О три-тканях, образованных семействами окружностей

Александр Михайлович Шелехов

Аннотация Найдены структурные уравнения и кривизна три-ткани, образованой тремя семействами окружностей на плоскости. Сформулированы некоторые проблемы, связанные с описанием подкласса регулярных тканей.

Ключевые слова криволинейная три-ткань, три-ткань из семейств окружностей, кривизна ткани

УДК 514.763.7

Папирус Ахмеса и египетские пирамиды
являются, вероятно, самыми ранними
свидетельствами существования науки геометрия

Ф. Кэджори

... демаркационная линия между
древностью и современностью не столь резка

О. Нейгебауэр

... вряд ли случайно обнаружено было
... равенство круга и квадрата
со стороной, равной 8/9 его диаметра

А.П. Юшкевич

Памяти Вениамина Федоровича Кагана

Введение. Говорят, что 3 гладких семейства кривых на плоскости образуют в некоторой области D три-ткань W, если в каждой точке этой области кривые семейств попарно трансверсальны. Следуя В. Бляшке [1], мы рассматриваем три-ткани с точностью до локальных диффеоморфизмов: три-ткани W и $\widetilde{W}$, заданные в областях D и $\widetilde{D}$ соответственно, считаются эквивалентными, если существует локальный диффеоморфизм $D \to \widetilde{D}$, переводящий линии одной ткани в линии другой.

Простейшая три-ткань (мы называем ее параллельной) образована тремя семействами параллельных прямых. Три-ткань, эквивалентная параллельной ткани, называется параллелизуемой или регулярной. Все параллельные ткани эквивалентны друг другу и более того, они аффинно эквивалентны между собой.

Одна из важнейших задач в теории тканей — нахождение подкласса регулярных тканей в заданном классе тканей. Легко проверяется, что три-ткань, образованная тремя пучками прямых, является регулярной. Но уже следующая по сложности три-ткань, образованная тремя пучками окружностей (в [2] мы предложили называть ее *круговой тканью*, или, короче, *C-тканью*), не является, вообще говоря, регулярной. В 1953 году на одной из своих лекций в Стамбуле Бляшке привел пример регулярной круговой ткани (три эллиптических пучка с попарно совпадающими вершинами) и предложил найти все классы регулярных тканей, образованных пучками окружностей. По существу, пишет он в своей книге [1], задача сводится к некоторому алгебраическому уравнению. Но алгебраическое уравнение, о котором говорил Бляшке, оказалось слишком большой степени и слишком сложным для анализа, поэтому указанный им способ решения не позволил решить задачу полностью. Полное решение этой задачи оказалось весьма сложным, оно приведено в работах [2], [3], см. также [4].

В настоящей статье строится аппарат для изучения тканей, образованных тремя произвольными семействами окружностей. Используя метод внешних форм и подвижного репера Эли Картана, мы находим структурные уравнения такой ткани и ее важнейший дифференциальный относительный инвариант — кривизну, обращение в нуль которой необходимо и достаточно для регулярности ткани.

Следуя Дарбу, мы рассматриваем окружность как точку трехмерного проективного пространства P^3. В интерпретации Дарбу точки плоскости (окружности нулевого радиуса) изображаются точками некоторой овальной квадрики пространства P^3, которая называется квадрикой Дарбу (мы обозначаем ее Q). Окружности вещественного и чисто мнимого радиуса изображаются точками внешней и внутренней (по отношению к квадрике Дарбу) области пространства P^3 соответственно; пучки окружностей — прямыми в P^3, связки окружностей — плоскостями. При этом гиперболические и эллиптические пучки изображаются, соответственно, прямыми, пересекающими и не пересекающими квадрику Дарбу; параболические пучки — прямыми, касающимися квадрики Дарбу; параболические связки окружностей — плоскостями, касающимися квадрики Дарбу; ортогональные пучки окружностей — прямыми, сопряженными относительно квадрики Дарбу. Точки, принадлежащие окружности C, изображаются точками квадрики Дарбу, лежащими на пересечении этой квадрики с плоскостью, полярно сопряженной образу точки C относительно Q, и т.д. Три семейства окружностей, образующих три-ткань, изображаются, следовательно, тремя кривыми (мы будем обозначать их ℓ_i, $i = 1, 2, 3$), а три окружности ткани из разных семейств, проходящие через точку M, изображаются тремя точками линий ℓ_i, лежащими в одной и той же касательной плоскости к квадрике Дарбу в точке M.

