Связности Бервальда и Картана в обобщенном лагранжевом пространстве со специальной метрикой

Ольга Петровна Сурина

Аннотация Найдены канонические уравнения экстремалей, коэффициенты связности Бервальда и связности Картана обобщенного лагранжева пространства со специальной метрикой. Если лагранжиан является однородным, то связности Бервальда и Картана совпадают.

Ключевые слова Обобщенное лагранжево пространство, связность Бервальда, связность Картана.

УДК 514.76

Введение. В 1983 году в работе [1] Watanabe S., Ikeda S., Ikeda F. выделили класс обобщенных финслеровых пространств, метрика в которых определяется с помощью тензорного поля финслерова типа

$$g_{ij}(x,y) = e^{2\sigma(x,y)}\gamma_{ij}(x), \qquad (*)$$

где $\gamma_{ij}(x)$ - метрический тензор риманова пространства, а $\sigma(x,y)$ - скалярная функция на его касательном расслоении, однородная нулевой степени по координатам касательного вектора y. В 1984 году Ikeda S. в заметке [2] "О финслеровых метрических структурах гравитационного поля а затем и в работе [3] 1988 года "Теория поля в финслеровых пространствах"предложил при построении теории поля в качестве модельных рассматривать пространства с метрикой (*), при этом функция $\sigma(x,y)$ не обязательно должна иметь какую либо однородность по y. Так в работе [4] "Обобщенная теория гравитации и электромагнитные поля в пространстве с метрикой $e^{2\sigma(x,y)}\gamma_{ij}(x)$"1992 года Miron R., Watanabe S., рассматривается случай $\sigma = \sqrt{\gamma_{ps}y^p y^s}$.

В совместной с В.И. Паньженским статье автора [5] исследовались пространства с метрикой (*), считая, что σ является произвольной функцией аргумента $\gamma_{ps}y^p y^s$. В частности, в работе было установлено, что усеченная связность Картана совпадает со связностью Леви-Чивита римановой метрики $\gamma_{ij}(x)$.

В данной работе мы исследуем более широкий класс пространств чем в работе [5], умножая метрический тензор на произвольную функцию $\varphi = \varphi(x)$ базисного многообразия.

1. Пусть M - гладкое n - мерное многообразие, TM - касательное расслоение над M, $\pi : TM \to M$ - каноническая проекция, $x \to (x^i)$ - локальные координаты на M, $z = (x, y) \to (x^i, y^i)$ - естественные локальные координаты на TM $(i, j, ... = \overline{1, n})$.

Многообразие M называют обобщенным лагранжевым пространством L^n, если на M задано симметрическое невырожденное тензорное поле g финслерова типа - метрический тензор пространства. Компоненты $g_{ij}(x, y)$ этого поля являются гладкими функциями локальных координат касательного расслоения TM. Если функции $g_{ij}(x, y)$ являются однородными нулевой степени по координатам касательного вектора y, то имеем обобщенное финслерово пространство. Если на TM существует функция F порождающая g : $g_{ij} = \dot{\partial}^2_{ij}F, \dot{\partial}_i F = \frac{\partial F}{\partial y^i}$, то L^n является лагранжевым пространством, а если эта функция однородна второй степени по координатам вектора y, то L^n есть финслерово пространство.

Рассмотрим обобщенное лагранжево пространство $L^n = (M, g)$ метрический тензор которого имеет вид

$$g_{ij} = \varphi e^{2\sigma}\gamma_{ij} \tag{1}$$

где $\varphi = \varphi(x)$ - функция на M, $\sigma = \sigma(u), u = \frac{1}{2}\gamma_{ps}y^p y^s, \gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x)$ - метрический тензор риманова пространства $V^n = (M, \gamma)$. Экстремалями пространства L^n назовем экстремали лагранжиана $F = \frac{1}{2}g_{ij}y^i y^j$. Для метрики (1) имеем

$$F = \frac{1}{2}\varphi e^{2\sigma}\gamma_{ps}y^p y^s \tag{2}$$

Обозначим через $L = \frac{1}{2}e^{2\sigma}\gamma_{ps}y^p y^s = e^{2\sigma(u)} \cdot u$. Тогда $F = \varphi L$. Уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}) = 0 \quad (y^i = \dot{x}^i) \tag{3}$$

