Proc. Intern. Geom. Center 2012 **5**(2) 43–52 *dω*

Про кількість розв'язків однієї системи алгебраїчних рівнянь

В.А. Кіосак

Анотація Вивчається перевизначена система алгебраїчних рівнянь. Кількість незалежних компонент загального розв'язку системи має велике значення для оцінки лакун в розподілі степенів мобільності ріманових просторів відносно геодезичних відображень та інших дифеоморфізмів узагальнених просторів

Ключові слова Ріманові простори, геодезичні відображення, системи алгебраїчних рівнянь

УДК 514.765.1+512.813.4

1 Вступ

Загально визнаним в диференціальній геометрії є метод дослідження геометричних об'єктів та їх властивостей зведенням до розгляду диференціальних рівнянь.

В свою чергу, дослідження якісної теорії диференціальних рівнянь зводиться до розгляду умов інтегрування, що носять алгебраїчний характер [1]. Не є винятком і теорія геодезичних відображень (ГО) ріманових просторів . Основні рівняння теорії ГО — це система диференціальних рівнянь в коваріантних похідних першого порядку типу Коші [2].

Вивчення кількості суттєвих параметрів в загальному розв'язку цієї системи зводиться до визначення незалежних компонент тензора в умовах інтегрованості цієї системи, записаних з урахуванням тотожності Річчі [3]–[4]. Останні, також зводяться до допоміжного рівняння, що і є об'єктом вивчення в даній роботі. Дослідження ведуться в ріманових просторах $V_n (n > 3)$, відмінних від просторів сталої кривини, без обмежень на знаковизначеність метрики g_{ij}.

2 Основна частина

Оцінимо кількість незалежних компонент симетричного, невиродженого тензора a_{ij}, що задовольняє рівнянню

$$a_{\alpha i} K_j^\alpha + a_{\alpha j} K_i^\alpha = 0. \tag{1}$$

Тут K_j^h - деякий афінор, незалежний від a_{ij}, крім того припускаємо, що він задовольняє умові

$$g_{\alpha i} K_j^\alpha + g_{\alpha j} K_i^\alpha = 0. \tag{2}$$

Умова (2) означає, що тензор $K_{ij} \stackrel{def}{=} K_j^\alpha g_{\alpha i}$ є кососиметричним.

Нехай r^* — число, рівне $3n-5$ для ріманових просторів V_n, $n \neq 4, 6$, а у випадку $n = 4$ або 6 рівне $3n-6$.

Доведемо наступну теорему

Теорема 1 *Якщо ранг матриці $\|K_j^i\|$ більше двох, то серед компонент тензора a_{ij} не менше чим r^* залежить від інших компонент тензора a_{ij} і афінора K_j^i.*

Доведення цієї теореми проводитимемо в деякій фіксованій точці $M(x^h) \in V_n$. Розглянемо лінійне невироджене перетворення координат в цій точці

$$y^h = A_\alpha^h x^\alpha,$$

де $det \|A_i^h\| \neq 0$.

Тензори a_{ij} та K_h^i перетворяться згідно із законом

$$a_{ij} = a_{\alpha\beta} B_i^\alpha B_j^\beta; \qquad K_i{}^h = K_\beta^\alpha B_i^\beta B_\alpha^h,$$

тут $\|B_i^h\| \stackrel{def}{=} \|A_i^h\|^{-1}$.

Очевидно, що ранг тензора K_i^h, а також число залежних компонент тензора a_{ij} в рівнянні (1) є інваріантними відносно перетворення координат. Останнє вірно і у тому випадку, коли $\|A_i^h\|$ являється комплекснозначною невиродженою матрицею.

Для подальших досліджень приведемо афінор K_h^i за допомогою невиродженого перетворення (випадок комплексного перетворення не виключається) до канонічної форми Жордана. У нашому дослідженні ми обмежимося спрощенішим записом цієї матриці:

$$K_i^h = \begin{pmatrix} \omega_1 & K_2^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & K_3^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \omega_{n-1} & K_n^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \omega_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

де $K_{\alpha+1}^\alpha = 0$ або 1.

