

### Розробка математичної моделі керування траєкторією руху підводного апарата

Андрій Сірівчук

Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова  
просп. Героїв Сталінграда, 6, Миколаїв, Україна, 54025  
[sirivchuk@mail.ua](mailto:sirivchuk@mail.ua), [orcid.org/0000-0003-2927-2600](https://orcid.org/0000-0003-2927-2600)

**Анотація.** Ручне керування рухом прив'язаного підводного апарата є трудомісткою задачею, вирішення якої потребує напруженої роботи оператора апарата. А в деяких ситуаціях виконання підводних робіт з використанням ручного режиму керування руху виявляється неможливим. З іншого боку в процесі переміщення в підводному просторі на траєкторії руху підводного апарата можуть зустрічатись статичні та рухомі перешкоди, що робить автоматизацію керування траєкторним рухом прив'язаного підводного апарата складною науковою задачею.

В даній роботі виконано огляд сучасних підходів до керування траєкторним рухом рухомих об'єктів. Для побудови траєкторії руху апарата запропоновано використовувати модифікований метод потенційних полів. Збільшення ефективності огинання перешкод досягнуто за рахунок використання додаткових пар променів гідролокатора в горизонтальній та вертикальній площинах руху.

Перевагами запропонованого підходу є зменшення імовірності проходження траєкторії апарата через точки локальних мінімумів функцій відштовхування та можливість коригування траєкторією руху в реальному режимі часу. Додатковою перевагою запропонованого методу автоматизації руху є можливість огинання підводним апаратом рухомих перешкод.

**Ключові слова:** метод потенційних полів, траєкторія руху, обхід перешкод, підводний апарат.

### ВСТУП

Одним з найбільш поширених засобів моніторингу підводної обстановки, а також проведення підводно-технічних робіт є телекеровані підводні апарати (ПА). Застосування підводних апаратів обумовлено багатьма причинами, серед яких безпека життя людини, швидкість приведення в дію, велика глибина роботи, більш низька вартість проведення робіт тощо [5, 9, 20].

В наш час телекеровані підводні апарати мають автоматичну або автоматизовану систему керування [15], що дозволяє більш ефективно виконувати поставлені перед ним задачі без високої кваліфікації оператора. В свою чергу деякі задачі, що виконує підводний апарат, не можуть бути реалізовані в повному обсязі людиною-оператором. Тому кожний підводний апарат має систему керування, що забезпечує виконання поставлених перед ним завдань.

Найбільш складною задачею для автоматичної або автоматизованої системи керування ПА є керування його рухом, оскільки на ПА завжди діють зовнішні збурення, а також в зоні роботи знаходяться перешкоди [5]. В якості перешкод можуть виступати статичні (рельєф дна, гідротехнічні споруди, підводне сміття тощо) та рухомі (інші ПА, водолази, підводні агрегати) об'єкти. Тому система автоматичного керування

(САК) повинна вміти не тільки забезпечувати проходження ПА по завчасно визначеному маршруту, а й мати можливість самостійно змінювати траєкторію руху ПА в залежності від ситуації.

Питання керуванням траєкторією руху розглядається в сферах комп'ютерного моделювання [1, 17], автомобільної промисловості [11, 13, 14], авіації [2, 12] тощо. Існує багато варіацій методів обходу перешкод [3, 4, 19], що доводить необхідність подальшого дослідження проблеми. Найчастіше задачу обходу перешкод розглядають в горизонтальній площині [3, 5] та при статичних перешкодах [17].

При наявності в зоні роботи ПА рухомих перешкод виникає необхідність розробки методу, який зможе забезпечити коректування траєкторії руху ПА для усунення можливості зіткнення ПА з рухомою перешкодою. Ефективним в даному питанні є метод потенційних полів [2], але даний метод потребує удосконалення оскільки при великій кількості перешкод збільшується можливість попадання в точку локального мінімуму, а також на керування траєкторією руху ПА впливають всі перешкоди, навіть ті що не лежать на його шляху.

