Proc. Intern. Geom. Center 2012 **5**(3-4) 59–67

Канонічна група простору афінної зв'язності

О. Б. Балакірева

Анотація Показано, що група паралельних перенесень векторів є канонічною на множині нескінченних деформованих груп, які здійснюють теоретико–груповий опис простору афінної зв'язності.

Ключові слова Формалізм першого порядку · Формалізм другого порядку · Групи трансляційних автоморфізмів · Канонічна група простору афінної зв'язності · Група паралельних перенесень векторів

Вступ

При теоретико–груповому вивченні геометричних структур змінної кривизни (просторів афінної зв'язності, ріманових просторів) особливий інтерес представляють нескінченнопараметричні канонічні групи, які пов'язані з скінченними паралельними перенесеннями векторів вздовж геодезичних [1].

В класичній теорії груп Лі означено три основні теореми, згідно яких функції закону множення групи Лі задовольняють рівнянню Лі, допоміжні функції закону множення групи та її структурні константи задовольняють рівнянню Маурера–Картана, а структурні константи задовольняють рівнянню, яке є наслідком тотожності Якобі. При цьому ці три теореми дозволяють здійснювати зворотній перехід. А саме по набору структурних констант або по алгебрі Лі відновлювати локальну групу Лі, тобто функції, що задають її закон множення.

У випадку нескінченних груп Лі ситуація аналогічна. За алгеброю Лі можна відновити нескінченну кількість груп, інфінітезимальні характеристики яких — структурні функції і генератори — можуть співпадати, в той час, коли скінченні характеристики будуть відрізнятися. Для встановлення взаємно однозначної відповідності між алгеброю Лі та групою Лі вводять додаткову умову, а саме — умову канонічності.

Мета даної статті полягає в узагальненні поняття канонічності для нескінченних деформованих груп, які здійснюють теоретико–груповий опис просторів афінної зв'язності. При цьому спочатку наводиться загальна структура побудови таких груп, а вже потім розглядається питання їх канонічності.

1 Теоретико–груповий опис просторів афінної зв'язності

Для опису афінних просторів без скруту, зокрема ріманових просторів, достатньо розглядати деформовану групу дифеоморфізмів $T_M^{gH} = \{t^m(x)\}$ [2], в основі якої лежить звичайна абелева група трансляцій $T_M = \{\tilde{t}^\mu\}$, узагальнена до випадку нескінченнопараметричної групи $T_M^g = \{\tilde{t}^\mu(x)\}$. В своєму законі множення група T_M^{gH} містить основні геометричні характеристики викривленого ріманового простору, чим реалізує Ерлангенську програму Клейна [3] для даної геометричної структури. Генератори $X_m = h(x)^\mu{}_m \partial_\mu$ дії групи T_M^{gH} на многовиді $M = \{x^\mu\}$ визначаються коефіцієнтами деформації:

$$h(x)^m{}_\mu = \partial_{\tilde{\mu}} H^m(x, \tilde{t}(x))|_{\tilde{t}=0}, \tag{1}$$

де $h(x)^m{}_\mu$ — матриці, обернені до $h(x)^\mu{}_m$ $\forall x \in M$, $\partial_{\tilde{\mu}} := \partial/\partial\tilde{t}^\mu$, а $H^m(x, \tilde{t}(x))$ — функції деформації, і задають на M поле афінних реперів $e_m := X_m$. При цьому саме за допомогою коефіцієнтів деформації $h^\mu{}_m$ (і $h^m{}_\mu$) здійснюється перехід між афінним і координатним базисами його дотичного розшарування. Коефіцієнти зв'язності $\gamma(x)^m{}_{kn}$ визначаються другим порядком дії групи на многовиді. Це дозволяє говорити, що група T_M^{gH} задає на M структуру простору афінної зв'язності (без скруту) в ***формалізмі другого порядку***.

