

Геометрическая форма фронта пламени и неустойчивость горения в круглой трубе

Виктор Эдуардович Волков

Аннотация Аналитически решена задача об устойчивости плоского пламени, распространяющегося в круглой трубе. Математически обоснована геометрическая форма (ячеистая структура) пламени, возникающая в результате развития неустойчивости.

Ключевые слова пламя, фронт пламени, неустойчивость горения, ячеистая структура пламени.

УДК 532.5 + 536.464

Как показывают многочисленные эксперименты, пламя, распространяющееся в хорошо перемешанной горючей газовой смеси, в результате автотурбулизации приобретает сложную пульсационную пространственно-временную структуру. Важнейшей геометрической характеристикой фронта горения является размер ячейки пламени, позволяющий оценить столь важный для технических приложений параметр как гасящее расстояние, а также уточнить пределы горения по начальному давлению и по концентрации горючего.

Построенная в работах [1 – 3] теория неустойчивости нормального горения позволяет объяснить [2, 3] наблюдаемую в экспериментах ячеистую структуру пламени [4 – 6] и рассчитать размер пламенной ячейки. Однако, рассматриваемая в [1 – 3] модель горения предполагает, что процесс развивается в неограниченном объеме, в то время как ячеистая геометрия фронта пламени наблюдается и при горении газовых смесей в круглых трубах [5, 7, 8]. Цель настоящего исследования состоит в обосновании корректности

применения теории гидродинамической неустойчивости [1 – 3] для горения, распространяющегося в круглой цилиндрической трубе.

Рассмотрим следующую математическую модель горения. В направлении оси z в области исходной горючей смеси 1 ($z < 0$) течёт идеальный (невязкий) газ с постоянной достаточно малой дозвуковой скоростью, величина которой позволяет считать среду несжимаемой. Плоскости $z = 0$ соответствует фронт пламени (сильный разрыв), за которым находится зона продуктов сгорания 2 ($z > 0$). Газ течет в круглой цилиндрической трубе радиуса r_0 (Рис. 1).

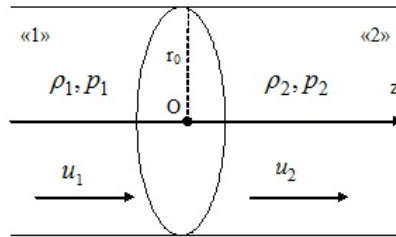


Рис. 1. Модель стационарного пламени в круглой трубе

Физические параметры газа в исходной горючей смеси 1 и в продуктах сгорания 2 связаны законами сохранения массы и импульса:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad (1)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2. \quad (2)$$

Течение среды описывается системой уравнений Эйлера и неразрывности (несжимаемости), которая в цилиндрических координатах r, φ, z имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

где

u_r – радиальная составляющая вектора скорости;

u_φ – азимутальная составляющая вектора скорости;

u_z – аксиальная составляющая вектора скорости;

p – давление;

ρ – плотность.

Исследуем устойчивость стационарного (постоянного) решения системы (3) по отношению к малым возмущениям p'_j , u'_{jr} , $u'_{j\varphi}$, u'_{jz} давления, а также радиальной, тангенциальной и аксиальной компонент вектора скорости соответственно, в зоне исходной горючей смеси ($j = 1$) и в продуктах сгорания ($j = 2$). Эти возмущения описываются следующей системой линейных однородных дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u'_{jr}}{\partial t} + u_j \frac{\partial u'_{jr}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p'_j}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial u'_{j\varphi}}{\partial t} + u_j \frac{\partial u'_{j\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_j r} \frac{\partial p'_j}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial u'_{jz}}{\partial t} + u_j \frac{\partial u'_{jz}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p'_j}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u'_{jr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_{j\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u'_{jz}}{\partial z} + \frac{u'_{jr}}{r} = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Частные решения системы (4) имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u'_{jr}}{\partial u_1} = r_0 \mu_{nk}^{-1} \frac{d}{dr} \ln J_n(\mu_{nk} r r_0^{-1}) F(r, \varphi, t) \left[- \frac{1}{\frac{\zeta}{\mu_{nk} \delta_j} + 1} A_{j1} e^{\mu_{nk} r_0^{-1} z} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\frac{\zeta}{\mu_{nk} \delta_j} - 1} A_{j2} e^{-\mu_{nk} r_0^{-1} z} + A_{j3} e^{-\frac{\zeta}{\delta_j} r_0^{-1} z} \right], \\ \frac{\partial u'_{j\varphi}}{\partial u_1} = i r_0 r^{-1} \mu_{nk}^{-1} n F(r, \varphi, t) \left[- \frac{1}{\frac{\zeta}{\mu_{nk} \delta_j} + 1} A_{j1} e^{\mu_{nk} r_0^{-1} z} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\frac{\zeta}{\mu_{nk} \delta_j} - 1} A_{j2} e^{-\mu_{nk} r_0^{-1} z} + A_{j3} e^{-\frac{\zeta}{\delta_j} r_0^{-1} z} \right], \\ \frac{\partial u'_{jz}}{\partial u_1} = F(r, \varphi, t) \left[- \frac{1}{\frac{\zeta}{\mu_{nk} \delta_j} + 1} A_{j1} e^{\mu_{nk} r_0^{-1} z} + \frac{1}{\frac{\zeta}{\mu_{nk} \delta_j} - 1} A_{j2} e^{-\mu_{nk} r_0^{-1} z} - \right. \\ \left. - \frac{\mu_{nk} \delta_j}{\zeta} A_{j3} e^{-\frac{\zeta}{\delta_j} r_0^{-1} z} \right], \\ \frac{p'_j}{\rho_1 u_1^2} = F(r, \varphi, t) \left[A_{j1} e^{\mu_{nk} r_0^{-1} z} + A_{j2} e^{-\mu_{nk} r_0^{-1} z} \right], \end{array} \right. \quad (5)$$

где

$$F(r, \varphi, t) = J_n(\mu_{nk} r r_0^{-1}) \exp(in\varphi - i\omega t), \quad (6)$$

μ_{nk} - k -ый корень уравнения $\frac{dJ_n(x)}{dx} = 0$, J_n - функция Бесселя первого рода n -го порядка,

$$\zeta = -\frac{i\omega r_0}{u_1}, \quad (7)$$

$$\delta_j = \frac{\rho_1}{\rho_j} = \frac{u_j}{u_1}, \quad (8)$$

$A_{jl} (l = 1, 2, 3)$ - неопределенные константы.