## МЕТА ТА МЕТОДИ

Розробка концепції керуванням траєкторією руху ПА в тривимірному просторі, на основі методу потенційних полів.

## РЕЗУЛЬТАТИ

Під час руху підводного апарата в товщі води на нього діють зовнішні збурення, величину яких не можливо передбачити заздалегідь (течія, рухомі перешкоди, хитавиця тощо), тому жорстке слідування по завчасно заданій траєкторії руху в даному випадку неможливе. Тому для руху підводних апаратів в умовах невизначеності для завдання траєкторії руху ПА використовують контрольні точки, до яких від повинен

дістатися. Чергуванням контрольних точок задають бажану траєкторію руху ПА.

В залежності від завдань, що поставлені перед автоматичною системою керування (САК) ПА, змінюється густина контрольних точок в просторі. Так якщо необхідно доставити робочий або вимірювальний інструмент в задану точку достатньо лише однієї контрольної точки, а якщо необхідно провести огляд гідротехнічної споруди кількість точок збільшується в залежності від допустимого віддалення від цілі.

При підготовці ПА до місії розставляються контрольні точки, які повинен пройти ПА опираючись на підводні карти зони обстеження. Якщо інформація про дану зону відсутня, то в якості контрольних точок визначаються координати доставки обладнання (для однієї цілі) або крайні точки зони обстеження (для обстеження водної товщі за допомогою галсів).

Для встановлення контрольних точок існує дві вимоги: контрольна точка не повинна лежати в середині нерухомої перешкоди або в безпосередній близькості від неї та контрольна точка повинна лежати всередині робочої зони (для прив'язних ПА). Для прив'язних ПА друга вимога визначається за формулою:

$$\frac{X_k^2}{L_{\max}^2} + \frac{Y_k^2}{H_{\max}^2} + \frac{Z_k^2}{L_{\max}^2} \leq 1; \quad (1)$$

де  $X_k, Y_k, Z_k$  – координати контрольної точки;  $L_{\max}$  – максимальна довжина віддалення ПА від судна-носія;  $H_{\max}$  – максимальна глибина занурення ПА. Найчастіше  $L_{\max}$  та  $H_{\max}$  однакові та дорівнюють довжині кабель-тросу при відсутній течії.

Для прокладання безпечного маршруту між контрольними точками доцільно використовувати метод потенційних полів. Цей підхід не вимагає ні квантизації простору, ні повних попередніх розрахунків. Сутність методу полягає в тому, що кожна перешкода має навколо себе відразливе потенційне поле, сила якого обернено пропорційна відстані від нього; так само існує однорідна сила притягання до цілі. Через близькі пос-

тійні інтервали часу обчислюється сума векторів притягання та відштовхування. Результуючий вектор вказує напрям та швидкість руху [17].

Детальне дослідження показало, що метод потенційних полів здатний провести апарат в будь-яку точку. Причому основним недоліком методу потенційних полів є попадання в локальні мінімуми, але це зустрічається рідко [18].

В якості сигналу керування, зважаючи на досвід минулих досліджень [1, 13, 19], обирається вектор миттєвої швидкості ПА. Отже результуючий вектор руху буде представлений у векторному вигляді:

$$\vec{v}_p = k_m \vec{r}_m + \frac{k_0}{l_0} \vec{r}_0 + \frac{k_1}{l_1} \vec{r}_1 + \dots + \frac{k_i}{l_i} \vec{r}_i; \quad (2)$$

де  $\vec{v}_p$  – результуючий вектор швидкості;  $k_m$  – коефіцієнт притягання контрольної точки або об'єкта моніторингу;  $k_{0..i}$  – коефіцієнт відштовхування кожної перешкоди;  $l_{0..i}$  – відстань від кожної перешкоди до ПА;  $r_m$  – орт направленості дії сили притягання;  $r_{0..i}$  – орт направленості дії відштовхування.

