Автоморфизмы пространственно-временного многообразия Римана-Картана

Владимир Иванович Паньженский

Аннотация Доказано, что размерность группы Ли автоморфизмов пространственно-временного многообразия Римана-Картана $(M^4, g, \widetilde{\nabla})$ не превосходит 8. Если связность $\widetilde{\nabla}$ полусимметрическая или кососимметрическая, то максимальная размерность группы равна 7.

Ключевые слова Многообразие Римана-Картана, автоморфизмы, группа Ли.

УДК 514.76

Введение. Гладкое n - мерное многообразие M называется многообразием Римана-Картана, если на M задана (псевдо) риманова метрика g и линейная связность $\widetilde{\nabla}$ с кручением $\widetilde{S} \neq 0$, согласованная с $g : \widetilde{\nabla} g = 0$ [1]. Если $n = 4$, а g - псевдориманова метрика сигнатуры $(+---)$, то M назовем пространственно-временным многообразием Римана-Картана.

Диффеоморфизм $\varphi : M \longrightarrow M$ называется автоморфизмом многообразия Римана-Картана, если он оставляет инвариантным g и $\widetilde{\nabla}$. Так как $\widetilde{\nabla} = \nabla + \widetilde{T}$, где ∇ - связность Леви-Чивита метрики g, а $\widetilde{T}$ ее тензор деформации и из инвариантности g следует инвариантность ∇ [2], то связность $\widetilde{\nabla}$ инвариантна тогда и только тогда, когда инвариантен тензор деформации $\widetilde{T}$. Очевидно, что инвариантность $\widetilde{T}$ эквивалентна инвариантности ковариантного тензора деформации T. Из инвариантности $\widetilde{T}(T)$ следует инвариантность $\widetilde{S}(S)$ и наоборот. Таким образом множество всех автоморфизмов многообразия Римана-Картана либо совпадает с группой движений (псевдо) риманова многообразия (M, g) либо является ее подгруппой Ли, оставляющей инвариантным тензорное поле T и, следовательно, имеет размерность $r \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

В работе [3] нами доказано, что *размерность группы Ли автоморфизмов n - мерного многообразия Римана-Картана меньше $\frac{n(n+1)}{2}$ и равна $\frac{n(n+1)}{2}$ только при $n = 3$.* Из этого утверждения следует, что размерность группы автоморфизмов пространственно-временного многообразия Римана-Картана меньше 10. В настоящей работе мы докажем, что размерность группы автоморфизмов не может превосходить 8, а в случае полусимметричности или кососимметричности связности максимальная размерность группы автоморфизмов пространственно-временного многообразия Римана-Картана равна 7.

1. Теорема 1. Размерность группы Ли автоморфизмов пространственно-временного многообразия Римана-Картана не превосходит 8. Если связность $\tilde{\nabla}$ полусимметрическая или кососимметрическая, то размерность группы не превосходит 7.

Доказательство. Пусть G группа Ли автоморфизмов пространственно-временного многообразия Римана-Картана M. Стационарная подгруппа точки x_0 индуцирует группу изотропий G_0 в касательном пространстве $\mathbb{E} = T_{x_0}M$, которая является подгруппой псевдоортогональных преобразований псевдоевклидова векторного пространства $\mathbb{E} = \mathbb{E}^4_{1,3}$. Так как тензор кручения $\tilde{S}$ инвариантен относительно G, то значение тензорного поля $\tilde{S}$ в точке x_0 является ненулевым тензором на $\mathbb{E}$ инвариантном относительно G_0. Рассмотрим $\tilde{S}$ как кососимметрическое отображение $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$. Пусть ξ элемент алгебры Ли псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}$, а $\varphi_t = expt\xi$ - однопараметрическая подгруппа преобразований, порожденная ξ. Тогда ξ принадлежит алгебре Ли g_0 группы Ли G_0 если и только если φ_t оставляет инвариантным тензор $\tilde{S}$, т.е.

$$\tilde{S}(\varphi_t u, \varphi_t v) = \varphi_t \tilde{S}(u, v), u, v \in \mathbb{E}, t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по t при $t = 0$, получаем

$$\tilde{S}(\xi u, v) + \tilde{S}(u, \xi v) = \xi \tilde{S}(u, v) \tag{2}$$

Пусть (e_1, e_2, e_3, e_4) - ортонормированный базис в $\mathbb{E}$ и S^i_{jk} и ξ^i_j - компоненты $\tilde{S}$ и ξ в этом базисе. Тогда уравнения (2) примут вид

$$S^i_{pk}\xi^p_j + S^i_{jp}\xi^p_k - S^q_{jk}\xi^i_q = 0 \tag{3}$$

или

$$(S^i_{pk}\delta^q_j + S^i_{jp}\delta^q_k - S^q_{jk}\delta^i_p)\xi^p_q = 0 \tag{4}$$

