Відображення двовимірних многовидів на площину

А.М.Бондаренко, О.О.Пришляк

Анотація Для класифікації відображень з двовимірних многовидів на площину визначено p-граф і описано, як він змінюється при ізотопіях проекції. Досліджені питання реалізації графів та класифікації відображень.

Ключові слова граф Ріба · топологічна класифікація

УДК 517.91

1 Вступ

В 1995 році Уітні описав клас структурно стійких відображень між 2-вимірними многовидами [4]. Такі відображення утворюють скрізь щільну відкриту множину в просторі всіх відображень. Була отримана локальна класифікація таких відображень. Крім того, було доведено, що для таких відображень, кожна точка є регулярною, точкою складки або точкою зборки. В данній роботі розглядаються відображення з двовимірних многовидів на площину. Для класифікації таких відображень вводяться p-графи, вони демонструють, як змінюється граф Ріба для сімейства функцій Морса.

2 Побудова проекції і правила зміни.

Нехай маємо деякий замкнутий гладкий двовимірний многовид M^2 і функцію $f : M^2 \to \mathbf{R}$ на ньому(проекцію многовиду на площину). Ця проекція буде розбивати площину на області. На проекції будемо відмічати кількість компонент зв'язності многовиду, що проектуються на відповідну область проекції.

Для цієї проекції будемо будувати граф Ріба [1], на якому будемо зображати зміну графа при проектуванні його на деяку пряму.

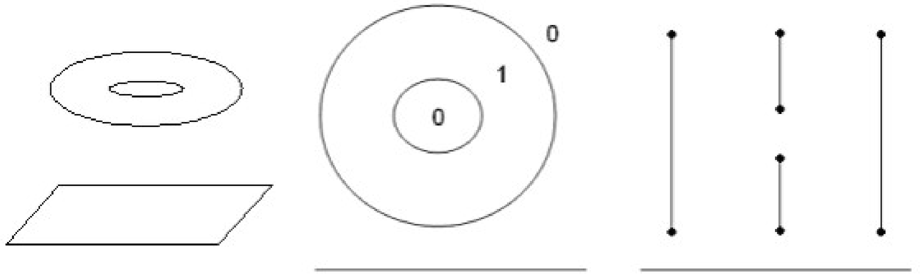

Рис.1

Для спрощення будемо зображати не послідовність графів Ріба, яка утвориться при рухах по прямій в напрямку зліва направо, а один граф, на якому будемо відслідковувати зміну графу. Для того, щоб зобразити цю зміну на одному графі, будемо відмічати ребра, що додаються до графу, прямим шрифтом і курсивом ті, що зникають, в послідовному порядку. Надалі вважатимемо, що одночасно не виникають і не зникають несусідні ребра(цього можна досягти малим порухом проекції). Таким чином для будь-якого вигляду проекції ми можемо знайти відповідний граф Ріба. Називатимемо такий граф p-графом.

Розглянемо, як змінюється граф при ізоморфних рухах проекції.

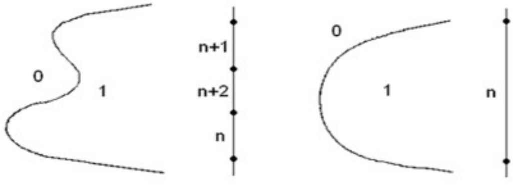

Рис.2

Розглянемо, що відбувається з графом, коли ми «розкручуємо» проекцію.

Аналогічні спрощення можна проводити для частин проекцій, що симетричні даним відносно прямої проектування.

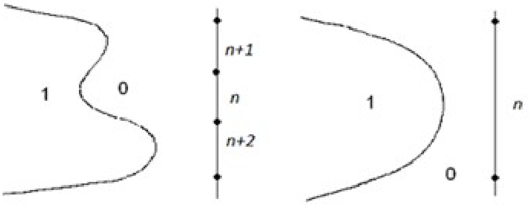

Рис.3

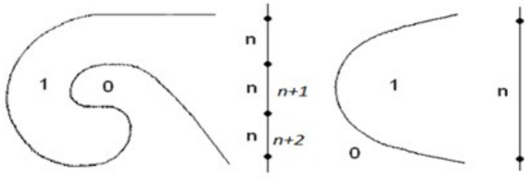

Рис.4

Таким чином ми маємо певні правила, як змінюється граф при рухах проекції.