При використанні класичного методу потенційних полів виникає декілька недоліків:

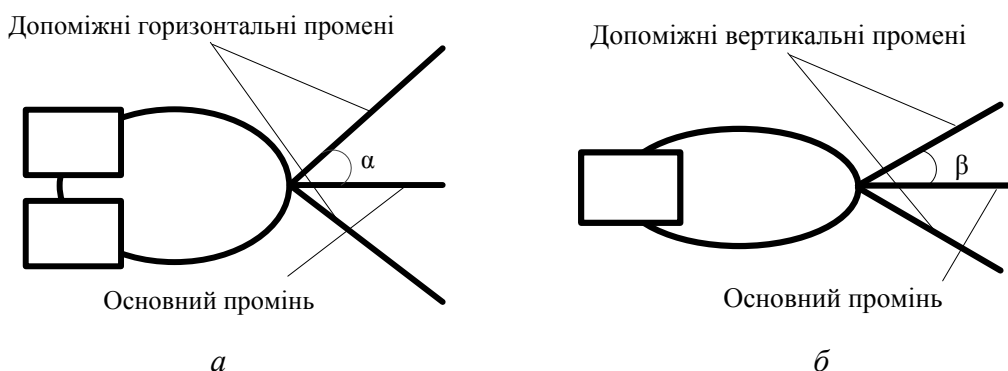
- при наявності великої кількості перешкод збільшується час для розрахунку необхідного вектору швидкості, а також можливість попадання в точку локального мінімуму;

- при використанні на реальному ПА виникає необхідність застосування гідролокатора кругового огляду, що призведе до збільшення часу сканування простору або використання більш дорогого обладнання [3].

В якості удосконалення методу пропонується використання відштовхуючої дії лише тих перешкод, що лежать на шляху руху ПА. Для визначення чи лежить перешкода на шляху ПА, використовується промінь, який направлений до цілі (основний промінь). При такому підході до огинання перешкод, у свою чергу, виникає можливість зіткнення ПА з перешкодою при невеликій відстані від маршруту руху та краю перешкоди за рахунок власних розмірів ПА.

Таким чином, необхідно ввести допоміжні промені, що будуть враховувати дану можливість та будуть розташовані на з деяким кутом відхилення від основного направляючого променя (Рис.1) [16]. Допоміжні промені, в свою чергу, поділяються на горизонтальні та вертикальні. Горизонтальні допоміжні промені корегують відстань від краю перешкоди до ПА, коли основний промінь не перетинає дану перешкоду. Задачею вертикальних допоміжних променів є корекція висоти руху над ґрунтом, над або під перешкодами, а також можливість огинання невисокої перешкоди.

Простір, що знаходиться навколо ПА представимо замість ґрунту дна плоский диск з необмеженим радіусом на якому знаходяться перешкоди (рельєф, гідротех-



**Рис.1.** Розміщення допоміжних променів відносно основного  
**Fig. 1.** The layout of secondary rays in relation to primary ray

нічні споруди тощо), що представлені в моделі циліндрами, таку ж саму форму мають рухомі об'єкти, що знаходяться в товщі води, на її поверхні або на дні. Таким чином перешкода матиме лише невелику кількість необхідних параметрів: координати центру основи  $(x_i, y_i)$ , глибину на якій вона знаходиться  $(z_i)$ , висоту  $(h_i)$  та радіус перешкоди  $(R_i)$ .

Тоді рівняння (1) [6] в векторному виді для поточного моменту часу матиме вигляд:

$$\bar{v}_p = \bar{v}_m + \sum \bar{v}_i + \sum \bar{v}_{iz} + \sum \bar{v}_{ixy}; \quad (2)$$

де  $\bar{v}_m$  – вектор швидкості притягання цілі;  $\bar{v}_i$  – вектор відштовхування перешкоди по основному промені;  $\bar{v}_{iz}$  – вектор відштовхування допоміжних вертикальних променів;  $\bar{v}_{ixy}$  – вектор відштовхування допоміжних горизонтальних променів.

Для руху в тривимірному просторі складаємо систему рівнянь прямої бажаного напрямку руху ПА [10]:

$$\begin{cases} x = x_{na} + dx \cdot t; \\ y = y_{na} + dy \cdot t; \\ z = z_{na} + dz \cdot t; \end{cases} \quad (3)$$

де  $x_{na}, y_{na}, z_{na}$  – поточні координати підводного апарата;  $dx, dy, dz$  – складові бажаного вектору швидкості ПА;  $t$  – час руху.