где δ^i_j - символ Кронекера (единичная матрица, тождественный линейный оператор). Таким образом мы имеем систему линейных уравнений (4) относительно неизвестных ξ^p_q элементов алгебры Ли g_0 группы Ли G_0 псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}^4_{1,3}$. Матрица, составленная из элементов этой алгебры имеет вид

$$(\xi^p_q) = \begin{pmatrix} 0 & \xi^1_2 & \xi^1_3 & \xi^1_4 \\ \xi^1_2 & 0 & \xi^2_3 & \xi^2_4 \\ \xi^1_3 & -\xi^2_3 & 0 & \xi^3_4 \\ \xi^1_4 & -\xi^2_4 & -\xi^3_4 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Учитывая косую симметрию по j, k выражения стоящее в скобках системы (4) и вид матрицы (5) мы получаем систему из 24 уравнений относительно 6 неизвестных переменных $\xi^p_q (p < q)$.Выписывая эту систему нетрудно убедиться, что ее минимальный ранг равен 2. Действительно, для любой ненулевой компоненты S^i_{jk} мы можем указать два линейно независимых уравнения системы (4). Пусть, например $S^1_{23} \neq 0$, тогда уравнения системы (4) занумерованных индексами $i = 1, j = 2, k = 4$ и $i = 1, j = 3, k = 4$ имеют вид

$$... + 0 \cdot \xi^2_4 + S^1_{23} \cdot \xi^3_4 = 0$$

$$... + S^1_{32} \cdot \xi^2_4 + 0 \cdot \xi^3_4 = 0$$

и, следовательно, линейно независимы. Если $S^1_{12} \neq 0$ то имеем два линейно независимых уравнения, занумерованных индексами $i = 1, j = 1, k = 3$ и $i = 1, j = 1, k = 4$:

$$... + S^1_{12} \cdot \xi^2_3 + 0 \cdot \xi^2_4 + ... = 0$$

$$... + 0 \cdot \xi^2_3 + S^1_{12} \cdot \xi^2_4 + ... = 0$$

и т.д. Так как ранг системы (4) не меньше двух, то размерность группы изотропии G_0 не больше четырех, а размерность всей группы автоморфизмов не более 8.

Связность $\tilde{\nabla}$ является полусимметрической, если ее тензор кручения $\tilde{S}$ имеет вид

$$S^i_{jk} = \frac{1}{n-1} \cdot (\delta^i_j \eta_k - \delta^i_k \eta_j) \tag{6}$$

где $\eta_k = S^p_{pk}$. Подставляя (6) в (4), получим

$$\frac{1}{n-1} \cdot (\delta^i_p \eta_k \delta^q_j - \delta^i_k \eta_p \delta^q_j + \delta^i_j \eta_p \delta^q_k - \delta^i_p \eta_j \delta^q_k - \delta^q_j \eta_k \delta^i_p + \delta^q_k \eta_j \delta^i_p) \xi^p_q = 0$$

или

$$(-\delta^i_k \delta^q_j + \delta^i_j \delta^q_k) \eta_p \xi^p_q = 0 \tag{7}$$

Докажем, что ранг системы (7) не меньше 3. Действительно, для каждой ненулевой компоненты η_p мы можем указать три линейно независимых уравнения системы (7). Пусть, например, $\eta_1 \neq 0$. Тогда уравнения системы (7) занумерованных индексами $i = j = 1, k = 2, 3, 4$ имеют вид:

$$(-\delta^1_k\delta^q_1 + \delta^q_k)\eta_1\xi^1_q + (-\delta^1_k + \delta^1_k)\eta_p\xi^p_1 + ... = 0$$

или

$$\delta^q_k\eta_1\xi^1_q + ... = 0$$

и, очевидно, линейно независимы. Если $\eta_2 \neq 0$, то уравнения при $i = j = 2, k = 1, 3, 4$:

$$... + (-\delta^2_k\delta^q_2 + \delta^q_k)\eta_2\xi^2_q + (-\delta^2_k + \delta^2_k)\eta_p\xi^p_2 + ... = 0$$

или

$$... + \delta^q_k\eta_2\xi^2_q + ... = 0$$

линейно независимы и т.д. Так как ранг системы (7) не меньше 3, то размерность группы изотропии G_0 не более 3, а размерность группы автоморфизмов не более 7.