В подальшому називатимемо ці правила «правило 1»(рис. 2), «правило 2»(рис. 3) та «правило 3»(рис. 4).

Крім цього, контури, що обмежують різні області можуть перетинатися, а також можуть виникати і само перетини контурів. Введемо додатково наступні правила, які дозволяються ізотопією проекції та знайдемо, яким змінам на графі вони відповідають.

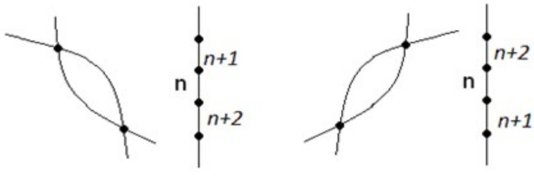

Рис.5

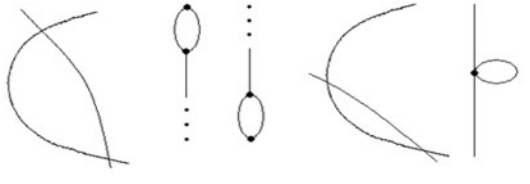

Рис.6

Ці два правила будемо називати «правило 4»(Рис. 5) та «правило 5»(Рис. 6) відповідно.

3 Реалізація графу.

Розглянемо тепер, як маючи граф, можна відтворити вигляд проекції на прикладі графу. Щоб розглянути детально кожний крок, розкладемо цей граф на окремі графи Ріба.

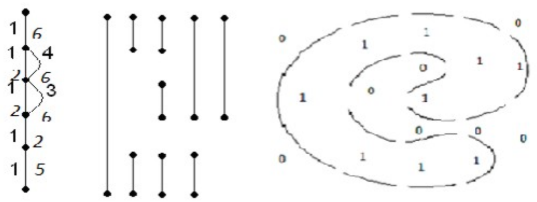

Рис.7

Необхідно зобразити частини проекції, які відповідають різним графам Ріба, в послідовному порядку. Відмічаємо також, якій кількості компонент зв'язності відповідають різні області площини. Після цього достатньо лише з'єднати фрагменти і отримаємо вихідну проекцію.

Теорема 1. Для довільного p - графу існує єдина з точністю до ізотопії проекція на площині, що йому відповідає.

Доказательство. Розглядаємо довільний граф. Розкладаємо його на послідовність графів Ріба. За цією послідовність будуємо таблицю за наступним правилом:

На прямокутнику відмічаємо на лівій стороні кількість точок графу, нижню грань розбиваємо точками на кількість частин, рівну кількості графів Ріба. Рухаючись зліва направо, зображаємо послідовно графи Ріба, відмічаючи на кожному відрізку кількість компонент зв'язності.

Для кожного з відрізків, продовжуємо його до наступного праворуч, відмічаючи відповідно кількість компонент, що проектуються, і об'єднуємо сусідні квадрати з однаковою кількістю компонент.

Окремо будемо розглядати випадок, коли на графі маємо петлю. Тоді в деякій точці має виникнути додаткова область в таблиці:

У випадку, коли в області, що відповідає само перетину, маємо ще деякі зміни в проекції, то треба розбити нову область і проробити процедуру,