Існує і інший спосіб теоретико–групового опису розшарувань зі зв'язністю та просторів афінної зв'язності. Відомо, що інфінітезимальні параметри $t^m(x) = \theta^m(x)$ групи T_M^{gH} представляють собою векторні поля у дотичному розшаруванні TM простору M, а інфінітезимальні зрушення даних векторних полів можна інтерпретувати як спеціальні нелокальні автоморфізми деформованої групи дифеоморфізмів T_M^{gH}

$$\theta_g^m(x) := \tilde{L}(x)^m{}_n \theta^n(x + \tilde{t}(x)), \tag{2}$$

де $\tilde{L}(x)^m{}_n$ — невироджені лінійні перетворення $\forall x \in M$.

Множина перетворень (2) утворює узагальнену калібрувальну групу G^g_M з параметрами $\tilde{g}^\alpha(x) = (\tilde{t}^\mu(x), \tilde{L}(x)^m{}_n)$ (α в нашому випадку є мільтиіндексом $({}^\mu, {}^m{}_n)$). Деформація групи G^g_M виконується при умові недеформованості підгрупи $GL(n) \subset G_M$, яка діє у дотичних до M просторах, і при умові збереження структури самого дотичного розшарування (процедура побудови подібної групи наводиться в роботі [4]).

За цих умов параметри $g^a(x)$ (тут індекс a має той же сенс, що і α) деформованої калібрувальної групи G^{gH}_M визначаються співвідношеннями:

$$t^m(x) = H^m(x, \tilde{g}(x)) := \bar{H}^m(x, \tilde{t}(x)), \tag{3}$$

$$L(x)^m{}_n = H^m{}_n(x, \tilde{g}(x)) := \tilde{L}(x)^m{}_k \bar{\pi}^{-1}(x, \tilde{t}(x))^k{}_n, \tag{4}$$

де матриці $\bar{\pi}(x, \tilde{t})^k{}_n$ задовольняють умовам:

$$\bar{\pi}(x, 0)^k{}_n = \delta^k{}_n, \tag{5}$$

$$\bar{\pi}(x, t(x))^m{}_n := \bar{\pi}(x, \bar{H}^{-1}(x, t(x)))^m{}_n$$

(тут для матриць $\bar{\pi}$, що залежать від деформованого трансляційного параметра і недеформованого, використовується одне й те саме позначення).

Дія групи G^{gH}_M на многовиді M задається формулою

$$x'^\mu = x^\mu + \bar{H}^{-1\mu}(x, t(x)). \tag{6}$$

Дія у дотичному розшаруванні TM простору M визначається співвідношенням

$$\theta^m_g(x) := L(x)^m{}_k \bar{\pi}(x, t(x))^k{}_n \theta^n(x'), \tag{7}$$

яке слідує з співвідношення (2) з врахуванням (4) та (6).

Закон множення групи G^{gH}_M слідує з умови композиційності перетворень (7):

$$\begin{gathered} (g * g')^m{}_n(x) = L''(x)^m{}_n = \\ = L(x)^m{}_p \bar{\pi}(x, t(x))^p{}_r L'(x')^r{}_k \bar{\pi}(x', t'(x'))^k{}_l \bar{\pi}^{-1}(x, \bar{\varphi}(x, t(x), t'(x')))^l{}_n, \end{gathered} \tag{8}$$

$$(g * g')^m(x) = t''^m(x) = \bar{\varphi}^m(x, t(x), t'(x')), \tag{9}$$

де $\bar{\varphi}(x, t(x), t'(x'))$ — функції, що визначають закон множення в групі $T^{g\bar{H}}_M$, яка є підгрупою G^{gH}_M.

Своєю дією (6), (7) група G^{gH}_M задає у дотичному розшаруванні TM простору M поле афінних реперів $\bar{e}_m = \bar{h}(x)^\mu{}_m \partial_\mu$ і структуру простору афінної зв'язності з коефіцієнтами зв'язності $\bar{\gamma}(x)^m{}_{kn}$. Але тут дія у дотичному розшаруванні визначається вже першим порядком по зрушенням (інфінітезимальна дія), через що такий спосіб завдання геометричної структури просторів афінної зв'язності можна називати ***формалізмом першого порядку***.