Связность $\tilde{\nabla}$ называется кососимметрической если ее ковариантный тензор деформации T кососимметричны по своим аргументам. Условия кососимметричности тензора T является необходимым и достаточным условием совпадения симметрической части связности $\tilde{\nabla}$ со связностью Леви-Чивита ∇ метрики g [4]. В этом случае $T_{ijk} = \frac{1}{2}S_{ijk}$ и ковариантный тензор кручения так же кососимметричен по всем индексам. Поэтому компоненты S_{ijk} как и компоненты S^i_{jk} вычисленные в точке x_0. содержащие два одинаковых индекса равны нулю. Учитывая этот факт, мы можем для любой ненулевой компоненты $S^i_{jk}, i \neq j \neq k$ указать три линейно независимых уравнения системы (4). Пусть, например, $S^1_{23} \neq 0$. Рассмотрим подсистему системы (4) уравнения которой занумерованы индексами:$i = 4, j = 1, k = 2; i = 4, j = 1, k = 3$ и $i = 4, j = 2, k = 3$. Матрица состоящая из столбцов при неизвестных ξ^p_q с индексами $p = 1, q = 4; p = 2, q = 3$ и $p = 3, q = 4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & S^3_{12} \\ 0 & S^2_{13} & 0 \\ -S^1_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, очевидно, является невырожденной и , следовательно, эти уравнения линейно независимы. Таким образом и в этом случае размерность группы автоморфизмов пространственно-временного многообразия не превосходит 7.

2. Теорема 2. Если связность $\tilde{\nabla}$ является полусимметрической или кососимметрической, то максимальная размерность группы Ли автоморфизмов пространственно-временного многообразия Римана-Картана равна 7.

Доказательство. Рассмотрим псевдориманово четырехмерное многообразие M^4 с метрикой стационарной модели Вселенной [5]

$$ds^2 = dx^{0^2} - e^{2Hx^0} \cdot (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}), \tag{8}$$

где $x_0 = ct$, H - постоянная Хаббла красного смещения. Вычисляя тензор кривизны пространства M^4 убеждаемся в справедливости следующего равенства

$$R_{ijkl} = -H^2(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}), \tag{9}$$

где g_{ij} - компоненты метрического тензора g. Это означает, что M^4 является пространством постоянной секционной кривизны $k = -H^2$. Поэтому группа движений этого пространства имеет максимальную размерность 10.

Рассмотрим замкнутую подгруппу $\mathbb{G}^7$ группы движений $\mathbb{G}^{10}$, содержащую все движения пространственного сечения $\mathbb{E}^3$ и оставляющую инвариантным единичное векторное поле ортогональное $\mathbb{E}^3$. Операторы этой подгруппы имеют следующий вид

$$\partial_\alpha, -x^\beta\partial_\alpha + x^\alpha\partial_\beta, -\frac{1}{H}\partial_0 + x^\alpha\partial_\alpha (\alpha < \beta, \alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{10}$$

В (10) первые 6 векторных полей являются базисными операторами группы движений $\mathbb{G}^6$ евклидова пространства $\mathbb{E}^3$, а седьмое векторное поле найдено из условия инвариантности относительно этого поля метрики (8) пространства M^4 и единичного векторного поля, ортогонального $\mathbb{E}^3$. Для векторных полей (10) выписывая уравнения инвариантности ковариантного тензора деформации T

$$\xi^p\partial_p T_{ijk} + \partial_i\xi^p T_{pjk} + \partial_j\xi^p T_{ipk} + \partial_k\xi^p T_{ijp} = 0 \tag{11}$$

и интегрируя полученную систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций T_{ijk}, учитывая косую симметрию по последним двум индексам, находим компоненты тензора деформации, инвариантного относительно $\mathbb{G}^7$

$$T_{110} = T_{220} = T_{330} = -T_{101} = -T_{202} = -T_{303} = a \cdot e^{2Hx^0}, (a = const)$$

$$T_{123} = T_{231} = T_{312} = -T_{132} = -T_{213} = -T_{321} = b \cdot e^{3Hx^0}, (b = const)$$

остальные $T_{ijk} = 0$. Таким образом мы имеем пространственно-временное многообразие M^4 с группой автоморфизмов $\mathbb{G}^7$ максимальной размерности, базисные операторы которой имеют вид (10) и структурой Римана-Картана (g, T) где

$$g = dx^0 \otimes dx^0 - e^{-2Hx^0} \cdot (dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3) \qquad (12)$$

$$T = a \cdot e^{2Hx^0} \sum_{\alpha} dx^\alpha \otimes dx^\alpha \wedge dx^0 + b \cdot e^{3Hx^0} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \qquad (13)$$

Если $a = 0$, то T_{ijk} кососимметричен по всем индексам и мы имеем кососимметрическую связность. Если $b = 0$, то связность $\tilde{\nabla}$ является полусимметрической, так как, очевидно $T_{ijk} = \frac{1}{3} \cdot (g_{ik}\eta_j - g_{ij}\eta_k)$ при $\eta_j = (3r, o, o, o)$.