Складові вектору руху  $\bar{v}_m(dx, dy, dz)$  визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{x_{na} - x_t}{l_t}; \\ dy &= \frac{y_{na} - y_t}{l_t}; \\ dz &= \frac{z_{na} - z_t}{l_t}; \\ l_t &= \sqrt{(x_{na} - x_t)^2 + (y_{na} - y_t)^2 + (z_{na} - z_t)^2} \end{aligned} \quad (4)$$

де  $x_t, y_t, z_t$  – координати контрольної точки;  $l_t$  – відстань від ПА до контрольної точки.

Для визначення результуючого вектору швидкості ПА перш за все необхідно визначити які перешкоди або їх проекції лежать на шляху ПА в горизонтальній площині, для цього запишемо рівняння кола, що характеризує перешкоду:

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - R_i^2 = 0. \quad (5)$$

Таким чином підставивши (3) в (5) отримаємо:

$$\begin{aligned} (x_{na} + dx \cdot t - x_i)^2 + (y_{na} + dy \cdot t - y_i)^2 - R_i^2 &= 0; \\ dx^2 \cdot t^2 + 2dx \cdot t \cdot (x_{na} - x_i) + (x_{na} - x_i)^2 + dy^2 \cdot t^2 + 2dy \cdot t \cdot (y_{na} - y_i) + (y_{na} - y_i)^2 - R_i^2 &= 0; \\ (dx^2 + dy^2) \cdot t^2 + (x_{na} - x_i)^2 + (y_{na} - y_i)^2 + 2 \cdot [dx \cdot (x_{na} - x_i) + dy \cdot (y_{na} - y_i)] \cdot t - R_i^2 &= 0; \end{aligned} \quad (6)$$

Приведемо (6) до канонічного виду:

$$At^2 + Bt + C = 0; \quad (7)$$

де:

$$\begin{aligned} A &= dx^2 + dy^2; \\ B &= 2[dx \cdot (x_{na} - x_i) + dy \cdot (y_{na} - y_i)]; \\ C &= (x_{na} - x_i)^2 + (y_{na} - y_i)^2 - R_i^2. \end{aligned} \quad (8)$$

При розв'язанні квадратного рівняння (7), якщо дискримінант більше нуля – перешкода лежить на шляху руху ПА, якщо рівний нулю – перешкода та маршрут дотикаються, якщо дискримінант менше нуля – перешкода не лежить на шляху руху ПА і тому не діє на його рух. Якщо корні рівняння мають від'ємне значення то перешкода лежить позаду руху ПА і її дія також не враховується. У випадку коли одне рівняння має додатній корінь, а другий від'ємний то це можливо лише коли ПА знаходиться над або під перешкодою.

Отримавши значення часу, через який відбудеться зіткнення між ПА та перешкодою підставивши його в систему рівнянь (3), отримуємо одну або дві точки перетину маршруту та перешкоди. Знаходимо відстань від ПА до точок:

$$l_i = \sqrt{(x - x_{na}) + (y - y_{na})^2}; \quad (9)$$

де  $x, y$  – розраховані координати точки зіткнення.

В якості наступних розрахунків обирається таке значення  $x$  та  $y$ , при яких значення відстані було найменшим.

Після цього визначається вектор головного променя, для корегування маршруту руху. Якщо ПА знаходиться на одному рівні з визначеною перешкодою, тоді справедливий вираз:

$$z_i \leq z_{na} \leq z_i + h_i, \quad (10)$$

в іншому випадку вектор відштовхування головного променя буде рівним 0. При справедливій нерівності (10) вектор відштовхування від перешкоди розраховується відносно центра перешкоди:

$$l_g = \sqrt{(x_i - x_{na}) + (y_i - y_{na})^2};$$

$$\vec{v}_i = \left( \frac{x_i - x_{na}}{l_g^2}, \frac{y_i - y_{na}}{l_g^2}, 0 \right); \quad (11)$$

де  $l_g$  – відстань від ПА до центра перешкоди.

