

Атоми та молекули функцій з ізольованими критичними точками на границі тривимірного тіла

О.М. Вятчанінова

Анотація В роботі узагальнено поняття атомів та молекул на випадок функцій без внутрішніх критичних точок на тривимірному тілі та скінченному числі критичних точок обмеження функції на край, описані всі прості атоми степені менше 5 та всі молекули з 5 атомами, один з яких має степінь 3.

Ключові слова Критична точка · Топологічна класифікація

УДК 517.91

1 Вступ

Нехай M — тіло в тривимірному просторі (обмежена область з гладкою межею), f — гладка функція на M . Компоненти ліній рівня функції f називають шарами. Гомеоморфізм многовида, що відображає шари на шари, називається пошаровою еквівалентністю. Дві функції $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h : M \rightarrow M$, $h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що $fh = h_1g$. В загальному випадку функції можуть мати досить складну структуру. Проте на множині всіх функцій можна виділити відкриту всюди щільну підмножину, що складається з простих функцій Морса. А. Кронрод [1] та Г. Ріб [2] для дослідження функцій на поверхні увели граф, що отримується з поверхні після стягування кожного шару до точки. Цей граф є повним топологічним інваріантом простих функцій Мор-

са на замкнених поверхнях. Для довільних функцій Морса крім цього графу потрібна додаткова інформація. В роботі [3] О. Болсінова та А. Фоменка було запропоновано розширований окіл критичного рівня називати атомом, а граф Ріба, у якого вершинам відповідають атоми, а ребрам – компоненти краю атомів, називати молекулою. Це дозволило побудувати пошарову та топологічну класифікацію довільних функцій Морса.

В роботі [4] описані прості атоми m -функцій та молекули m -функцій на компактних поверхнях з краєм, у яких не більше 6 особливих точок.

Основна мета даної роботи – узагальнити поняття атомів та молекул на випадок функцій без внутрішніх критичних точок на тривимірному тілі та скінченому числі критичних точок обмеження функції на край, описати всі прості атоми степені 3 та 4 та всі молекули з 5 атомами, один з яких має степінь 3.

2 Поняття атома та молекули.

Нехай $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – функція без внутрішніх критичних точок на тривимірному тілі M та скінченому числі критичних точок обмеження f_{∂} функції на край ∂M . Якщо рівень функції $L_y = f^{-1}(y)$ містить критичну точку функції f_{∂} , то він називається критичним, а якщо не містить – регулярним. Атомом функції називається компоненту околу критичного рівня $M_{[y-\varepsilon, y+\varepsilon]} = f^{-1}([y-\varepsilon, y+\varepsilon])$ розшировану на компоненти рівнів функції, і таку, що містить критичні точки і перетинається лише з одним критичним рівнем. Оскільки критичних точок скінчене число, то для кожного критичного рівня знайдеться таке ε , що компоненти $M_{[y-\varepsilon, y+\varepsilon]}$ будуть атомами. $L_{y+\varepsilon}$ називається верхнім кінцем атома, а $L_{y-\varepsilon}$ – нижнім кінцем.

Два атоми називаються еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм між ними, що зберігає розбиття на компоненти рівнів (тобто компоненти рівнів функції при гомеоморфізмі відображаються в компоненти рівнів).

Якщо у атомі зафіксувати напрямок зростання функції, то такий атом будемо називати f -атомом. На відміну від функцій на поверхні, де одному атому може відповідати як один так і два нееквівалентні f -атоми, для функцій на тривимірних тілах одному атому відповідає два f -атоми. В одному з них поле градієнта $\text{grad } f$ направлено всередину тіла (додатні точки та атоми), а в іншому – назовні (від'ємні).

Щоб із атомів утворити тіло з заданою на ньому функцією, треба вказати як нижні кінці кожного атома склеюються з верхніми кінцями інших

атомів. Це правило задається молекулою, яка також містить інформацію про кожний атом.

3 Прості атоми

Атом називається простим, якщо він містить одну критичну точку. Далі будемо розглядати функції, що мають лише по одній критичній точці на кожному критичному рівні (прості функції) і відповідні їм прості атоми.