Замечание. В теории Эйнштейна-Картана кручение вводится для геометризации спиновой плотности материи. При этом спин представлен некоторым ковектором, который и должен определять кручение. В нашем случае на эту роль может претендовать полусимметрическая часть связности. Наличие кососимметрической части говорит о том, что кручение может и не представлять спина.

3. В пространственном сечении ($x^0 = const$), которое является евклидовым пространством E^3 тензор кручения имеет вид

$$S = s \cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \qquad (14)$$

где постоянную s мы назовем кручением пространства.

Исследуем закон параллельного перенесения вектора в связности $\tilde{\nabla}$ с кососимметрическим кручением (24). Находим коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ связности $\tilde{\nabla}$:

$$\tilde{\Gamma}_{12}^3 = \tilde{\Gamma}_{23}^1 = \tilde{\Gamma}_{31}^2 = -\tilde{\Gamma}_{21}^3 = -\tilde{\Gamma}_{32}^1 = -\tilde{\Gamma}_{13}^2 = s \qquad (15)$$

остальные нули. Уравнения параллельного переноса

$$\frac{dv^k}{dt} + \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} v^j = 0 \qquad (16)$$

вектора $v^k = v^k(t)$ вдоль кривой $x^k = x^k(t)$ примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{dv^1}{dt} + s\left(\frac{dx^2}{dt}v^3 - \frac{dx^3}{dt}v^2\right) = 0 \\ &\frac{dv^2}{dt} + s\left(\frac{dx^3}{dt}v^1 - \frac{dx^1}{dt}v^3\right) = 0 \\ &\frac{dv^3}{dt} + s\left(\frac{dx^1}{dt}v^2 - \frac{dx^2}{dt}v^1\right) = 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

Исследуем подробнее параллельное перенесение, например, вектора $v(1, 0, 0)$ вдоль кривой $x^1 = 0, x^2 = 0, x^3 = t$ т.е. вдоль оси x^3 прямоугольной декартовой системы координат в E^3. Уравнения (27) в этом случае выглядят так:

$$\frac{dv^1}{dt} - sv^2 = 0$$

$$\frac{dv^2}{dt} + sv^1 = 0 \qquad (18)$$

$$\frac{dv^3}{dt} = 0$$

Интегрируя систему (28), находим ее общее решение

$$v^1 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} cos(st - \varphi_0)$$

$$v^2 = -\sqrt{c_1^2 + c_2^2} sin(st - \varphi_0) \qquad (19)$$

$$v^3 = c_3,$$

где $\varphi_0 = arctg\frac{c_2}{c_1}$.

Из начальных условий следует, что $c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0$. Поэтому при параллельном переносе конец вектора v описывает винтовую линию

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}\{cos(st), sin(st), t\}, \qquad (20)$$

лежащую на прямом геликоиде, который заметается осью x^1 при параллельном переносе ее вдоль оси x^3.

Список литературы

1. И. А. Гордеева, В. И. Паньженский, С. Е. Степанов. Многообразия Римана-Картана // М. Итоги науки и техники, 2009. - Т.123. - С. 110 – 141.
2. Л. П. Эйзенхард. Непрерывные группы преобразований // М. ИЛ – 1947.
3. М. А. Марко, В. И. Паньженский. О группе автоморфизмов структуры Римана-Картана // Proce. of the Inter. Geom. Cen. 2009, Vol.2, №4. P. 51 – 56.
4. К. Яно, С. Бохнер. Кривизна и числа Бетти // М. ИЛ – 1957.
5. Я. Б. Зельдович, Н. Д. Новиков. Строение и эволюция Вселенной // М., Наука, 1975.

Владимир Иванович Паньженский

ПГПУ, Пенза, Россия

E-mail: kaf_geom@mail.ru.

Vladimir Panzhensky
PSPUniversity, Penza, Russia.

Automorphisms of Riemann-Cartan spatiotemporal diversity

It has been proved that the dimension of Lie group automorphisms of Riemann-Cartan spatiotemporal diversity $(M^4, g, \widetilde{\nabla})$ does not exceed 8. If the coherence $\widetilde{\nabla}$ is semisymmetric or antisymmetric, the maximum dimension of the group is equal to 7.