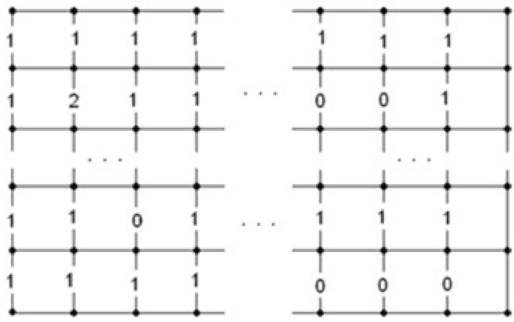

Рис.8

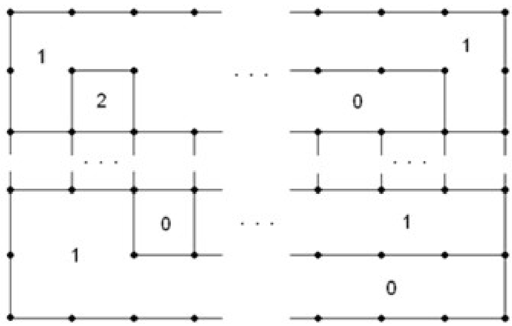

Рис.9

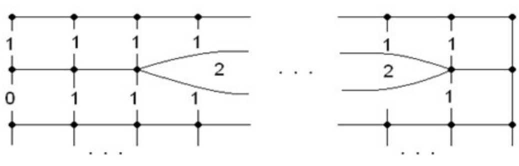

Рис.10

аналогічну тій, що ми робили для таблиці. Залишається лише згладити кути і отримаємо вигляд вихідної проекції.

4 Класифікація відображень.

Теорема 2. Якщо від одного графа до іншого можна перейти за допомогою правил 1-5 або симетричних до них, то проекції, що їм відповідають, ізотопні.

Доказательство. Розглядаємо на площині деяку проекцію. Будемо окремо спрощувати кожну з кривих, що обмежують області. Пронумеруємо всі криві. Надалі позначатимемо їх I_i . На ній будемо відмічати точки перетину з іншими кривими.

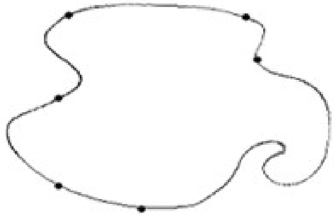

Рис.11

Для кожної з цих замкнених кривих, вибираємо деяку початкову точку і починаємо рухатися по кривій в вибраному нами напрямку. При цьому будемо шукати точки, в яких дотичні вертикальні, точки перетину з іншими контурами і точки самоперетину. При цьому вважаємо, вертикально направлені дотичні маємо лише в точках зміни графу, тобто необхідно виключити наступні можливості(що можна зробити невеликими рухами проекції)

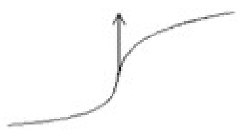

Рис.12

Тоді отримаємо послідовність дотичних і точок:

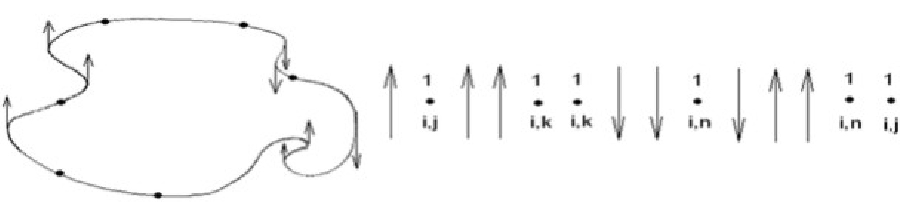

Рис.13

До точок перетину з іншими кривими будемо додатково дописувати знизу номери кривих, що перетинаються в цій точці і порядковий номер точки перетину цих двох кривих.

Тепер розглянемо, яким чином діють наші правила.

Правило «1»відповідає заміні послідовних трьох однаково направлених дотичних на одну дотичну направлену так само. Правило «2»відповідає такій самій заміні.

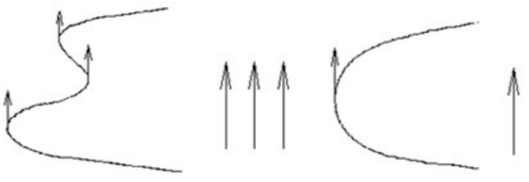

Рис.14

Для правила «3»знаходимо послідовність з трьох дотичних таких, що третя направлена в протилежному напрямку до перших двох і замінимо її на третю дотичну.

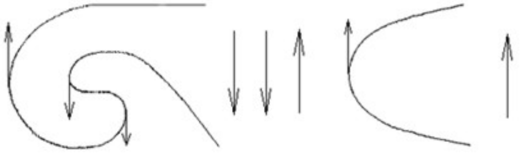

Рис.15

Правила «4»і «5»змінюють лише послідовність «особливих»точок, а не змінюють їх кількість, а отже є ізотопними рухами проекції.

