дані замовлення

Вихідні дані		Позначення	Значення		
1	Довжина вихідних заготовок, м	$L_З=$	1500		
2	Номера деталей	i=	1	2	3
3	Довжина деталей, м	$L_{di}=$	330	270	190
4	Задана кількість деталей, шт	$N_{di}=$	151	206	163

Модельний експеримент для розв'язання поставленої задачі розкрою (7) – (9) реалізовували засобами MS Excel (рис. 2).

Після внесення основних вхідних даних розпочинаємо «укладання» деталей в заготовку, розпочинаючи з самих великих деталей та з найбільшої їх кількості, послідовно рухаючись у напрямку зменшення (див. рис. 2). Якщо якогось типорозміру деталей у варіанті розкрою немає, то осередок залишаємо порожній. Так спроба викроїти з однієї заготовки 5 деталей №1 неможлива, тому пишемо в клітинку 4. Додати в розкрій деталь №2 або деталь №3 також неможливо, тому записи залишаємо порожніми. За другим варіантом розкрою зменшимо на 1 від попереднього варіанту кількість деталей №1 і записуємо – 3, спроба додати 2 деталі №2 – не виходить, тому заповнюємо – 1. Залишається можливість доповнити розкрій деталлю №3, заносимо в табл. – 1. Дотримуючись наведених принципів, заповнюємо по аналогії всі можливі в даному випадку 18 варіантів розкрою.

Лінійний розкрій

Первинні дані, дані для розрахунку

	Початкові дані	Позначення	Значення		
1	Довжина початкових заготовок, м	L3=	1500		
2	Номера деталей	i=	1	2	3
3	Довжина деталей, м	Ldi=	330	270	190
4	Задана кількість деталей, шт	Ndi=	151	206	163
5	Кількість деталей, що нарізають з однієї заготовки за різними варіантами розкрою, шт	Ndi1=	4		
		Ndi2=	3	1	1
		Ndi3=	3		2
		Ndi4=	2	3	
		Ndi5=	2	2	1
		Ndi6=	2	1	3
		Ndi7=	2		4
		Ndi8=	1	4	
		Ndi9=	1	3	1
		Ndi10=	1	2	3
		Ndi11=	1	1	4
		Ndi12=	1		6
		Ndi13=		5	
		Ndi14=		4	2
		Ndi15=		3	3
		Ndi16=		2	5
		Ndi17=		1	6
		Ndi18=			7
	Результати розрахунку	Позначення	Значення		
6	Кількість деталей в розкрої, шт	NDросп=	151	206	163
7	Розрахункова кількість заготовок, ш	N3расч=	93		
8	Загальна довжина заготовок, мм	L3Σ=	139500		
9	Загальна довжина відходів мм	L0Σ=	3080		
10	Доля відходів %	Ω0=	2,21%		

Вихідні дані

Довжина відходів	Розрахована кількість заготовок
180	3
50	1
130	0
30	24
110	1
0	41
80	2
90	0
170	0
60	0
140	0
30	0
150	6
40	15
120	0
10	0
90	0
170	0

f(x1…,xn)= L0Σ→min
Ndiросп= Ndi; N3j>=0, ціле.

Рис. 2. Вхідні та вихідні дані модельного експерименту

За допомогою функції пошуку рішень знаходимо розв'язання задачі. При цьому додаємо обмеження для розрахунку оптимального плану розкрою, додатково вказуючи, що ці значення повинні бути цілими.

За результатами модельного експерименту отримано оптимальний план розкрою, з використанням мінімальної кількості заготовок і, відповідно, з мінімальною кількістю відходів.

Висновки і перспективи подальших розвідок. За результатами проведених досліджень та аналізом результатів модельного експерименту, насамперед показника долі відходів, можна стверджувати, що оптимізація плану за запропонованою моделлю пройшла успішно завдяки зменшенню втрат, пов'язаних з утворенням відходів матеріалу, та прискоренням розрахункових робіт. Запропонований метод може бути використаний підприємствами, що здійснюють виготовлення замовлень з поздовжньо-поперечного різання матеріалу з рулонів на смуги, за короткий термін та з мінімальною кількістю відходів.

Список використаної літератури

1. Гребеннік І. В. Математичні моделі та методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. техн. наук: спец. 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / І. В. Гребеннік. – Харків, 2006. – 49 с.

2. Валиахметова Ю. І. Теория оптимального использования ресурсов Л. В. Канторовича в задачах раскроя-упаковки: обзор и история развития методов решения / Ю. І. Валиахметова, А. С. Филиппова // Вестник УГАТУ. – 2014. – Т. 18, № 1 (62). – 186-197 с.

3. Картак В. М. Задача упаковки прямоугольников: точный алгоритм на базе матричного представления / Картак В. М. // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. – 2007. – Т. 9, № 4. – С. 104-110.