Для вертикальної складової корегування руху необхідно визначити точки перетину допоміжних вертикальних променів з перешкодою. Вертикальний промінь може перетинати стінкою перешкоди, верхньою або нижньою основу.

В такому випадку точки перетину промінню та перешкоди буде визначатися за формулою:

$$z = \begin{cases} z_{na} \pm l_i \cdot ctg\beta & \text{при } t_1 > 0, t_2 > 0; \\ z_i + h_i & \text{при } z_{na} > z_i \text{ та} \\ & t_1 > 0, t_2 < 0; \\ z_i & \text{при } z_{na} < z_i \text{ та} \\ & t_1 > 0, t_2 < 0; \end{cases} \quad (12)$$

де  $\beta$  – кут відхилення допоміжних вертикальних променів.

У випадку коли ПА заходиться над або під перешкодою розраховується лише одна координата  $z$  відносно якої буде проводиться коректування маршруту руху за формулою:

$$dz_i = \frac{z_{na} - z}{l_z^2} = \frac{(z_{na} - z) \cdot \sin^2 \beta}{(z_{na} - z)^2} = \frac{\sin \beta}{z_{na} - z}; \quad (13)$$

де  $l_z$  – довжина променю.

У випадку коли перешкода знаходиться перед апаратом ( $t_1 > 0, t_2 > 0$ ) необхідно визначити обидві точки перетину  $z_1$  та  $z_2$ . Та визначити їх силу відштовхування спроектовану на вертикальну вісь  $dz_1, dz_2$  за аналогічно формулі (13), якщо точка  $z_1$  або  $z_2$  не входить в проміжок  $(z_i; z_i + h_i)$  то сила відштовхування від точки буде рівною нулю. Результируюча сила відштовхування  $dz_i$  буде сумою  $dz_1, dz_2$ :

$$dz_i = dz_1 + dz_2; \quad (14)$$

Вертикальний вектор корегування маршруту матиме вигляд  $\vec{v}_{iz}(0, 0, dz_i)$ .

Для допоміжних променів, що лежать в горизонтальній площині рівняння (4) будуть мати вигляд:

$$dx_n = \cos(\arccos(dx) \pm \alpha);$$

$$dy_n = \sin(\arccos(dx) \pm \alpha); \quad (15)$$

де  $dx_n, dy_n$  – орти направленості променя;  $\alpha$  – кут відхилення допоміжного променя від основного.

Розрахунок сили відштовхування допоміжних променів розраховується аналогіч-

но силі відштовхування основного променя. Для того, щоб допоміжні промені не впливали на маршову швидкість ПА їх дія проектується на поперечну складову до головного вектору.

$$l_o = \sqrt{(x_o - x_{na})^2 + (y_o - y_{na})^2};$$

$$\bar{v}_{xyi} = \begin{pmatrix} \frac{(x_o - x_{na})}{l_o^2} \cdot \sin \alpha, \\ \frac{(y_o - y_{na})}{l_o^2} \cdot \sin \alpha, \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

де  $x_d, y_d$  – найближчі координати точки перетину допоміжного променя та перешкоди,  $l_d$  – найменша відстань від перешкоди до ПА у напрямку променю.

Сума векторів  $\bar{v}_p$  через проміжки часу  $t$  формує траєкторію руху в зоні зі статичними та рухомими перешкодами в оперативному режимі. Траєкторія руху в даному випадку формується тільки під час руху ПА, таким чином не вимагає попередніх розрахунків, які включали би в себе додаткові характеристики перешкод такі, як швидкість їх руху, прискорення тощо.

## ВИСНОВОК

Використання даної математичної моделі дозволить більш ефективно будувати маршрут руху ПА в порівнянні з класичним методом потенційних полів, зі збереженням переваг даного методу. Траєкторія руху, в порівнянні з класичною, є більш прямолінійною та має меншу вірогідність попадання в точку локального мінімуму.