в развернутом виде выглядят следующим образом

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^i \partial x^j}\dot{x}^j - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\ddot{x}^j = 0 \tag{4}$$

Для лагранжиана $\varphi(x)L(u)$ эти уравнения имеют вид

$$\partial_i\varphi L + \varphi L'\frac{1}{2}\partial_i\gamma_{00} - [\partial_j\varphi L'\gamma_{0i} + \varphi(L''\frac{1}{2}\partial_j\gamma_{00}\gamma_{0i} + L'\partial_j\gamma_{0i})]\dot{x}^j -$$
$$-\varphi(L'\gamma_{ij} + L''\gamma_{0i}\gamma_{0j})\ddot{x}^j = 0 \tag{5}$$

Здесь и далее индекс "0"означает свертку с $\dot{x}$, т.е $\gamma_{0i} = \gamma_{pi}\dot{x}^p, \gamma_{00} = \gamma_{ps}\dot{x}^p\dot{x}^s$.

Чтобы привести эти уравнения к каноническому виду надо явно выразить $\ddot{x}^j$. Коэффициенты при $\ddot{x}^j$ образуют матрицу

$$f_{ij} = \varphi(L'\gamma_{ij} + L''\gamma_{0i}\gamma_{0j}) \tag{6}$$

Оказывается, что матрица (6) является невырожденной а обратная к ней имеет вид

$$f^{ik} = \frac{1}{\varphi L'}(\gamma^{ik} - \frac{L''}{L''\gamma_{00} + L'}\dot{x}^i\dot{x}^k) \tag{7}$$

Умножая (5) на f^{ik} и проводя необходимые преобразования, получим

$$\frac{1}{\varphi L'}(\gamma^{ik} - \frac{L''}{L''\gamma_{00} + L'}\dot{x}^i\dot{x}^k)(\partial_i\varphi L - \partial_j\varphi\dot{x}^j L'\gamma_{0i}) - (\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) = 0 \tag{8}$$

где Γ^k_{ij} - коэффициенты связности Леви-Чивита риманова метрического тензора γ_{ij}. Из (8) следует, что уравнения экстремалей (8) совпадают с уравнениями геодезических риманова пространства $V^n = (M, \gamma)$ если $\partial_i\varphi = 0$ т.е. когда $g_{ij} = e^{2\sigma}\gamma_{ij}$, что и было установлено в работе [6]. Уравнения (8) экстремалей пространства L^n запишем в окончательном виде

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{1}{\varphi}\{\frac{L'^2 + LL''}{L'^2 + L'L''\gamma_{00}}\partial_j\varphi\dot{x}^j\dot{x}^k - \gamma^{pk}\partial_p\varphi\frac{L}{L'}\} \tag{9}$$

Предположим теперь, что лагранжиан F и, следовательно L является однородным степени m относительно координат $\dot{x}^i$ скоростей точки x. В силу известной теоремы Эйлера имеем: $\dot{x}^k L_{\cdot k} = mL$ или $\dot{x}^k L'\gamma_{ok} = mL$, откуда

$$\frac{L}{L'} = \frac{\gamma_{00}}{m}, L' = \frac{mL}{\gamma_{00}} = \frac{\frac{1}{2}mL}{u}, L'' = \frac{1}{2}m\frac{L'u - L}{u^2}, \frac{L'^2 + LL''}{L'^2 + L'L''\gamma_{00}} = \frac{2}{m}.$$

Подставляя в (9), получим уравнения экстремалей для однородных лагранжианов

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{1}{\varphi m}\{2\partial_j\varphi\dot{x}^j\dot{x}^k - \gamma^{pk}\partial_p\varphi\gamma_{ps}\dot{x}^p\dot{x}^s\} = 0 \tag{10}$$