Останнє можна записати таким чином

$$K_\alpha^\alpha = \omega_\alpha; \qquad K_\alpha^{\alpha+1} = 0,1; \qquad K_b^a = 0 \qquad \text{для} \qquad b \neq a,\ a+1.$$

Тут $a, b = 1, 2, \dots, n$. В цій формулі, як і в усій роботі, по однакових індексах сумування не робиться.

Природно, що в загальному випадку власні числа ω_α матриці K_i^h можуть бути комплексними. Систему координат y, в якій K_i^h має форму Жордана, назвемо канонічною.

Рівняння системи (1) з фіксованими індексами i і j позначимо через Ω_{ij}, оскільки рівняння Ω_{ji} співпадає з рівнянням Ω_{ij}, система (1) еквівалентна системі рівнянь

$$\Omega : \qquad \Omega_{ij}(i \leq j;\ i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Рівняння (1) в канонічній системі координат y мають наступну форму:

$$\Omega_{ij}(i, j < n) : \ a_{ij}(\omega_i + \omega_j) + a_{i+1\,j} K_i^{i+1} + a_{ij+1} K_j^{j+1} = 0 \tag{4}$$

$$\Omega_{in}(i < n) : \ a_{in}(\omega_i + \omega_n) + a_{i+1\,n} K_j^{i+1} = 0 \tag{5}$$

$$\Omega_{nn} : \ a_{nn}(\omega_n + \omega_n) = 0 \tag{6}$$

Нагадаємо, що у рівняннях (4) і (5) правило Ейнштейна не застосовується. Заздалегідь доведемо наступні леми:

Лема 1 *Компоненти симетричного тензора a_{ij}, для яких $(\omega_i + \omega_j) \neq 0$, залежать від інших компонент тензора a_{ij} і афінора K^i_j.*

Доведення Множина впорядкованих пар індексів (i, j), де $i \leq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, позначимо через I. Через I_1 і I^* позначимо підмножини I такі, що

$$(i, j) \in I_1 \Leftrightarrow (\omega_i + \omega_j) \neq 0 \qquad \text{і} \qquad I^* = I \backslash I_1.$$

Кількість елементів I_1 позначимо через q. Нижче доведемо, що q компонент a_{ij}, де $(i, j) \in I_1$, явно виражаються через інші компоненти тензора a_{ij} і афінора K^h_i.

Крок 1. З множини пар I_1 виберемо пару (i_1, j_1) таку, що індекси i_1 і j_1 є "максимальними". Коректніше:

$$i_1 = \max_{\forall (i,j) \in I_1} i \qquad \text{і} \qquad j_1 = \max_{\forall (i,j) \in I_1} j\ .$$

Тоді неважко бачити, що аналізом рівняння $\Omega_{i_1 j_1}$ (див. (4), (5), (6)) можна явним чином виразити компоненту $a_{i_1 j_1}$ через компоненти $a_{ij} \in I^*$, і K^h_i.

Крок 2. Далі позначимо через $I_2 \stackrel{def}{=} I_1 \backslash \{(i_1, j_1)\}$. Аналогічно, з множини пар I_2 виберемо "максимальну" пару (i_2, j_2):

$$i_2 = \max_{\forall (i,j) \in I_2} i \qquad \text{і} \qquad j_2 = \max_{\forall (i,j) \in I_2} j\ .$$

Тоді неважко бачити, що аналізом рівняння $\Omega_{i_2 j_2}$ (див. (4), (5)) можна явним чином виразити компоненту $a_{i_2 j_2}$ через компоненту $a_{i_1 j_1}$ і компоненти a_{ij}, $(i, j) \in I^*$ і K^h_i. Але тоді на підставі 1-го кроку витікає, що і $a_{i_2 j_2}$ виражається явним чином тільки через компоненти a_{ij}, $(i, j) \in I^*$ і K^h_i.

Процес продовжуємо аналогічно. Після q кроків переконаємося, що усі компоненти a_{ij}, для яких $(i, j) \in I_1$, явним чином виражаються тільки через компоненти a_{ij}, $(i, j) \in I^*$ і афінора K^h_i.

Лема доведена.

На підставі леми 1 можемо довести наступну лему, яка потрібна для доказу теореми.

Лема 2 *Якщо число залежних компонент тензора a_{ij} не перевершує числа r^*, то серед чисел ω_i не більше двох відмінних від нуля.*

Доведення Доказ проведемо методом від протилежного. Припустимо, що існує принаймні три ненульові числа $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ (тут a, b, c — взаємно відмінні індекси; після перенумерації індексів, можна вважати $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$).