Оскільки регулярний рівень L – компактна поверхня з краєм, яка не змінюється при малих змінах регулярного значення, то проходження додатної критичної точки змінює цю поверхню на поверхню з приклеєним $2n$ -кутником D до L . Де $2n$ -кутник D приклеюється за n сторонами, що не є сусідніми, тобто через одну. Це приклеювання повністю задає функцію в околі регулярного рівня, з точністю до топологічної еквівалентності [5], а отже і атом з точністю до еквівалентності атомів.

Заїксуємо орієнтацію на атомі. Тоді вона індукує орієнтацію на границі $2n$ -кутника D . Занумеруємо сторони, що приклеюються згідно цієї орієнтації числами $1, 2, \dots, n$. Отже всього можливо n різних нумерацій, що відрізняються циклічною перестановкою. Задамо обмеження, що зменшують довільність у виборі нумерації. Число 1 виберемо так, що воно відповідає стороні, яка приклеюється до тієї компоненти поверхні (нижньої основи молекули), до якої приклеюється найбільше число сторін і тієї її компоненти краю, до якої приклеюється найбільше число сторін. При цьому n відповідає тій компоненті поверхні і тій компоненті краю, до яких приклеюється найменше число сторін з тих варіантів, що залишилися після виконання умови на вибір числа 1 . Зауважимо, що навіть виконання цих умов може залишити довільність у виборі початкової сторони нумерації.

На кожній компоненті краю ∂L виберемо орієнтацію, що збігається з орієнтацією границі ∂D . Почнемо обходити ту компоненту краю ∂L , що містить приклеєну сторону 1 , починаючи з неї за орієнтацією. Випишемо номери всіх сторін, що приклеюються до цієї компоненти. Отримали упорядкований набір чисел, що починається з 1 . Так само для кожної компоненти запишемо упорядкований набір чисел, так що на першому місці стоїть найменше число в цьому наборі. Ці набори будемо записувати в круглих дужках, наприклад $(1,3,2)$. Для кожної компоненти поверхні L випишемо в квадратних дужках всі набори, які відповідають компонентам її краю. Ці набори впорядковані за зростанням першого числа в наборі. Наприклад, $[(1,3), (2,5), (4)]$. Крім того для кожної компоненти поверхні L вкажемо її

рід g (верхній індекс біля списку) та число k компонент краю, до яких не приклеюється $2p$ -кутник D (нижній індекс). Наприклад, список $[(1, 3), (2)]_2^3$ для $g = 3, k = 2$. Якщо ці індекси дорівнюють 0, то ми їх не будемо писати.

Отримали для кожної компоненти поверхні L список наборів. Упорядкуємо списки за зростанням першого числа. Наприклад, $[(1,3), (5)], [2]_1^1, [(4)]_2$. Так побудовану послідовність списків будемо називати кодом атома.

Оскільки вибір початкової сторони, взагалі кажучи не однозначний, то при циклічній заміні номерів може виникнути послідовність, відмінна від початкової і яка задає один і той самий атом. Наприклад, $[(1,2,4,3)] \sim [(4,1,3,2)]=[(1,3,2,4)]$ (1 був замінений на 4, а решта номерів зменшені на 1).

Теорема 1. *Кожний атом з точністю до еквівалентності може бути відтворений за своїм кодом. Два коди задають однакові атоми, якщо один з іншого може бути отриманий циклічною заміною та перестановкою чисел.*

Доведення. Кожний код задає однозначно приклеювання $2p$ -кутника до поверхонь, роди яких визначаються верхніми індексами в списках, а число компонент краю – сумою числа наборів в списку та нижнього індексу. За [5] таке приклеювання задає функцію на околі критичного рівня, а отже розшарування цього околу, тобто атом.

При побудові атома всі операції були визначені однозначно за винятком можливо вибору першої сторони атому. При виборі іншої сторони за першу всі номери сторін циклічно переставляються, що призводить до циклічної заміни та циклічної перестановки чисел в кодї. Теорему доведено.

Далі ми будемо розглядати атоми, в списках яких $g = 0, k = 0$. Довільний атом, можна отримати з такого дописуючи верхні та нижні індекси до списків.