Решения (5) удовлетворяют граничному условию на жесткой стенке ($u'_{jr} = 0$ при $r = r_0$), а также условиям регулярности при $r \rightarrow 0$ и периодичности по φ .

Условие ограниченности возмущений на бесконечности (при $z \rightarrow \pm\infty$) обеспечивается соотношением $A_{12} = A_{13} = A_{21} = 0$. Уравнение возмущённой поверхности фронта пламени задается в виде

$$z = \varepsilon(r, \varphi, t), \quad (9)$$

где

$$\varepsilon = A_{00}r_0F(r, \varphi, t), \quad (10)$$

причем A_{00} - неопределенная константа, а функция $F(r, \varphi, t)$ задана соотношением (6).

На фронте пламени справедливы законы сохранения массы и импульса, которые в линейном приближении могут быть представлены как

$$\rho_1 u'_{1z} - \rho_2 u'_{2z} = (\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (11)$$

$$u'_{1r} - u'_{2r} = (u_2 - u_1) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}, \quad (12)$$

$$u'_{1\varphi} - u'_{2\varphi} = \frac{1}{r} (u_2 - u_1) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi}, \quad (13)$$

$$p'_1 + 2\rho_1 u_1 u'_{1z} = p'_2 + 2\rho_2 u_2 u'_{2z}, \quad (14)$$

при $z = 0$.

Дополнительным граничным условием на фронте является условие неизменности скорости нормального горения (условие Ландау [1, 9]):

$$u'_{1z} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0, \quad (15)$$

при $z = 0$.

Подстановка выражений (5) и (9) в граничные условия (11)–(15) с учетом условия возмущений на бесконечности сводит задачу на собственные значения к характеристическому уравнению Ландау

$$\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\theta^2 + 2\theta + (1 - \delta) = 0 \quad (16)$$

относительно безразмерной величины

$$\theta = \frac{\zeta}{\mu_{nk}} \quad (17)$$

Уравнение (16) имеет неустойчивый корень

$$\theta = \frac{\delta}{1 + \delta} \left(-1 + \sqrt{1 + \delta - \frac{1}{\delta}} \right), \quad (\theta > 0), \quad (18)$$

где $\delta = \delta_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} > 1$. При этом очевидно, что, в отличие от плоского случая [1], безразмерное собственное число имеет вид

$$\theta = -\frac{i\omega r_0}{u_1 \mu_{nk}}. \quad (19)$$

Соотношения (16)–(18) доказывают корректность рассуждений Ландау не только для плоского фронта пламени, распространяющегося в открытом пространстве, но и для горения в круглой цилиндрической трубе. При этом спектр волн возмущений является не непрерывным (как в случае открытого пространства [1–3]), а дискретным, так как возмущения задаются в виде $\sim J_n(\mu_{nk} r r_0^{-1}) \exp(in\varphi - i\omega t)$. Развитие неустойчивости волны горения, приводит к автотурбулизации и самоускорению пламени, что представляет собой потенциальную угрозу дефлаграционного или детонационного взрыва. Все сделанные выводы – с учетом дискретизации спектра длин неустойчивых волн – справедливы не только для открытых, но также для закрытых и полукрытых круглых цилиндрических труб.

Список литературы

1. Л. Д. Ландау. К теории медленного горения // Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1944. – Т.14, №6. – С. 240 – 244.
2. С. К. Асланов, В. Э. Волков. Интегральный метод анализа устойчивости ламинарного пламени // Физика горения и взрыва, 1991. – Т. 27, №5. – С. 44 – 50.
3. S. Aslanov, V. Volkov. On the instability and cell structure of flames // Archivum combustionis. 1992. – Vol. 12, Nr. 1-4. – P. 81 – 90.
4. Я. К. Трошин, К. И. Щелкин. Структура фронта шаровых пламен и неустойчивость нормального горения // Изв. АН СССР. ОН, 1955. – № 9. – С. 160 – 166.
5. Дж. Г. Маркштейн. Нестационарное распространение пламени. // М: Мир, 1968. – 440 с.
6. Л. А. Гуссак, Е. Н. Спринцина, К. И. Щелкин. Исследование устойчивости фронта нормального пламени // Физика горения и взрыва, 1968. – Т. 4, №3. – С. 358 – 366.
7. Я. В. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе. Математическая теория горения и взрыва // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 478 с.
8. И. Н. Зверев, Н. Н. Смирнов. Газодинамика горения // М.: Изд-во МГУ, 1987. – 307 с.
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. В 10 т.: Т. VI. Гидродинамика // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.

Виктор Эдуардович Волков

ОНАПТ, Одесса, Украина

E-mail: viktor@te.net.ua

Victor Volkov

ОНАПТ, Odessa, Ukraine.

Geometrical shape of the flame front and instability of the combustion in a round tube

Stability problem is solved analytically for the plane flame, which propagates in a round tube. Geometrical shape (cell structure) of the flame, which is a result of instability development, is substantiated mathematically.