Покажемо, що при цьому припущенні хоч би $3n-5$, а у випадку $n = 4, 6$ хоч би $3n-6$ компонент тензора a_{ij} залежить від інших компонент цього тензора і афінора K_i^h (це число ми позначили через r^*). Враховуючи лему 1, для цього досить, щоб серед елементів трикутної матриці ω:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1+\omega_1 & \omega_1+\omega_2 & \dots & \omega_1+\omega_n \\ 0 & \omega_2+\omega_2 & \dots & \omega_2+\omega_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n+\omega_n \end{pmatrix}$$

знайшлося, принаймні, r^* ненульових елементів.

1. Спочатку розглянемо випадок, коли ненульові власні числа ω_1, ω_2, ω_3 задовольняють умові

$$|\omega_1| \neq |\omega_2| \neq |\omega_3|.$$

Тоді не дорівнюють нулю числа

$$\omega_1+\omega_1, \qquad \omega_1+\omega_2, \qquad \omega_1+\omega_3, \qquad \omega_2+\omega_2, \qquad \omega_2+\omega_3, \qquad \omega_3+\omega_3,$$

а для $a > 3$:

а) якщо $\omega_a = \pm\omega_1$, то не дорівнюють нулю

$$\omega_2+\omega_a; \qquad \omega_3+\omega_a; \qquad \omega_a+\omega_a;$$

б) якщо $\omega_a = \pm\omega_2$, то не дорівнюють нулю

$$\omega_1+\omega_a; \qquad \omega_3+\omega_a; \qquad \omega_a+\omega_a;$$

в) якщо $\omega_a = \pm\omega_3$, то не дорівнюють нулю

$$\omega_1+\omega_a; \qquad \omega_2+\omega_a; \qquad \omega_a+\omega_a;$$

г) якщо $\omega_a \neq \pm\omega_1, \pm\omega_2, \pm\omega_3$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1+\omega_a; \qquad \omega_2+\omega_a; \qquad \omega_3+\omega_a.$$

Звідси на підставі леми 1 витікає, що серед компонент a_{ij} принаймні $3n-3$ компонент залежних, що суперечить умові $r^* \geq 3n-3$.

2. Розглянемо випадок, коли ненульові власні числа ω_1, ω_2, ω_3 задовольняють умові

$$\omega_1 = -\omega_2, \qquad \omega_3 \neq \pm\omega_1 \qquad \text{і} \quad \text{для}\, \forall a > 3: \ \omega_a = \pm\omega_1, \pm\omega_3, 0.$$

Інше значення ω_a нас приводить до розгляду п. 1.

В цьому випадку не дорівнюють нулю числа

$$\omega_1 + \omega_1, \qquad \omega_1 + \omega_3, \qquad \omega_2 + \omega_2, \qquad \omega_2 + \omega_3, \qquad \omega_3 + \omega_3,$$

а для $a > 3$:

а) якщо $\omega_a = 0$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a;$$

б) якщо $\omega_a = \omega_1$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a;$$

в) якщо $\omega_a = -\omega_1$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a;$$

г) якщо $\omega_a = \pm\omega_3$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a.$$

Звідси на підставі леми 1 витікає, що серед компонент a_{ij} принаймні $3n-4$ компонент залежних, що суперечить умові $r^* \geq 3n-4$.

3. Розглянемо випадок, коли ненульові власні числа ω_1, ω_2, ω_3 задовольняють умові

$$\omega_1 = \omega_2, \qquad \omega_3 \neq \pm\omega_1 \qquad i \qquad \forall a > 3: \ \omega_a = \omega_1, \pm\omega_3, 0.$$

Значення $\omega_a \neq \pm\omega_1, \pm\omega_2$, нас приводить до розгляду п.1, а значення $\omega_a = -\omega_1$ — приводить до п.2. В цьому випадку не дорівнюють нулю числа

$$\omega_1 + \omega_1, \qquad \omega_2 + \omega_3, \qquad \omega_1 + \omega_3, \qquad \omega_2 + \omega_2, \qquad \omega_2 + \omega_3, \qquad \omega_3 + \omega_3,$$

а для $a > 3$:

а) якщо $\omega_a = 0$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a;$$

б) якщо $\omega_a = \omega_1, \pm\omega_3$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a.$$

Звідси на підставі леми 1 витікає, що серед компонент a_{ij} принаймні $3n-3$ компонент залежних, що суперечить умові $r^* \geq 3n-3$.