Якщо степінь критичної $n=2$ (як у функцій Морса), то число не еквівалентних атомів дорівнює 3. Вони мають такий вигляд:

1) $[(1,2)];$ 2) $[(1),(2)];$ 3) $[(1)],[(2)].$

При $n=3$ маємо 7 атомів:

1) $[(1,2,3)];$ 2) $[(1, 3,2)];$ 3) $[(1,2),(3)];$ 4) $[(1),(2),(3)];$ 5) $[(1,2)],[(3)];$
6) $[(1),(2)],[(3)];$ 7) $[(1)],[(2)],[(3)].$

При $n=4$ існує 22 атома:

1) $[(1,2,3,4)];$ 2) $[(1,2,4,3)];$ 3) $[(1,4,3,2)];$ 4) $[(1,2,3),(4)];$ 5) $[(1,3,2),(4)];$
6) $[(1,2),(3,4)];$ 7) $[(1,3),(2,4)];$ 8) $[(1,2),(3),(4)];$ 9) $[(1,3),(2),(4)];$
10) $[(1),(2),(3),(4)];$ 11) $[(1,2,3)],[(4)];$ 12) $[(1,3,2)],[(4)];$ 13) $[(1,3),(2)],[(4)];$

- 14) [(1,2),(3)],[(4)]; 15) [(1),(2),(3)],[(4)]; 16) [(1,2)],[(3)],[(4)];
 17) [(1,3)],[(2)],[(4)]; 18) [(1),(2)],[(3)],[(4)]; 19) [(1),(3)],[(2)],[(4)];
 20) [(1)],[(2)],[(3)],[(4)]; 21) [(1),(2)],[(3),(4)]; 22) [(1),(3)],[(2),(4)].

4 Графи функції та молекули.

Для вивчення топологічних властивостей функцій на многовидах часто використовують граф, уведений у роботах Кронрода та Ріба (далі граф Ріба). Він отримується з многовида факторізацією за таким відношенням: дві точки еквівалентні, якщо їх можна з'єднати шляхом в компоненті рівня функції. При цьому вершинам графа відповідають критичні точки (можливо декілька критичних точок одній вершині). На графі Ріба є орієнтація ребер, задана напрямком зростання функції. Вкладення краю многовида в многовид породжує неперервне відображення графа Ріба G_∂ функції f_∂ на граф Ріба G_f функції f . Якщо одне ребро відображалось на декілька ребер, то ми розіб'ємо його на декілька ребер, кожне з яких гомеоморфно відображається на одне ребро. Отриманий граф позначимо G_1 . Для того щоб задати відображення графів Ріба досить задати прообрази для кожного ребра, тобто на графі G виділити набір ребер, що відображаються в одне ребро графа G_f .

Вершини графа G_1 розбито на три типи – додатні (ми їх будемо зображувати чорним кольором), від'ємні (білим) та додаткові (сірим).

Для того, щоб не задавати додатково орієнтації ребер, ми будемо зображати граф так, що орієнтація кожного ребра направлена від нижньої вершини до верхньої. Для кожного атома записаного своїм кодом стандартно відтворюється граф атома. Розглянемо додатній атом. Кожному ребру, що входить у вершину, відповідає набір, який записаний в круглих дужках. В тій самій послідовності, як ці набори записані в кодї, будемо зображати (зліва на право) ребра, що входять, на графі. Ребрам, що виходять відповідають компоненти краю атома. Занумеруємо їх у такий спосіб. Першою буде та, яка містить не занумеровану сторону між сторонами з номерами 1 та 2 при русі від першої до другою за орієнтацією границі 2π -кутника. Якщо, сторона між другим та третім номером не попала в першу компоненту, то вона задає другу компоненту, якщо попала, то другу компоненту визначає перша не занумерована сторона, яка не попала в першу компоненту. Третю компоненту визначає наступна не занумерована сторона, яка не попала в перші дві і т.д. Тоді ребрам, що виходять зліва направо поставимо у відповідність першу, другу і т.д. компоненти краю атома. Якщо в списках $k \neq 0$, то від-

повідні ребра будемо зображати справа від вершини у тій послідовності, в якій ідуть списки в кодї. З'єднаємо відповідні сірі вершини горизонтальними (неорієнтованими) ребрами: задану вершину з сірою вершиною на першому ребрі, потім перше з другим, друге з третім і т.д. Отриманий граф позначимо G . Для вершин, що є локальними екстремумами функції f код буде порожнім, а для вершин, що є локальними екстремумами функції f_{∂} , але не локальними екстремумами функції f , код будемо записувати у вигляді $[0]_k^g$.