Наша теория обобщает результаты В. Лазаревой, которая методом Картана изучала ткани, образованные пучками окружностей, см. [5], [6]. Подвижной репер, построенный Лазаревой, был использован М. Акивисом в [7] для нахождения условия алгебраизуемости тройки пространственных кривых. Мы строим аналогичный репер и используем обозначения этих работ.

1. Подвижной репер, адаптированный к тройке кривых.

Напомним, что проективный репер в P^3 состоит из четырех точек общего положения $\{A_\alpha\}(\alpha,\ \beta,\ \gamma = 0, 1, 2, 3)$. Мы рассматриваем так называемый подвижной репер, то есть множество всех проективных реперов пространства. Инфинитезимальные перемещения подвижного репера запишем в обычном виде:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1}$$

где дифференциальные формы ω_α^β зависят от 16-ти параметров — однородных координат точек $\{A_\alpha\}$ относительно некоторого неподвижного репера и удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства:

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta. \tag{2}$$

Здесь d означает внешнее дифференцирование, $\wedge$ — внешнее умножение.

Рассмотрим в P^3 3 гладкие кривые ℓ_i $(i = 1, 2, 3)$. Поместим вершину A_i репера на кривую ℓ_i и предположим, что плоскость $[A_1 A_2 A_3]$ трансверсальна кривым ℓ_i.

Так как точка A_i описывает кривую ℓ_i, то в силу (1) из трех форм ω_i^j, i, j, $k = 1, 2, 3$, при фиксированном i только одна линейно независимая. При этом, так как плоскость $[A_1\, A_2\, A_3]$ трансверсальна кривым ℓ_i, то $\omega_i^0 \neq 0$, и можно положить

$$\omega_i^j = \lambda_i^j\, \omega_i^0. \tag{3}$$

Тогда

$$dA_i = \omega_i^i A_i + \omega_i^0 B_i, \tag{4}$$

где

$$B_i = A_0 + \lambda_i^j\, A_j + \lambda_i^k\, A_k. \tag{5}$$

Дифференцируя уравнения (3), получим квадратичные уравнения, из которых найдем:

$$d\lambda_i^k + \lambda_i^k(\omega_k^k - \omega_0^0) + \omega_0^k + \lambda_i^j(\lambda_j^k - \lambda_i^k)\omega_j^0 - (\lambda_i^k)^2\omega_k^0 = 2\mu_i^k\omega_i^0. \tag{6}$$

Верны

Теорема 1. [5, 7] *Величины μ_i^k являются относительными проективными инвариантами тройки кривых ℓ_i. Кривая ℓ_i является прямой тогда и только тогда, когда $\mu_i^j = \mu_i^k = 0$ (здесь все индексы различны).*

Теорема 2. [7] *Для того, чтобы тройка кривых ℓ_i принадлежала одной нормкривой пространства P^3, необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\mu_2^1 + \mu_1^2 = 0, \quad \mu_3^1 + \mu_1^3 = 0, \quad \mu_2^3 + \mu_3^2 = 0. \tag{7}$$

Как показано в [5], семейство реперов A_α можно сузить так, чтобы выполнялись равенства $\lambda_j^i + \lambda_k^i = 0$, в которых все индексы различны. Как и в [5], обозначим

$$\lambda_2^1 = -\lambda_3^1 = \lambda^1, \quad \lambda_3^2 = -\lambda_1^2 = \lambda^2, \quad \lambda_1^3 = -\lambda_2^3 = \lambda^3. \tag{8}$$

В результате канонизации уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= -\lambda^2\,\omega_1^0, & \omega_1^3 &= \lambda^3\,\omega_1^0,\\
\omega_2^3 &= -\lambda^3\,\omega_2^0, & \omega_2^1 &= \lambda^1\,\omega_2^0,\\
\omega_3^1 &= -\lambda^1\,\omega_3^0, & \omega_3^2 &= \lambda^2\,\omega_3^0,
\end{aligned} \tag{9}$$