4. Очевидно, залишилося розглянути випадок, коли

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_k = -\omega_{k+1} = -\omega_{k+2} = \ldots = -\omega_{k+l} \neq 0,$$

$$\omega_{k+l+1} = \ldots = \omega_n = 0.$$

В цьому випадку кількість ненульових чисел $\omega_i + \omega_j$ $(i \leq j)$ рівна

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2} + (k+l)(n-k-l).$$

Безпосереднім аналізом можна встановити:

а) коли

$$\left\{\begin{matrix} n=4 & i & \omega_1 = \omega_2 = -\omega_3 = -\omega_4 \neq 0, \\ n=6 & i & \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = -\omega_4 = -\omega_5 = -\omega_6 \neq 0 \end{matrix}\right\},$$

то принаймні $3n-6$ компонент a_{ij} залежних, що узгоджується із твердженням леми.

б) у інших випадках, коли $k+l > 2$, серед компонент a_{ij} принаймні $3n-5$ компонент залежних, що також узгоджується із твердженням леми.

У результаті, нами розглянуті усі можливі випадки і, таким чином, лема 2 доведена.

На підставі попередніх лем доведемо раніше сформульовану теорему.

Доведення Для доказу нам досить показати, що, якщо число залежних компонент тензора a_{ij} менше або рівно $3n-5$ для $n \neq 4, 6$ і $3n-6$ для $n = 4, 6$, то матриця тензора K^i_j має не більше двох лінійно незалежних рядків.

Доказ проведемо методом від протилежного. Надалі припускатимемо, що в матриці K^i_j, приведеній до форми Жордана (3), принаймні, три ненульові рядки. Враховуючи лему 2 і можливість перестановки клітин Жордана, досить розглянути наступних сім випадків:

1). $\omega_1, \omega_2 \neq 0$, $\omega_a = 0$, для $a = \overline{3, n}$, $K^4_3 = 1$;

2). $\omega_1 \neq 0$, $\omega_a = 0$, для $a = \overline{2, n}$, $K^3_2 = K^4_3 = 1$;

3). $\omega_1 \neq 0$, $\omega_a = 0$, для $a = \overline{2, n}$, $K^3_2 = 1$, $K^4_3 = 0$, $K^5_4 = 1$;

4). $\omega_a = 0, \quad$ для $a = \overline{1, n}$, $K_1^2 = K_2^3 = K_3^4 = 1$;

5). $\omega_a = 0, \quad$ для $a = \overline{1, n}$, $K_1^2 = K_2^3 = 1$, $K_3^4 = 0$, $K_4^5 = 1$;

6). $\omega_a = 0, \quad$ для $a = \overline{1, n}$, $K_1^2 = 1$, $K_2^3 = 0$, $K_3^4 = K_4^5 = 1$;

7). $\omega_a = 0, \quad$ для $a = \overline{1, n}$, $K_1^2 = 1$, $K_2^3 = 0$, $K_3^4 = 1$, $K_4^5 = 0$, $K_5^6 = 1$.

Нехай $\omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0,$ *і* $\omega_a = 0$, для усіх $a = \overline{3, n}$, *і* $K_3^4 = 1$, тоді матриця K_j^i має вигляд

$$K_j^i = \begin{pmatrix} \omega_1 & K_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_3^4 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & K_{n-1}^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, що числа $\omega_1 + \omega_a$, $\omega_2 + \omega_a$ (для $\forall a > 2$) відмінні від нуля і, отже, через лему 1 компонент a_{1a} $(a \neq 2)$, a_{2a} $(a \neq 1)$ залежать від інших компонент матриці a_{ij}.

Поклавши в (4) $i = j = 3$, знаходимо, що $a_{34} = 0$. З (5) при $i = 3$ витікає, що $a_{4n} = 0$.