4. Основные методы решения задачи фигурной нерегулярной укладки плоских деталей [Електронний ресурс] / Р. Т. Мурзакаев, В. С. Шилов, А. В. Буркова // Электронный научный журнал: Инженерный вестник Дона. – 2013. – Режим доступу: http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4y2013/2043

5. Стоян Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. – Киев: Наук. Думка, 1986. – 286 с.

6. Мухачева Э. А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Применение в АСУ / Э. А. Мухачева. – М.: Машиностроение, 1984. – 176 с.

7. Верхотурою М. А. Многообразие задач раскроя и упаковки / М.А. Верхотуров, Э.А. Мухачева, Л.И. Шабрина. – Деп. в ВИНИТИ, №3023-В94. – М.: 1994. – 8 с.

8. Верхотуров М. А. Математическое обеспечение автоматизи-рованных систем нерегулярного размещения двух- и трехмерных геометрических

объектов на базе дискретных моделей: автореф. дис…. д-ра. техн. наук: 05.13.06 / М. А. Верхотуров. – Уфа, 2000. – 34 с.

References

1. Hrebennik, I. (2006), *Matematichni modeli ta metodi kombinatornoï optimizacії v geometrichnomu proektuvanni* [Mathematical models and methods of combinatorial optimization in geometrical design], Thesis abstract of Cand. Sc. (Econ.), 01.05.02, Kharkiv, Ukraine.

2. Valiakhmetova, YU. and Filippova, A. (2014), "L.V. Kantorovich's Theory of Optimal Use of Resources in Nesting-Packing Problems: A Review and History of the Development of Solution Methods", *Vestnik,* vol. 1 (62), pp. 186-197.

3. Kartak, V. (2007), "The problem of packing rectangles: an exact algorithm based on the matrix representation", *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatcionnogo tekhnicheskogo universiteta*, vol. 9, no. 4, pp. 104-110.

4. Murzakayev, R., Shilov, V., Burkova, A. (2013), "Basic methods for solving the problem of irregular irregularly laid flat parts", available at: http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4y2013/2043 (access date February 14, 2018).

5. Stojan, Ju., Jakovlev, S. (1986), *Matematicheskie modeli i optimizacionnye metody geometricheskogo proektirovanija* [Mathematical models and optimization methods of the geometrical design], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.

6. Muhacheva, Je. (1984), *Racional'nyj raskroj promyshlennyh materialov. Primenenie v ASU* [A rational cutting of industrial materials. The use of ACS], Mashinostroenie, Moscow, Russia.

7. Verkhoturov, M., Mukhacheva, E., Shabrina, L. (1994), *Mnogoobrazie zadach raskroja i upakovki* [Variety of tasks of nesting and packaging], VINITI, no. 3023-B94, Moscow, Russia.

8. Verkhoturov M.A. (2000), *Matematicheskoe obespechenie avtomatizi-rovannyh sistem nereguljarnogo razmeshhenija dvuh- i trehmernyh geometricheskih ob#ektov na baze diskretnyh modelej: 05.13.06* [Mathematical support of automated systems for the irregular placement of two- and three-dimensional geometric objects on the basis of discrete models] Thesis abstract of Dr. Sc., Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia.

Pidhorna K., Ph.D. in Technical, Associate Professor, National Metallurgical Academy of Ukraine

Study of the problems for planning the cutting of materials

The article deals with the methodological principles of the study of methodical questions concerning the formation of a cut-off plan for cutting metal on the stripes, the substantiation of the objective necessity of constructing a model for determining the optimal cutting plan, which will ensure the efficient use of materials, the rationale for the solution algorithm, the implementation of a model experiment, mathematical model. To solve the problem of forming an optimal cutting plan, methods of system analysis and economic-mathematical modeling were used. The results of the research can be applied in solving the problem of optimal cutting of material of arbitrary length on the workpieces with specified lengths and in ordered quantities.

Key words: economic-mathematical modeling, simplex method, branch and boundary method, optimal cutting, optimization method, efficient use of materials.

Подгорная Е.Д., к.т.н., доцент, Национальная металлургическая академия Украины

Исследование проблем планирования раскроя материалов

В статье рассматриваются методологические основы исследования методических вопросов, по формированию плана раскроя резки металла на полосы, обоснование объективной необходимости построения модели для определения оптимальной плана раскроя, что обеспечит эффективное использование материалов, обоснование алгоритма решения, проведения модельного эксперимента, исследования эффективности выбранной математической модели. Для решения задачи формирования оптимального плана раскроя использованы методы системного анализа и экономико-математического моделирования. Результаты исследований могут быть применены при решении задачи оптимального раскроя материала произвольной длины на заготовки с заданными длинами и в заказанной количестве.

Ключевые слова: экономико-математическое моделирование, симплекс-метод, метод ветвей и границ, оптимальный раскрой, метод оптимизации, эффективное использование материалов.