Користуючись цими правилами, ми можемо спростити кожну криву нашої проекції. Якщо точок самоперетину і перетинів більш ніж у двох точках з іншими кривими немає, то отримаємо дві дотичні, направлені в різні сторони, що відповідає колу (якому ізоморфна кожна гладка замкнена крива без самоперетинів).

У випадку, коли дві криві перетинаються, то кожну з них спрощувати можна до тих пір, поки не зміниться кількість їх точок перетину.

Таким чином, для кожної зміни на графі ми можемо пробити відповідну ізотопію проекції, яка не змінить кількість точок перетину і самоперетину.

Теорема 3. Нехай маємо на площині проекції многовидів $P1$ і $P2$ та відповідні їм p- графи $\Gamma 1$ і $\Gamma 2$. Якщо проекції ізотопні, то від $\Gamma 1$ до $\Gamma 2$ можна перейти за допомогою правил 1-5 та перенумерацією вершин.

Доказательство. Ми вже показали, що зміна за правилами графів однозначно відповідає ізотопним рухам проекції. Однак, ми будували p- граф, проектуючи проекцію на довільну пряму. Зміна прямої проектування - те ж саме, що поворот проекції на деякий кут. Покажемо, що поворот можна здійснити, користуючись правилами 1-5.

Розглядаємо не всю проекцію, а лише деяку її частину.

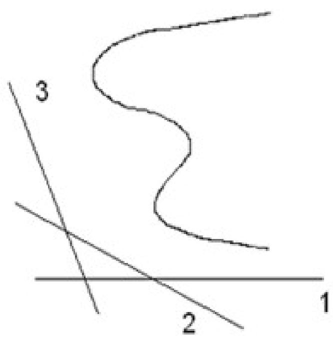

Рис.16

Припустимо, що ми починали, проектуючи на пряму 1. якщо трохи її сумістити, то граф не зміниться, але якщо продовжувати рухати пряму, то в деякий момент часу (пряма 3) зміниться кількість точок на графі. Така ізотопія проекції, як на нашому прикладі, відповідає правилу 1. Розглянемо спочатку випадок, коли не маємо точок перетину і само перетину. Тоді, розглядаючи послідовні трійки дотичних, можемо мати наступні ситуації:

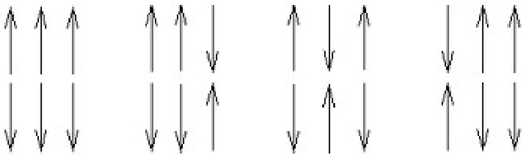

Рис.17

Кожна заміна такої трійки на один вектор відповідає одному з правил 1-3.

Правила 4 і 5 дають можливість змінювати порядок точок перетину і сусідніх до них точок.

Висновки. Розглянуті відображення з двовимірних многовидів на площину та пов'язані з ними p - графи, що демонструють зміну графів Ріба. Введено правила зміни таких графів, що відповідають ізотопним рухам проекції на площині. Продемонстрована процедура спрощення p - графа та показано, що така зміна відповідає ізотопним рухам проекції. Доведено теорему реалізації таких графів та ряд теорем класифікації таких відображень. Результати, отримані в роботі можуть бути використані для подальших досліджень відображень маловимірних многовидів. На практиці отримані результати можуть застосовуватись в оптиці, біології, фізиці тощо.

Література

1. *G. Reeb*, Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complétement intégrable ou d'une fonction numérique. - C.R.A.S. Paris **222** (1946), 847–849.
2. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. Том. 1. - Ижевск: Изд. Дом «Удмурский университет», (1999), 444 с.
3. *Hacon D., Mendes de Jesus C., Romero Fuster M.C.* Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint // Real and complex singularities. New York: M. Dekker, Lect. Notes Pure and Appl. Math. **232**(2003), 227—235.
4. *Whitney H.*, On singularities of mappings of Euclidean spaces I, mapping of the plane into the plane// Ann. of Math.**62** (1955), 374–410.

А.М.Бондаренко, О.О.Пришляк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.

E-mail: bondarenko.12.12@gmail.com, prishlyak@yahoo.com

Olena M. Bondarenko, Alexandr O.Ptishlyak

Maps of 2-manifolds to the plane