а уравнения (6) приведутся к виду [7]:

$$\begin{aligned}
d\lambda^1+\lambda^1(\omega_1^1-\omega_0^0) &= (\mu_2^1+\lambda^1\lambda^2)\omega_2^0+(\mu_3^1-\lambda^1\lambda^3)\omega_3^0,\\
d\lambda^2+\lambda^2(\omega_2^2-\omega_0^0) &= (\mu_3^2+\lambda^2\lambda^3)\omega_3^0+(\mu_1^2-\lambda^1\lambda^2)\omega_1^0,\\
d\lambda^3+\lambda^3(\omega_3^3-\omega_0^0) &= (\mu_1^3+\lambda^3\lambda^1)\omega_1^0+(\mu_2^3-\lambda^3\lambda^2)\omega_2^0,\\
\omega_0^1 &= (\lambda^1)^2\omega_1^0+(\mu_2^1-\lambda^1\lambda^2)\omega_2^0-(\mu_3^1+\lambda^1\lambda^3)\omega_3^0,\\
\omega_0^2 &= (\lambda^2)^2\omega_2^0+(\mu_3^2-\lambda^2\lambda^3)\omega_3^0-(\mu_1^2+\lambda^2\lambda^1)\omega_1^0,\\
\omega_0^3 &= (\lambda^3)^2\omega_3^0+(\mu_1^3-\lambda^3\lambda^1)\omega_1^0-(\mu_2^3+\lambda^3\lambda^2)\omega_2^0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Точки B_i, лежащие на касательных к кривым ℓ_i, запишутся так (см. (5)):

$$B_1 = A_0-\lambda^2A_2+\lambda^3A_3, B_2 = A_0-\lambda^3A_3+\lambda^1A_1, B_3 = A_0-\lambda^1A_1+\lambda^2A_2. \tag{11}$$

Геометрический смысл канонизации: точка A_0 помещена в полюс плоскости $\pi_0=[A_1A_2A_3]$ относительно линейчатой квадрики K с образующими $[A_iB_i]$ [6].

В результате канонизации величины λ^i становятся относительными инвариантами, геометрический смысл обращения их в нуль найден в [5]. В частности, в случае, когда ℓ_i прямые, обращение всех λ^i в нуль означает, что прямые ℓ_i проходят через одну точку. Этот результат можно усилить. Как видно, из формул (10), соотношения $\lambda^i=0$ влекут равенства $\mu_i^k=0$. Это обстоятельство отражает следующий геометрически очевидный результат: если кривые ℓ_i таковы, что касательные к ним в любой тройке точек A_i пересекаются в одной точке, то такие кривые ℓ_i являются прямыми.

Непосредственным вычислением доказывается также следующее

Предложение 3. *Соприкасающаяся плоскость π_i к кривой ℓ_i в текущей точке A_i имеет вид $[A_iB_iC_i]$, где*

$$C_1 = -\mu_1^2A_2+\mu_1^3A_3,\ C_2 = -\mu_2^3A_3+\mu_2^1A_1,\ C_3 = -\mu_3^1A_1+\mu_3^2A_2.$$

В репере A_α плоскости π_i определяются соответственно уравнениями:

$$\begin{aligned}
(\mu_1^3\lambda^2-\mu_1^2\lambda^3)x^0+\mu_1^3x^2+\mu_1^2x^3 &= 0,\\
(\mu_2^1\lambda^3-\mu_2^3\lambda^1)x^0+\mu_2^3x^1+\mu_2^1x^3 &= 0,\\
(\mu_3^2\lambda^1-\mu_3^1\lambda^2)x^0+\mu_3^2x^1+\mu_3^1x^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Плоскости π_i и $\pi_0 = [A_1A_2A_3]$ принадлежат одной связке тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\mu_1^3\mu_2^1\mu_3^2 + \mu_2^3\mu_1^2\mu_3^1 = 0. \qquad (13)$$

Из предложения 3 и теоремы 2 вытекает

Теорема 4. *Для того, чтобы тройка кривых ℓ_i принадлежала одной нормкривой пространства P^3, необходимо и достаточно, чтобы плоскости π_i и $\pi_0 = [A_1A_2A_3]$ принадлежали одной связке с вершиной в точке Брианшона треугольника $A_1A_2A_3$ относительно коники $\pi_0 \cap K$.*

Доказательство сводится к непосредственному вычислению.

2. Уравнение три-ткани W, образованной семействами окружностей.

Пусть квадрика Дарбу Q задана в подвижном репере A_α уравнением

$$g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0. \qquad (14)$$

Коэффициенты $g_{\alpha\beta} \equiv g_{\beta\alpha}$ являются функциями параметров подвижного репера и удовлетворяют уравнениям:

$$dg_{\alpha\beta} - g_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma - g_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma = \theta g_{\alpha\beta}. \qquad (15)$$

Напомним, что мы рассматриваем три-ткань W, образованную тремя семействами окружностей. Семейства окружностей, образующих три-ткань, изображаются в P^3 кривыми ℓ_i, а три окружности ткани из разных семейств, проходящие через точку M, изображаются тремя точками линий ℓ_i, лежащими в одной и той же касательной плоскости к квадрике Дарбу. Поэтому мы сужаем семейство реперов, оставляя только такие реперы, у которых плоскость $\pi_0 = [A_1A_2A_3]$ касается квадрики Дарбу Q.