Виникає природне бажання узгодити ці геометричні структури, які різними способами задаються групами G_M^{gH} і T_M^{gH}. Для цього достатньо ввести умови узгодженості реперного поля та зв'язості:

$$1C)\ \ \bar{h}^m{}_\mu(x) = h^m{}_\mu(x), \tag{10}$$

$$2C)\ \ \bar{\gamma}(x)^m{}_{kn} = \gamma(x)^m{}_{kn}, \tag{11}$$

де

$$\bar{\gamma}(x)^m{}_{kn} := \partial_k \bar{\pi}(x, t(x))^m{}_n|_{t=0}, \qquad \gamma(x)^m{}_{kn} := \partial_k \lambda(x, t(x))^m{}_n|_{t=0} \tag{12}$$

(тут і далі використовуються позначення $\partial_k := \partial/\partial t^k$ або $\partial_{k'} := \partial/\partial t'^k$), а

$$\lambda(x, t(x))^m{}_n := \partial_{n'} \varphi^m(x, t(x), t'(x'))|_{t'=0} \tag{13}$$

— допоміжні функції закону множення групи T_M^{gH}.

За цих умов групи G_M^{gH} будемо називати ***групами трансляційних автоморфізмів*** деформованої групи дифеоморфізмів і позначати DA.

При підсиленні інфінітезимальних умов узгодженості (10), (11) до скінченних, можна виокремлювати різні ізоморфні між собою варіанти груп DA, зокрема фундаментальну групу ріманового простору DT [5] або групу DP скінченних паралельних перенесень векторів в рімановому просторі [6].

2 Канонічна група на множині груп DA

Групи трансляційних автоморфізмів, означені в попередньому розділі, спільні в тому, що мають однакові генератори та приводять до однакових структурних рівнянь просторів афінної зв'язності. Проте в дотичному розшаруванні простору M їх дії можуть відрізнятися. Це зумовлено тим, що функція $\bar{\pi}$, яка, разом з функцією $\bar{\varphi}$, задає закон множення (8), (9) груп DA, є довільно визначеною, залежною від точок многовиду M функцією. Умова узгодженості (11) (і опосередковано (12)) фіксує лише перший порядок розкладу функції $\bar{\pi}$ по параметрам групи. Її вигляд можна визначити однозначно, якщо сформулювати для груп DA умову канонічності. Адже відомо, що умова канонічності груп Лі дозволяє фіксувати єдину групу по відповідній алгебрі Лі (її інфінітезимальному аналогу). Інакше кажучи, дозволяє за структурними константами (структурні константи будь-якої групи

Лі визначаються антисиметричною частиною її коефіцієнтів $\gamma^c{}_{ab}$) групи відновлювати саму групу (її закон множення), причому однозначно. Цей факт ми і хочемо узагальнити на випадок груп DA.

Групи DA мають структуру напівпрямого добутку $T_M^{gH} \times) GL(n)^g$, тому зручніше спочатку розглянути умови канонічності на відповідних підгрупах. Елементи $\tilde{l}^\alpha = (0, \tilde{L}^m{}_n)$ підгрупи лінійних перетворень $GL(n) \subset G_M$ представляють собою матриці, а закон її множення визначено, як звичайний матричний добуток $(\tilde{g} \times \tilde{g}')^m{}_n(x) := \tilde{L}^m{}_s(x)\tilde{L}'^s{}_n(x')$. Вона не деформуються, оскільки в нашому випадку не передбачено деформації шарів розшарування. Отже, накладання умови канонічності на підгрупу $GL(n)$ позбавлено сенсу.

Проте накладання умови канонічності на підгрупу $T_M^{g\bar{H}}$ дає нам змогу однозначно зафіксувати її закон множення $\bar{\varphi}(x, t(x), t'(x'))$. Питання канонічності груп T_M^{gH} було детально розглянуто в роботі [1], тому нам залишається лише розширити його на випадок груп DA.