Графи від'ємних атомів – це дзеркальний образ графів додатних атомів.

Кожному ребру графа G_f (набору ребер на графі G) поставимо у відповідність рід g та число компонент краю k поверхні рівня, а також елемент групи гомеотопій отриманої поверхні F_k^g , що задається відображенням приклеювання верхнього кінця атома до нижнього. Якщо $g=0$ і $k < 4$, то такий елемент один.

Зауважимо, що локальним мінімумам та максимумам на графі Рїба відповідають вершини валентності 1. Отже, разом з типом вони задають атом.

Молекулою називається граф G , деякі ребра якого орієнтовані, а вершини розбиті на три типи, кожній вершині першого або другого типу поставлено у відповідність код, та упорядковано ребра що входять та виходять із вершини, ребра розбиті на групи, кожній такій групі з k ребер поставлено у відповідність рід g та елемент групи гомеотопій поверхні F_k^g .

Оскільки інформація про кожну групу ребер записана в кодах суміжних з нею вершин, то групи можна не вказувати, а елемент групи гомеотопій приписувати першому ребру групи.

Дві молекули називаються ізоморфними, якщо існує ізоморфізм їх графів, що відображає орієнтовані ребра в орієнтовані зі збереженням орієнтації, зберігає тип вершин, коди у вершинах та порядок ребер що входять та виходять з кожної вершини, а також елементи груп гомеотопій для тих ребер, у яких вони приписані або такий ізоморфізм існує після циклічних перестановок номерів у вершинах і відповідних змін у порядку ребер, що входять та виходять з цих вершин. Для того, щоб не перевіряти циклічну перестановку номерів можна для кожного n виписати список всіх атомів і один з кодів для кожного атома (як це було зроблено раніше для $n=2,3,4$), а в молекулі записувати тільки коди із списку.

Занумеруємо критичні точки за зростанням значення функції в них, так що точка мінімуму має номер 1, наступна 2 і т.д. Тоді на молекулі виникає нумерація вершин. Молекулу з нумерацією будемо називати оснащеною мо-

лекулою. Оснащений ізоморфізм молекул, це такий ізоморфізм, який зберігає номери вершин.

Теорема 2. *Дві функції на тривимірних тілах пошарово еквівалентні тоді та тільки тоді, коли їх молекули ізоморфні. Функції будуть топологічно еквівалентними тільки тоді, коли їх молекули оснащено ізоморфні.*

Доведення. Необхідність. Якщо існує еквівалентність функцій, тобто гомеоморфізм між тілами, то його обмеження на атоми задає ізоморфізм атомів, тобто еквівалентність кодів, а оскільки від відображає шари функції у шари, то він породжує ізоморфізм графів зі збереженням орієнтацій, типу вершин, порядку ребер що входять та виходять з кожної вершини, а також елементів груп гомеотопій.

Достатність. Еквівалентність кодів за теоремою 1 достатня для існування топологічної еквівалентності функцій в околах критичних рівнів. Ізоморфізм графів забезпечує відповідність між верхніми та нижніми основами атомів, а рівність елементів груп гомеотопій означає, що приклеювання верхніх основ до нижніх відрізняються на ізотопію. А ізотопія за означенням задає відображення циліндра над компонентою регулярного рівня однієї функції в такий циліндр для другої функції. Це означає, що гомеоморфізм між атомами продовжується на циліндри між ними тобто до гомеоморфізму всього тіла, що зберігає шари функцій тобто пошарової еквівалентності. Так само як і для функцій Морса, нумерація вершин задає відображення прямої значень однієї функції в іншу і перетворює пошарову еквівалентність на топологічну. Теорему доведено

Розглянемо функції у яких 5 критичних точок, одна з яких додатна та має степінь $k=3$. Всі можливі молекули таких функцій на тривимірному диску (тілі роду 0) зображені на рис. 1.