Уравнения (9) (и частный случай (10)) есть уравнения вида

$$\ddot{x}^k + 2G^k(x, \dot{x}) = 0 \tag{11}$$

Как известно (см, например [7]) величины $G^k_{ij} = \dot{\partial}^2_{ij} G^k$ -являются коэффициентами связности финслерова типа. В случае финслеровых пространств эти величины являются коэффициентами связности Бервальда. В нашем случае

$$G^k = \frac{1}{2}\Gamma^k_{ps}\dot{x}^p\dot{x}^s + \frac{1}{2\varphi}\{\frac{L'^2 + LL''}{L'^2 + L'L''\gamma_{00}}\partial_p\varphi\dot{x}^p\dot{x}^k - \gamma^{pk}\partial_p\varphi\frac{L}{L'}\} \tag{12}$$

Дифференцируя G^k дважды по координатам скорости получим коэффициенты связности Бервальда

$$G^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + T^k_{ij} \tag{13}$$

где T^k_{ij} - тензор деформации связности Леви-Чивита Γ^k_{ij}.

Мы не будем выписывать явное выражение тензора T^k_{ij}, а рассмотрим более простой случай, когда лагранжиан является однородным. В соответствии с (10), имеем

$$G^k = \frac{1}{2}\Gamma^k_{ps}\dot{x}^p\dot{x}^s + \frac{1}{2m\varphi}(2\partial_p\varphi\dot{x}^p\dot{x}^k - \gamma^{pk}\partial_p\varphi\gamma_{ps}\dot{x}^p\dot{x}^s) \tag{14}$$

Дифференцируя G^k, будем иметь

$$\dot{\partial}_i G^k \equiv G^k_{\cdot i} = \Gamma^k_{is}\dot{x}^s + \frac{1}{2m\varphi}(2\partial_i\varphi\dot{x}^k + 2\partial_p\dot{x}^p\delta^k_i - \gamma^{pk}\partial_p\varphi 2\gamma_{is}\dot{x}^s) \tag{15}$$

и

$$G^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \frac{1}{m\varphi}(\partial_i\varphi\delta^k_j + \partial_j\varphi\delta^k_i - \gamma^{pk}\partial_p\varphi\gamma_{ij}) \tag{16}$$

Таким образом, в случае однородности лагранжиана коэффициенты связности не зависят от координат вектора скорости (связность Бервальда [7]).

2. Далее, естественно возникает задача построения связности Картана для метрики (1). Каноническая проекция $\pi : TM \to M$ индуцирует над TM векторное расслоение $\pi^*(TM) = \bigcup\limits_{z\in TM} T_{\pi(z)}M$, которое называется финслеровым расслоением. Множество гладких сечений из TM в $\pi^*(TM)$ обозначим через $Sec\pi^*(TM)$. Каждое такое сечение $X : TM \to \pi^*(TM)$ есть финслерово векторное поле. Локальный базис $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ векторных полей на M. является локальным базисом и финслеровых векторных полей:

$X = \xi^i(x,y)\partial_i$. Финслерово векторное поле $y : z = (x,y) \to (z,y)$ называется фундаментальным: $y = y^i\partial_i$.

Связность финслерова типа на M определяется отображением

$$\nabla : SecT(TM) \times Sec\pi^*(TM) \to Sec\pi^*(TM),$$

которое каждому векторному полю X на TM и финслерову векторному полю Y ставит в соответствие финслерово векторное поле $Z = \nabla_X Y$ (ковариантная производная от Y вдоль X). Требуется чтобы отображение ∇ обладало известными свойствами определения линейной связности по Кошулю.

Пусть на TM задана инфинитезимальная связность, т.е. распределение $H : z \to H_z$ горизонтальных площадок и $\delta_i = \partial_i - H_i^k\dot{\partial}_k$ - локальный базис векторных полей этого распределения. Если (F_{ij}^k, C_{ij}^k) - коэффициенты связности ∇, определяемые разложениями

$$\nabla_i \equiv \nabla_{\delta_i}\partial_j = F_{ij}^k\partial_k, \dot{\nabla}_i \equiv \nabla_{\dot{\partial}_i}\partial_j = C_{ij}^k\partial_k,$$