Поместим в точку касания точку $M = A_1 + A_2 + A_3$ (еще одно сужение семейства реперов). Подставляя координаты точки M в уравнение (14), получим соотношение

$$g_{11} + g_{22} + g_{33} + 2g_{12} + 2g_{13} + 2g_{23} = 0,$$

которое можно записать в виде

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0, \qquad (16)$$

введя обозначения

$$g_\alpha = g_{\alpha 1} + g_{\alpha 2} + g_{\alpha 3}. \qquad (17)$$

Напомним, что полярное соответствие точек $A(x^\alpha)$ $B(y^\alpha)$ относительно квадрики Q определяется равенством $g_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta = 0$. Кратко это условие записывают в виде $(AB) = 0$. В частности, для базисных точек условие $(A_\alpha B_\beta) = 0$ эквивалентно $g_{\alpha\beta} = 0$.

Так как плоскость $\pi_0 = [A_1A_2A_3]$ касается квадрики Q в точке $M = A_1 + A_2 + A_3$, то эта точка полярно сопряжена каждой точке плоскости π_0. Это эквивалентно условиям $(MA_1) = 0$, $(MA_2) = 0$, $(MA_3) = 0$, что в силу обозначений (17) дает

$$g_i = 0. \tag{18}$$

Теперь, используя деривационные уравнения (1), запишем дифференциал точки $M = A_1 + A_2 + A_3$:

$$dM = (\omega_1^0 + \omega_2^0 + \omega_3^0)A_0 + (...)A_1 + (...)A_2 + (...)A_3.$$

Напомним, что точка M лежит на квадрике Q, а плоскость $\pi_0 = [A_1A_2A_3]$ касается Q в точке M. Поэтому в в правой части коэффициент при A_0 должен равняться нулю:

$$\omega_1^0 + \omega_2^0 + \omega_3^0 = 0. \tag{19}$$

Мы получили дифференциальное уравнение рассматриваемой ткани W в подвижном репере.

3. Структурные уравнения три-ткани W, образованной семействами окружностей.

Продифференцируем равенства (18), пользуясь уравнениями (15). После преобразований с учетом (18) и (19), получим:

$$g_{ik}\tilde{\omega}^k + g_0\omega_i^0 = 0, \tag{20}$$

где введено обозначение

$$\tilde{\omega}^k = \omega_1^k + \omega_2^k + \omega_3^k. \tag{21}$$

В силу (18) из уравнений (20) только 2 независимых. С учетом (18) первые 2 из них перепишем в виде:

$$g_{11}(\tilde{\omega}^1 - \tilde{\omega}^3) + g_{12}(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}^3) + g_0\omega_1^0 = 0,$$
$$g_{21}(\tilde{\omega}^1 - \tilde{\omega}^3) + g_{22}(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}^3) + g_0\omega_2^0 = 0.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эта система имеет решение

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^1 - \tilde{\omega}^3 &= \frac{g_0}{\Delta}(g_{23}\omega_1^0 - g_{12}\omega_3^0), \\ \tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}^3 &= \frac{g_0}{\Delta}(g_{13}\omega_2^0 - g_{12}\omega_3^0), \end{aligned} \tag{22}$$

где обозначено

$$\varDelta = g_{12}g_{13} + g_{12}g_{23} + g_{13}g_{23} \equiv g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 \equiv g_{11}g_{33} - (g_{13})^2 \equiv g_{22}g_{33} - (g_{23})^2. \tag{23}$$

Равенства (22) запишем в более симметричной форме, введя новую форму $\tilde{\theta}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^1 &= \tilde{\theta} + \frac{g_0}{\varDelta} g_{23}\omega_1^0, \\ \tilde{\omega}^2 &= \tilde{\theta} + \frac{g_0}{\varDelta} g_{13}\omega_2^0, \\ \tilde{\omega}^3 &= \tilde{\theta} + \frac{g_0}{\varDelta} g_{12}\omega_3^0. \end{aligned} \tag{24}$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что внешнее дифференцирование уравнения (19) в силу (24) приводит к тождеству и справедливы уравнения

$$d\omega_1^0 = \omega_1^0 \wedge \omega, \quad d\omega_1^0 = \omega_1^0 \wedge \omega, \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0^0 - \tilde{\theta} + \omega_1^2 + \omega_2^1 + \omega_1^3 + \omega_3^1 + \omega_2^3 + \omega_3^2 = \\ &= \omega_0^0 - \tilde{\theta} + (\lambda^3 - \lambda^2)\omega_1^0 + (\lambda^1 - \lambda^3)\omega_2^0 + (\lambda^2 - \lambda^1)\omega_3^0. \end{aligned} \tag{26}$$

Согласно теории [8], уравнения (25) являются структурными уравнениями рассматриваемой ткани W, а форма ω является ее формой кривизны.