Розглянемо спеціальні параметри групи DA:

$$g^a = (s\tau, 1)^a, \tag{14}$$

де τ – вектор, дотичний в точці x до параметричної кривої з параметром s.

Означення 1. *Якщо для довільних двох точок x та x' многовиду M існує крива, вздовж якої*

$$(s\tau, 1) * (s'\tau', 1) = ((s + s')\tau, 1), \tag{15}$$

де τ' — дотичний вектор, взятий в точці x', то група DA з таким законом множення називається ***канонічною.***

З означення (15) одразу слідує умова канонічності на $T_M^{gH} \subset DA$:

$$(s + s')\tau^m = \varphi_x^m(s\tau, s'\tau') \tag{16}$$

(в даному розділі, на відміну від попереднього, залежність функцій від точок многовиду буде позначатися нижнім індексом біля функції для більш компактного запису формул).

Інфінітезимальний аналог формули (16), згідно (13), має вигляд:

$$\tau^m = \lambda_x(s\tau)^m{}_n\tau'^n. \tag{17}$$

Формула (17) еквівалентна умові канонічності на підгрупу T_M^{gH}(див. [1]), і представляє собою правило паралельного перенесення векторного поля τ з точки x' в точку x на скінченну відстань $x' - x = H_x^{-1}(s\tau)$ вздовж параметрично заданої кривої.

Диференціюючи умову (17) по параметру s в нулі і враховуючи першу формулу з (12), одержуємо рівняння геодезичної:

$$\dot{\tau}^m + \gamma_{x\,kn}^m \tau^n \tau^k = 0.$$

Отже, виходячи з рівняння (16), яке справедливе для канонічної групи DA, ми одержали, що крива, вдовж якої здійснюються зрушення векторів (17), існує і є геодезичною, а вона єдина для двох довільних точок викривленого простору.

Закон дії канонічної групи DA визначається співвідношенням (7), записаним для параметрів (14):

$$\theta^m = \pi_x(s\tau)^m{}_n \theta'^n. \tag{18}$$

Рівняння (18) є рівнянням коваріантного перенесення довільного вектора вздовж геодезичної і переходить у рівняння (17) при $\theta = \tau$.

В той же час закон множення (8), з врахуванням (14), (15), приймає вигляд:

$$\delta^m{}_n = \pi_x(s\tau)^m{}_k \pi_{x'}(s'\tau')^k{}_l \pi_x^{-1}(\varphi_x(s\tau, s'\tau'))^l{}_n, \tag{19}$$

а його друга частина — рівність (9) — співпадає з умовою (16).

Якщо закон множення (19) переписати в іншому вигляді

$$\pi_x((s+s')\tau)^m{}_n = \pi_x(s\tau)^m{}_k \pi_{x'}(s'\tau')^k{}_n. \tag{20}$$

стає очевидним, що він є нічим іншим, як законом композиційності перенесень векторних полів вздовж кривої. Умова композиційності перенесень векторів є ширшою за умову канонічності групи T_M^{gH}. Адже канонічність припускає існування кривої, вздовж якої всі дотичні до неї вектори паралельні між собою в смислі скінченних паралельних перенесень, а композиційність припускає, що ця умова виконується також і для векторів, що не є дотичними.

Твердження 1. *Умова канонічності груп DA об'єднує в собі умову канонічності (16) групи T_M^{gH}, а також вимогу композиційності (20) для перенесень (18). Останнє забезпечує той факт, що у випадку канонічної групи DA послідовність інфінітезимальних паралельних перенесень вздовж геодезичних дає той самий результат, що і скінченні паралельні перенесення в просторах афінної зв'язності, не лише для дотичних векторів τ, а й для довільних векторів θ.*

З останнього твердження слідує наступне:

Означення 2. *Групу, яка є канонічною на множині груп трансляційних автоморфізмів DA, будемо називати* ***групою паралельних перенесень*** *векторів в просторі афінної зв'язності і позначати DP.*

Важливо зазначити, що в даній статті ми одержали більш загальний, у порівнянні з роботою [6], варіант групи DP, без прив'язки до метрики викривленого простору.