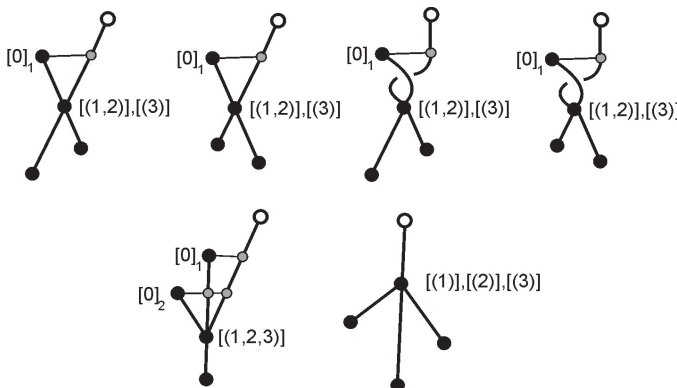


Рис.1.

Отже існує 6 таких топологічно не еквівалентних функцій на тривимірному диску. Перша та друга, як третя та четверта молекули задають пошарово еквівалентні функції. Тому існує 4 різних пошарово не еквівалентних функцій на тривимірному диску.

Всі можливі молекули таких функцій на повному торі (тіло роду 1) зображені на рис. 2.

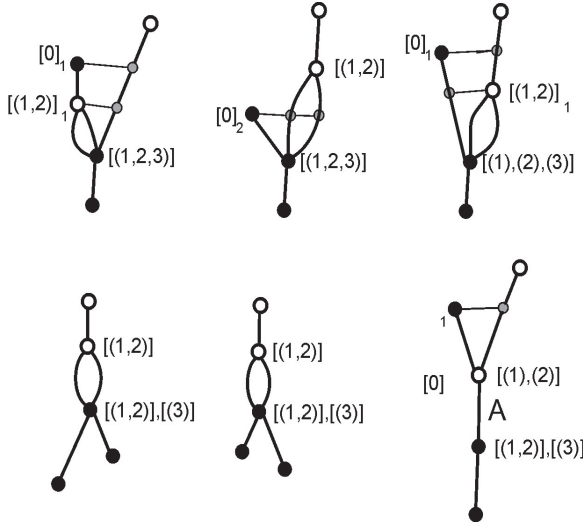


Рис.2.

Четверта та п'ята молекули відповідають пошарово еквівалентним функціям. В шостій молекулі біля одного з ребер стоїть елемент А групи гомеотопій тора з діркою. Оскільки ця група нескінченна, то існує нескінченно багато топологічно нееквівалентних функцій в цьому випадку.

На тілі роду 2 можливі лише 2 графи:

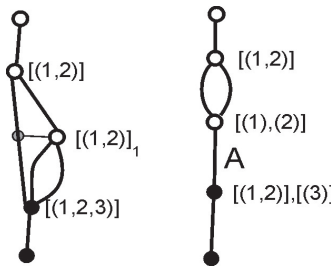


Рис.3

На другому графі, як і раніше, елемент А може приймати нескінченне число значень. Отже, існує нескінченно багато нееквівалентних функцій у цьому випадку.

Висновок. В роботі узагальнено поняття атомів та молекул на випадок функцій без внутрішніх критичних точок на тривимірному тілі та скінченному числі критичних точок обмеження функції на край, описані всі прості атоми степені 2 (3 атоми), 3 (7 атомів) та 4 (22 атоми) та всі молекули з 5 атомами, один з яких має степінь 3 (14 графів молекул).

Література

1. А.С. Кронрод. О функциях двух переменных // Успехи мат. наук, **5(35)** (1950), 24–134.
2. G. Reeb. Sur les points singuliers de une forme de Pfaff completely integrable ou de une fonction numerique // Comptes Rendus Hebdomadaires des Seaces de Academie des Sciences, **222** (1954), 847–849.
3. А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: Изд. Дом «Удмурский университет», **1,2** (1999), 892 с.
4. О.О.Пришляк, К.О.Пришляк, К.І.Міщенко, Н.В.Лукова. Класифікація простих m -функцій на орієнтованих поверхнях // Журнал обчисл. та прикл. матем., **1(104)** (2011), 116–127.
5. О.О.Пришляк, К.О.Пришляк, О.Н.Вятчанинлва. Топологічні властивості функцій на тривимірних тілах // Журнал обчисл. та прикл. матем., **2(101)** (2010), 113–119.

О.М. Вятчанинова

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.

E-mail: qucly-alta2004@mail.ru

Olena Vyatchaninova

Atoms and molekulus of functions with isolated critical points on the boundary of 3-dimensional hanlebody