4. Кривизна три-ткани W, образованной семействами окружностей.

Непосредственным вычислением доказываем следующие утверждения.

Лемма 1.

$$\begin{aligned} dg_0 =& g_0(\theta + \omega_0^0) + g_{0k}\tilde{\omega}^k = \\ =& g_0(\theta + \tilde{\theta} + \omega_0^0) + \frac{g_0}{\varDelta}(g_{01}g_{23}\omega_1^0 + g_{02}g_{13}\omega_2^0 + g_{03}g_{12}\omega_3^0). \end{aligned} \tag{27}$$

Лемма 2.

$$\begin{aligned} d\varDelta =& 2\varDelta(\theta + 2\tilde{\theta} - (\omega_1^2 + \omega_2^1 + \omega_1^3 + \omega_3^1 + \omega_2^3 + \omega_3^2)) + \\ &+ 2g_{23}(g_{02} + g_{03})\omega_1^0 + 2g_{13}(g_{01} + g_{03})\omega_2^0 + 2g_{12}(g_{01} + g_{02})\omega_3^0. \end{aligned} \tag{28}$$

С помощью формул (27) и (28) доказывается

Лемма 3. *Внешнее дифференцирование уравнений (24) дает единственное уравнение:*

$$\begin{aligned} d\tilde{\theta} =& -\frac{g_0}{\varDelta}(g_{11}\lambda^1 + g_{22}\lambda^2 + g_{33}\lambda^3)\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 - \\ &- \frac{g_0}{\varDelta^2}(g_{01}g_{23}(g_{13} - g_{12}) + g_{02}g_{13}(g_{12} - g_{23}) + g_{03}g_{12}(g_{23} - g_{13}))\omega_1^0 \wedge \omega_2^0. \end{aligned} \tag{29}$$

Наконец, с помощью этой формулы и предыдущих продифференцируем форму ω, данную формулой (26). После вычислений получается

Теорема 5. *Форма кривизны ткани W удовлетворяет уравнению*

$$d\omega = b\omega_1^0 \wedge \omega_2^0,$$

где b — кривизна ткани W — вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} b = &-2(\mu_1^2 + \mu_1^2 + \mu_1^3 + \mu_3^1 + \mu_3^2 + \mu_2^3) + \\ &+ \frac{g_0}{\Delta}(\lambda^1(g_{22} + g_{33}) + \lambda^2(g_{11} + g_{33}) + \lambda^3(g_{11} + g_{22})) + \\ &+ \frac{g_0}{\Delta^2}(g_{01}g_{23}(g_{13} - g_{12}) + g_{02}g_{13}(g_{12} - g_{23}) + g_{03}g_{12}(g_{23} - g_{13})). \end{aligned} \tag{30}$$

В случае, если $\mu_j^i = 0$ (кривые ℓ_i являются прямыми, то есть ткань W состоит из пучков окружностей) эта формула совпадает с найденной в работе [5].

5. Подход к классификации регулярных три-тканей, образованных семействами окружностей.

Три-ткань W является регулярной, если ее кривизна равна нулю [1].

Регулярные круговые три-ткани ($\mu_j^i = 0$), как уже было отмечено выше, полностью описаны.

Равенства $\lambda^i = 0$ влекут $\mu_j^i = 0$ (см. выше), следовательно, этот класс также не представляет интереса.

Как видно из формулы (30), кривизна представляет собой сумму трех слагаемых, принадлежащих, соответственно, дифференциальным окрестностям второго, первого и нулевого порядков. Поэтому в классе регулярных тканей ($b = 0$) естественным образом выделяются 3 подкласса, определяемые, соответственно, условиями:

$$\mu_1^2 + \mu_1^2 + \mu_1^3 + \mu_3^1 + \mu_3^2 + \mu_2^3 = 0, \tag{31}$$

$$\lambda^1(g_{22} + g_{33}) + \lambda^2(g_{11} + g_{33}) + \lambda^3(g_{11} + g_{22} = 0, \tag{32}$$

$$g_{01}g_{23}(g_{13} - g_{12}) + g_{02}g_{13}(g_{12} - g_{23}) + g_{03}g_{12}(g_{23} - g_{13} = 0. \tag{33}$$

В связи с этим возникают следующие задачи.