Диференціюючи умову композиційності (20) по параметру s' в нулі і множачи одержаний вираз на довільний вектор θ', одержуємо наступне рівняння:

$$(\partial_k \pi_x(s\tau)^m{}_n - \pi_x(s\tau)^m{}_p \gamma^p_{x'\,kn})\tau'^k \theta'^n = 0. \tag{21}$$

Рівняння (21) разом з граничними умовами (5) і (12) (перша рівність) є задачею Коші на функцій $\pi_x(s\tau)$, які були нами визначені, як довільні функції, залежні від точок многовиду M. З теореми існування і єдиності розв'язку лінійних диференційних рівнянь в частинних похідних слідує однозначність її розв'язку, а значить і однозначна визначеність функцій $\pi_x(s\tau)$.

Твердження 2. *Група паралельних перенесень векторів DP є однозначно визначеною по коефіцієнтам зв'язності $\gamma(x)^m{}_{kn}$.*

3 Геометричні характеристики викривленого афінного простору на рівні інфінітезимальних співвідношень груп DA

Означимо матриці $\alpha_x(t,t')$, які будуть пов'язувати матриці $\pi_x(t)$ наступним співвідношенням:

$$\alpha_x(t,t')^m{}_n = \pi_x(\varphi_x(t,t'))^m{}_k \pi^{-1}_{x'}(t')^k{}_n, \tag{22}$$

тоді

$$\alpha^{-1}_x(t,t')^n{}_s = \pi_{x'}(t')^n{}_r \pi^{-1}_x(\varphi_x(t,t'))^r{}_s \tag{23}$$

і закон множення (8) груп DA можна переписати у вигляді:

$$L''^m_{x\ n} = L^m_{x\,p} \pi_x(t)^p{}_r L'^r_{x'\,k} \alpha^{-1}_x(t,t')^k{}_n. \tag{24}$$

Означимо функцію

$$\eta_x(t)^m{}_{ln} := \partial_l \alpha_x(t,t')^m{}_n|_{t'=0}. \tag{25}$$

Підставляючи в означення (25) співвідношення (22), одержуємо:

$$\eta_x(t)^m{}_{ln} = \lambda_x(t)^r{}_l \partial_r \pi_x(t)^m{}_n - \pi_x(t)^m{}_k \gamma^k_{x'\,ln}. \tag{26}$$

З рівності (26) слідує очевидна властивість функції $\eta_x(t)$:

$$\eta_x(0)^m{}_{ln} = 0. \tag{27}$$

Оскільки всі групи DA визначаються двома групами параметрів (3), (4) і мають складний закон множення (8), (9), то, в залежності від комбінації мультиіндексів, ми одержуємо різні допоміжні функції закону множення групи.

Розглянемо допоміжну функцію, верхній мультиіндекс якої відповідає параметру (4), а нижній (записується другим, через кому) — параметру трансляції (3). За означенням $\lambda_x(g)^m{}_{n,\,l} := \partial_{l'} L''^m_{x\;n}|_{t'=0,L'=\delta}$, тоді з закону множення (8) одержуємо наступне співвідношення:

$$\lambda_x(t)^m{}_{n,\,r} = L^m_{x\,p}\pi_x^{-1}(t)^s{}_n(\pi_x(t)^p{}_k\gamma^k_{x'\,rs} - \partial_l\pi_x(t)^p{}_s\lambda_x(t)^l{}_r), \tag{28}$$

яке, з врахуванням (26), приймає вигляд:

$$\lambda_x(t)^m{}_{n,\,l} = -L^m_{x\,p}\pi_x^{-1}(t)^s{}_n\eta_x(t)^p{}_{ls}. \tag{29}$$

Функції, що визначають другий порядок розкладу закону множення по параметрам підгрупи T^{gH}_M, визначаються формулою:

$$\gamma^m_{x\,n,\,kl} := \partial_k\lambda_x(t)^m{}_{n,\,l}|_{t=0,L=\delta}$$

і, згідно формули (29), є нічим іншим, як:

$$\gamma^m_{x\,n,\,kl} = -\partial_k\eta_x(t)^m{}_{ln}|_{t=0}. \tag{30}$$

Зазначимо, що наведені тут співвідношення (зокрема формули (29) і (30)) справедливі для всіх груп DA, оскільки одержані з спільного для них закону множення (8),(9).