то потребовав, чтобы $F_{ij}^k = F_{ji}^k, C_{ij}^k = C_{ji}^k$ и $\nabla_X g = 0$, для всех $X \in SecT(TM)$, получим

$$F_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{sk}(\delta_i g_{sj} + \delta_j g_{is} - \delta_s g_{ij}) \tag{18}$$

$$C_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{sk}(\dot{\partial}_i g_{sj} + \dot{\partial}_j g_{is} - \dot{\partial}_s g_{ij}) \tag{19}$$

Векторное поле X на TM называется горизонтальным, если $\nabla_X y = 0$, где $y = y^i\partial_i$ - фундаментальное финслерово векторное поле. Если отображение ставящее каждой точке $z \in TM$ множество всех горизонтальных векторов в этой точке является инфинитезимальной связностью, то связность ∇ называется регулярной. Регулярная связность порождает инфинитезимальную связность с коэффициентами $F_{i0}^k = F_{ip}^k y^p$. Если исходная инфинитезимальная связность совпадает с инфинитезимальной связностью, порожденной регулярной финслеровой связностью, то такая связность называется связностью Картана. Связность Картана будем обозначать символом ∇^*, а ее коэффициенты - Γ_{ij}^{*k}. В этом случае $\delta_i = \partial_i - \Gamma_{i0}^{*k}\dot{\partial}_k$ и задача вычисления коэффициентов связности Картана сводится к исследованию алгебраической системы уравнений (18). Для того, чтобы система (18) имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$H_{li}^{km} = \delta_i^k\delta_l^m + \frac{1}{2}g^{kp}\dot{\partial}_l g_{sp}y^s\delta_i^m + \frac{1}{2}g^{kp}\dot{\partial}_l g_{ip}y^m - \frac{1}{2}g^{km}\dot{\partial}_l g_{si}y^s \tag{20}$$

была невырожденной [6]. Для явного выражения коэффициентов связности Картана необходимо иметь матрицу обратную к H^{km}_{li}, что существенным образом затрудняет решение задачи.

Для метрики (1) тензорная часть связности ∇^*, в соответствии с формулой (19), примет следующий вид

$$C^k_{ij} = \sigma' \cdot (\delta^k_j \gamma_{pi} y^p + \delta^k_i \gamma_{pj} y^p - y^k \gamma_{ij}) \tag{21}$$

Для получения явного выражения коэффициентов $\mathit{\Gamma}^{*k}_{ij}$ связности Картана ∇^* исследуем условие ковариантного постоянства метрического тензора в связности ∇^*. В локальных координатах условие обращения в нуль горизонтальной ковариантной производной от метрического тензора имеет вид

$$\nabla^*_k g_{ij} \equiv \partial_k g_{ij} - \mathit{\Gamma}^{*p}_{k0} \dot{\partial}_p g_{ij} - \mathit{\Gamma}^{*p}_{ki} g_{pj} - \mathit{\Gamma}^{*p}_{kj} g_{ip} = 0 \tag{22}$$

Коэффициенты связности ∇^* представим в виде

$$\mathit{\Gamma}^{*k}_{ij} = \mathit{\Gamma}^k_{ij} + T^k_{ij}, \tag{23}$$

где $\mathit{\Gamma}^k_{ij}$ - коэффициенты связности Леви-Чивита римановой метрики $\gamma_{ij}(x)$, а $T^k_{ij} = T^k_{ij}(x, y)$ - некоторый тензор финслерова типа. Для метрики (1) имеем

$$\partial_k g_{ij} = \partial_k \varphi \cdot e^{2\sigma} \gamma_{ij} + \varphi e^{2\sigma} \sigma' \partial_k \gamma_{00} \cdot \gamma_{ij} + \varphi e^{2\sigma} \partial_k \gamma_{ij} \tag{24}$$

$$\dot{\partial}_p g_{ij} = \varphi e^{2\sigma} \cdot 2\sigma' \gamma_{p0} \cdot \gamma_{ij} \tag{25}$$