Задача 1. Выяснить геометрический смысл каждого из условий (31) — (33) и описать соответствующие классы регулярных тканей. Например, условие регулярности первого из этих классов состоит из двух равенств — (31) и

$$\begin{aligned} &\Delta(\lambda^1(g_{22} + g_{33}) + \lambda^2(g_{11} + g_{33}) + \lambda^3(g_{11} + g_{22})) + \\ &+ (g_{01}g_{23}(g_{13} - g_{12}) + g_{02}g_{13}(g_{12} - g_{23}) + g_{03}g_{12}(g_{23} - g_{13})) = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Последнее равенство описывает все регулярные круговые ткани. Оно исследовалось в [5], но его геометрический смысл до сих пор не выяснен, хотя все регулярные круговые ткани описаны! Поэтому возникает

Задача 2. Найти геометрический смысл условия (34), в частности, при условиях $\mu^i_j = 0$.

К равенствам (31) и (34) следует добавить их дифференциальные следствия. Заметим, что дифференцирование (31) не даст новых условий на величины λ^i и $g_{\alpha\beta}$. Этот факт вытекает из легко доказываемого

Предложения 6. *Система (10) правильно продолжаема.*

Задача 3. Найти регулярные ткани в случае (7) (кривые ℓ_i принадлежат одной кубической нормкривой).

Задача 4. Найти необходимое и достаточное условие принадлежности кривых ℓ_i одной кубической поверхности и описать регулярные ткани такого типа.

В заключение укажем обзор [9], посвященный дифференциальной геометрии окружностей и сфер, см. также §6 в [10].

Список литературы

1. Blaschke, W.: *Birkhauser Einfürung in die Geometrie der Waben*, Verlag/Basel–Stuttgart. Basel, 1955. Русский перевод: Бляшке, В. *Введение в геометрию тканей.* М., Физматгиз, 1959.
2. Шелехов, А.М.: *О три-тканях, образованных пучками окружностей.* Современная математика и ее приложения (Итоги науки и техники ВИНИИ). **32** (2005), 7–28.
3. Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М.: *О триангуляциях плоскости пучками коник.* Матем. сб. **198** (2007), N 11, 107–134.
4. Лазарева, В.Б. *Классификация регулярных круговых три-тканей с точностью до круговых преобразований.* Фундаментальная и прикладная математика. Материалы Международной научной конференции "Лаптевские чтения – 2009 посвящённой 100-летию со дня рождения Г. Ф. Лаптева (Москва–Тверь, 25–28 августа 2009 г.). Том 16, выпуск 1, часть 1, 2010, с. 95-107.
5. Лазарева, В.Б.: *Три-ткани, образованные семействами окружностей на плоскости.* Дифференциальная геометрия, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1977, 49–64 (РЖМат, 1977, 12А780).
6. Лазарева, В.Б.: *Три-ткани на двумерной поверхности в триаксиальном пространстве.* Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Калининград, Калининский гос. ун-т, 1979, N 10, 54–79 (РЖМат, 1980, 1А820).
7. Акивис, М.А.: *Об условии алгебраизуемости тройки кривых в трехмерном проективном пространстве.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1987, 129–136 (РЖМат, 1987, 7А701).
8. Лазарева, В.Б.; Уткин, А.А.; Шелехов, А.М. *К теории криволинейных три-тканей.* Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современная математика и ее приложения. Т. 124, Москва, 2010, стр. 63-114.
9. Акивис, М.А. Конформно-дифференциальная геометрия. Итоги науки. Геометрия, 1963. Изд. ВИНИТИ АН СССР, 1965, с. 108-137.
10. Гейдельман, Р.М. Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных однородных пространствах. Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1965. Изд. ВИНИТИ АН СССР, 1967, с. 323-374.

Александр Михайлович Шелехов
Тверской государственный университет, Тверь, Россия
E-mail: amshelekhov@rambler.ru

Alexander M. Shelekhov

Three-webs formed by families of circles.

The structure equations and the curvature of the 3-web formed by 3 families of circles are found. Some problems arising under the classification of regular webs of this type are formulated.