Формула (4) при $i = 3$, $j = s \neq 1, 2, 3, n$ набирає вигляду

$$a_{4s} + a_{3\,s+1} K_s^{s+1} = 0.$$

Після неважкого аналізу переконаємося, що серед компонент тензора a_{ij} не менше чим $3n - 4$ залежних. Саме ними є компоненти a_{1a} $(a = 1, 3, 4, \dots, n)$, a_{2a} $(a = 2, 3, 4, \dots, n)$ і a_{4a} $(a = 3, 4, \dots, n)$.

2) Розглянемо другий випадок. Оскільки $\omega_1 + \omega_a (a = \overline{1, n})$ не дорівнюють нулю, то на підставі леми 1 компоненти a_{1a} $(a = \overline{1, n})$ виражаються через інші компоненти матриці a_{ij}.

З (5) при $i = 2, 3$, витікає $a_{3n} = a_{4n} = 0$.

Формула (4) при $i = 2$, $j = s$ $(s = \overline{2, n-1})$ дає

$$a_{3s} = -a_{2\,s+1} K_s^{s+1}, \tag{7}$$

а при $i = 3$, $j = s$ $(s = \overline{3, n-1})$ дає

$$a_{4s} = -a_{3\,s+1} K_s^{s+1}. \tag{8}$$

Отже, a_{1a} $(a = 1, 2, \dots, n)$, a_{3a} $(a = 2, 3, \dots, n)$ *і* a_{4a} $(a = 4, 5, \dots, n)$ залежать від інших компонент тензора a_{ij}, тобто серед компонент a_{ij} не менше ніж $3n - 4$ залежних.

3) Третій випадок аналогічний другому. Легко бачити, що компоненти a_{1a} $(a = \overline{1, n})$, виражаються через інші компоненти матриці a_{ij}.

З (5) при $i = 2, 4$, витікає, $a_{3n} = a_{5n} = 0$.

Формула (4) при $i = 2,\ j = s$ $(s = \overline{2, n-1})$ дає

$$a_{3s} = -a_{2\ s+1} K_s^{s+1}, \tag{9}$$

а при $i = 4,\ j = s$ $(s = \overline{4, n-1})$ дає

$$a_{5s} = -a_{4\ s+1} K_s^{s+1}. \tag{10}$$

Отже, a_{1a} $(a = 1, 2, \dots, n)$, a_{3a} $(a = 2, 3, \dots, n)$ *і* a_{5a} $(a = 4, 5, \dots, n)$ залежать від інших компонент тензора aij, тобто серед компонент aij не менше чим $3n - 4$ залежних.

4, 5, 6 і 7 випадки подібним аналізом рівнянь (4) і (5) призводять до того, що серед компонент aij не менше чим $3n-5$ залежних. Обмежимося тільки розглядом рівнянь (4) і (5), які призводять до такого висновку:

Випадок 4: при $i = 1, 2, 3$; випадок 5: при $i = 1, 2, 4$; випадок 6: при $i = 1, 3, 4$; випадок 7: при $i = 1, 3, 5$.

Отож, в усіх випадках нами отримано протиріччя, яке доводить справедливість теореми.

3 Висновки

Таким чином, вивчивши в спеціальній системі координат кількість залежних компонент тензора a_{ij}, в відмінному від простору сталої кривини, рімановому просторі нами доведена теорема, що має важливе значення для оцінки степені мобільності простору відносно геодезичних відображень.

Література

1. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности.-М.:Наука, 1966. - 495с.
2. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. - М.: Наука, 1979. - 255 с.
3. Kiosak V.A., Matveev V.S. Proof of the Projective Lichnerowicz Conjecture for Pseudo-Riemannian Metrics with Degree of Mobility Greater than Two//Communications in Mathematical Physics, Springer — 297. — 2010. — P. 401-426
4. Kiosak V.A., Matveev V.S. Complete Einstein metrics are geodesically rigid //Communications in Mathematical Physics, Springer — 289. — №1. —2009. — P. 383–400

В.А. Кіосак
Одеський національний політехничний університет, Одеса, Україна.
E-mail: vkiosak@ukr.net

Volodimir Kiosak

On the number of solutions for the system of algebraic equations

We study the system of over-defined algebraic equations. A number of independent components of general solution for the system are really important for estimation of lacunae in the distribution of the mobility degrees for Riemannian spaces in relation to geodesic mappings and other diffeomorphisms of generalized manifolds.