## ЛІТЕРАТУРА

1. **Borenstein J., Koren, Y., 1989.** Real-time Obstacle Avoidance for Fast Mobile Robots. IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, Vol.19, Nr. 5, 1179-1187.

2. **Ge S.S., Cui Y.J., 2000.** Path Planning for Mobile Robots Using New Potential Functions, Proceedings of Asian Control Conference.
3. **Moravec, H.P., Elfes, A., 1985.** High Resolution Maps from Wide Angle Sonar. IEEE Conference on Robotics and Automation, Washington D.C., 116-121.
4. **Rimon E., Koditschek D.E., 1992.** Extract robot navigation using artificial potential function. IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol.8(5), 501-508.
5. **Агеев М.Д., 2003.** Автономные подводные роботы: системы и технологии. Москва, Наука, 398.
6. **Анго А., 1965.** Математика для электро- и радиоинженеров. Москва, Наука, 780.
7. **Бессонов Л.А., 2001.** ТОЭ. Электромагнитное поле: учебник, 9-е изд. Москва, Гардарики, 264.
8. **Блінцов В.С., Клочков О.П., 2016.** Рівняння існування самохідної прив'язної підводної системи як оцінка можливості її створення. Підводні технології, Вип.03, 25-30.
9. **Блінцов В.С., 2014.** Теоретичні основи автоматичного керування автономними підводними апаратами. Миколаїв, Вид-во НУК, 242.
10. **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А., 1981.** Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. Москва, Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 704.
11. **Кабанов Д.С., Крашенинников Б.А., 2005.** Оптимальное управление траекторией движения автомобиля с объездом препятствий. Тезисы докладов 10 междунар. конференции: Системный анализ, управление и навигация, Москва, Изд-во МАИ, 53.
12. **Кирсанов А.П., Сузанский Д.Н., 2013.** Способ траекторного движения летательным аппаратом в горизонтальной плоскости при облете им неподвижной опасной зоны. Радиотехника, Вып.1, 73-76.
13. **Платонов А.К., Кирильченко А.А., Колганов М.А., 2001.** Метод потенциалов в задаче выбора пути: история и перспективы. Препринт ИПМ, Вып.40, Москва (Режим доступа [http://www.keldysh.ru/papers/2001/prep40/prep2001\\_40.html](http://www.keldysh.ru/papers/2001/prep40/prep2001_40.html)).
14. **Пшихопов В.Х., 2009.** Позиционно-траекторное управление подвижными объектами. Таганрог, ТТИ ЮФУ, 183.
15. **Сірівчук А.С., 2014.** Структура системи керування рухом прив'язного підводного апарата. Проблеми автоматики та електрообладнання транспортних засобів. Матеріали



Vserossiyskogo soveschaniya po problemam upravleniya. Moskva, 19 (in Russian).

20. **Shostak V.P., 2011.** Podvodnyie apparaty-roboty i ih manipulyatory. Chikago, Megatron, 134 (in Russian).

### **The development of a mathematical model for motion trajectory control of an underwater vehicle**

*Andrey Sirivchuk*

**Summary.** Manual control of the process of the movement of a tethered underwater vehicle is a complicated task which requires hard work of operator. In some situations the completion of underwater operations with exclusively manual control is even impossible. On the other side while in movement underwater vehicle may encounter static or moveable obstacles located on its trajectory that makes the automation of the control of the movement of a tethered underwater vehicle a complicated scientific task.

In this paper the overview of modern approaches to the control of trajectory motion of mobile units is presented. To define the trajectory of the movement of an underwater vehicle the use of modified potential field method is proposed. To increase the effectiveness of obstacle avoidance the additional pairs of sonar beams in horizontal and vertical movement planes are used.

Advantages of proposed approach are in the decrease of probability of crossing of points of local minimums of repulsion function by the trajectory of an underwater vehicle and the possibility to correct the trajectory of movement in real time. Additional advantage of proposed method of movement automation is the ability of an underwater vehicle to avoid mobile obstacles.

**Key words:** potential field method, the trajectory of movement, obstacle avoidance, underwater vehicle.