Подставляя (23),(24),(25) в (22), получим

$$\partial_k \varphi \cdot e^{2\sigma} \gamma_{ij} + \varphi e^{2\sigma} \sigma' \partial_k \gamma_{00} \cdot \gamma_{ij} + \varphi e^{2\sigma} \partial_k \gamma_{ij} - (\mathit{\Gamma}^p_{k0} + T^p_{k0}) \varphi e^{2\sigma} \cdot 2\sigma' \gamma_{p0} \cdot \gamma_{ij} -$$
$$-(\mathit{\Gamma}^p_{ki} + T^p_{ki}) \varphi e^{2\sigma} \gamma_{pj} - (\mathit{\Gamma}^p_{kj} + T^p_{kj}) \varphi e^{2\sigma} \gamma_{ip} = 0$$

или

$$\partial_k \varphi \gamma_{ij} - T^p_{k0} \varphi 2\sigma' \gamma_{p0} \cdot \gamma_{ij} - T^p_{ki} \varphi \gamma_{pj} - T^p_{kj} \varphi \gamma_{ip} +$$
$$+\varphi \{(\partial_k \gamma_{ij} - \mathit{\Gamma}^p_{ki} \gamma_{pj} - \mathit{\Gamma}^p_{kj} \gamma_{ip}) + \sigma' \gamma_{ij} (\partial_k \gamma_{00} - 2\mathit{\Gamma}^p_{k0} \gamma_{p0})\} = 0 \tag{26}$$

Выражение в фигурных скобках равно нулю, так как ковариантная производная от риманова метрического тензора в связности Леви-Чивита обращается в нуль. Поэтому имеем

$$\sigma' T^p_{k0} \gamma_{p0} \cdot \gamma_{ij} + \frac{1}{2}(T^p_{ki} \gamma_{pj} + T^p_{kj} \gamma_{ip}) = \frac{\partial_k \varphi}{2\varphi} \gamma_{ij} \tag{27}$$

Равенство (27) умножим на $y^i y^j$. В результате получим

$$\sigma' \gamma_{00} T^p_{k0} \gamma_{p0} + \frac{1}{2}(T^p_{k0} \gamma_{p0} + T^p_{k0} \gamma_{p0}) = \frac{\partial_k \varphi}{2\varphi} \gamma_{00}, \tag{28}$$

откуда

$$T^p_{k0}\gamma_{p0} = \frac{\partial_k\varphi\gamma_{00}}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})} \tag{29}$$

Теперь (29) подставим в (27):

$$\gamma_{ij}\sigma'\frac{\partial_k\varphi\gamma_{00}}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})} + \frac{1}{2}(T^p_{ki}\gamma_{pj} + T^p_{kj}\gamma_{ip}) = \frac{\partial_k\varphi}{2\varphi}\gamma_{ij}$$

или

$$\frac{1}{2}(T^p_{ki}\gamma_{pj} + T^p_{kj}\gamma_{ip}) = \frac{\partial_k\varphi\gamma_{ij}}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})} \tag{30}$$

Циклируя (30) по i, j, k, получим еще два равенства

$$\frac{1}{2}(T^p_{ij}\gamma_{pk} + T^p_{ik}\gamma_{jp}) = \frac{\partial_i\varphi\gamma_{jk}}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})} \tag{31}$$

$$\frac{1}{2}(T^p_{jk}\gamma_{pi} + T^p_{ji}\gamma_{kp}) = \frac{\partial_j\varphi\gamma_{ki}}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})} \tag{32}$$

Складывая (30) и (31) и вычитая (32), получим

$$T^p_{ki}\gamma_{pj} = \frac{1}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})}\{\partial_k\varphi\gamma_{ij} + \partial_i\varphi\gamma_{ki} - \partial_j\varphi\gamma_{ki}\}, \tag{33}$$

откуда

$$T^l_{ki} = \frac{\gamma^{jl}}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})}\{\partial_k\varphi\gamma_{ij} + \partial_i\varphi\gamma_{ki} - \partial_j\varphi\gamma_{ki}\} \tag{34}$$

Таким образом получаем окончательный ответ

$$\mathit{\Gamma}^{*k}_{ij} = \mathit{\Gamma}^k_{ij} + \frac{\gamma^{pk}}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})}\{\partial_i\varphi\gamma_{pj} + \partial_j\varphi\gamma_{ip} - \partial_p\varphi\gamma_{ij}\} \tag{35}$$