З формули (26) з врахуванням означень (12) знаходимо:

$$\gamma^m_{x\,n,\,kl} = \gamma^m_{x\,ks}\gamma^s_{x\,ln} + \partial_k\gamma^m_{x\,ln} - \gamma^m_{x\,rn}\tilde{\gamma}^r_{x\,kl} - (\partial^2_{lk}\pi_x(t)^m{}_n)|_{t=0}.$$

Антисиметризація функцій $\gamma^m_{x\,n,\,kl}$ по двом останнім нижнім індексам дає нам вираз для відповідних структурних функцій $F^m_{x\,n,\,kl} = \gamma^m_{x\,n,\,kl} - \gamma^m_{x\,n,\,lk}$:

$$F^m_{x\,n,\,kl} = \gamma^m{}_{ks}\gamma^s{}_{ln} - \gamma^m{}_{ls}\gamma^s{}_{kn} + \partial_k\gamma^m{}_{ln} - \partial_l\gamma^m{}_{kn} - \gamma^m{}_{rn}\tilde{F}^r{}_{kl}, \tag{31}$$

де $\tilde{F}^r{}_{kl} = \tilde{\gamma}^r{}_{kl} - \tilde{\gamma}^r{}_{lk}$ — структурні функції вихідної групи T^{gH}_m; всі функції рівняння (31) залежні від точки x многовиду M.

Формула (31), одержана суто з групових співвідношень, приводить нас до класичного означення тензора кривизни Рімана–Кристофеля, який є антисиметричною частиною коваріантних похідних, котрі визначаються через коефіцієнти афінної зв'язності $\gamma^p_{x\,rs}$.

Твердження 3. *Всі групи з множини DA здійснюють опис просторів афінної зв'язності довільної змінної кривизни, при цьому кривизна визначається через структурні функції груп DA, тобто справедлива наступна рівність:*

$$F^m{}_{n,\,kl} = R^m{}_{nkl}. \tag{32}$$

Висновки

В даній роботі було розглянуто групи трансляційних ізоморфізмів DA, які здійснюють опис просторів афінної зв'язності довільної змінної кривизни. Показано, що їх структурні функції співпадають з тензором кривизни Рімана–Кристофеля. Сформульовано умову канонічності груп DA. З'ясовано, що при перенесенні групою довільних векторів θ, умова канонічності (16) автоматично доповнюється вимогою композиційності перенесень (20), що дає підстави називати саме групу DP паралельних перенесень векторів в просторах афінної зв'язності канонічною групою на множині груп DA.

Література

1. *Самохвалов С.Е.* Канонічні деформовані групи дифеоморфізмів та скінченні паралельні перенесення в ріманових просторах // Мат. Мод. — 2007 — № 1(16) — с. 22–27.
2. *Самохвалов С.Є.* Теоретико-груповий опис ріманових просторів // Укр. мат. журн. — 2003. — Т.55, №9. — С. 1238–1248
3. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа") // Об основаниях геометрии. — М.: Гостехтеоретиздат, 1956. — с. 399–434.
4. *S.E. Samokhvalov, K.O. Reznyk* Cartan equation as the condition of the existence of an infinite group, HERON PRESS, SOFIA. — 2006
5. *Самохвалов С.Є.* Фундаментальна група простору Ейнштейна // Математичне моделювання. — 2008. — №2(19). — с. 15–19.
6. *Балакирева Е.* Сравнение двух видов переносов векторов риманова пространства // Труды международного геометрического центра. — 2011. — Т.4, №2. — с. 6–11.

О. Б. Балакірева

Дніпродзержинський державний технічний університет, Дніпродзержинськ, Україна

E-mail: elanagutta@gmail.com