Замечание. Естественно мы должны наложить условие: $1+\sigma'\gamma_{00} \neq 0$ или $1 + 2u\sigma' \neq 0$, откуда $\sigma \neq -\frac{1}{2}\ln u + c$. Если $\sigma = -\frac{1}{2}\ln u + c$, то $g_{ij} = \frac{2\varphi e^{2c}\gamma_{ij}}{\gamma_{ps}y^p y^s}$ и лагранжиан $F = \frac{1}{2}g_{ij}y^i y^j = \varphi e^{2c}$ ассоциированного лагранжева пространства вырождается: $\dot\partial^2_{ij}F = 0$.

Пусть теперь лагранжиан L является однородным степени m по $\dot x$. Вычислим выражение $1+\sigma'\gamma_{00}$ стоящее в знаменателе тензора деформации усеченной связности Картана. Применяя теорему Эйлера к лагранжиану $L = e^{2\sigma(u)}u$, будем иметь:

$$\dot x^k(e^{2\sigma}u)_{\cdot k} = me^{2\sigma}u, \dot x^k e^{2\sigma}2\sigma'\gamma_{0k}u + \dot x^k e^{2\sigma}\gamma_{0k} = me^{2\sigma}u,$$

$$4\sigma'u^2 + 2u = mu, \sigma' = \frac{m-2}{4u}, 1+\sigma'\gamma_{00} = 1 + \frac{m-2}{4u}2u = 1 + \frac{m-2}{2} = \frac{m}{2}$$

и, следовательно,

$$\mathit{\Gamma}^{*k}_{ij} = \mathit{\Gamma}^k_{ij} + \frac{\gamma^{pk}}{m\varphi}\{\partial_i\varphi\gamma_{pj} + \partial_j\varphi\gamma_{ip} - \gamma^{pk}\partial_p\varphi\gamma_{ij})\} \tag{36}$$

Таким образом, *если лагранжиан L является однородным, то усеченная связность Картана совпадает со связностью Бервальда.*

Список литературы

1. S. Watanabe, S. Ikeda, F. Ikeda. On a metrical Finsler connections of generalized Finsler metric $g_{ij} = e^{2\sigma(x,y)}\gamma_{ij}(x)$ // Tensor – 1983. - 40. - p. 97 – 102.
2. Л. П. Эйзенхард. Непрерывные группы преобразований // М. ИЛ – 1947. S. Ikeda. On the Finslerian metrical structures of the gravitational field // An. sti. Univ.Iasi. – 1984, Sec 1a, 30, N4. - p.35 – 38.
3. S. Ikeda. Theory of Fields in Finsler Spaces // Semin. mec. Univ. Timisoara. - 1988, N 8. - p.1 – 43.
4. R. Miron, S. Watanabe. Geometric theory of gravitations and electronics fields in the metric $e^{2\sigma(x,y)}\gamma_{ij}(x)$ // Mem. Sec. sti. ser.4 / Acad. RSR - 1992(1994) -15, N1. - p.9 –23.
5. В. И. Паньженский, О. П. Сурина Об одном классе обобщенных лагранжевых пространств // Движение в обобщенных пространствах. Межвузовский сборник научных трудов. Пенза, 2002, с. 183 – 189.
6. В. И. Паньженский. Инфинитезимальные автоморфизмы метрических структур финслерова типа // Итоги науки и техники. М. 2009. Т. 123. с. 81 – 109.
7. Х. Рунд. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., Наука, 1981.

Ольга Петровна Сурина

ПГПУ, Пенза, Россия

E-mail: kaf_geom@mail.ru.

Olga Surina

PSPUniversity, Penza, Russia.

Berwald and Cartan coherences in the generic Lagrangian space with the special metrics

There have been revealed accepted equations of extremals, Berwald coherence parameters and Cartan coherence parameters of the generic Lagrangian space with the special metrics.

If the Lagrangian is homogeneous, Berwald and Cartan coherences coincide.