Обобщенные структуры, связанные с деформацией группы Ли

В. М. Кузаконь

Аннотация Метод Э. Картана применяется для изучения обобщенных дифференциально-геометрических структур, введенных нами ранее.

Ключевые слова главное расслоение · G-структура · обобщенное главное расслоение · K-обобщенная G-структура · группа Ли · деформация группы (алгебры) Ли

УДК 514.76

Напомним, что главное расслоенное пространство (главное расслоение) есть четверка (P, M, π, G), где P и M — гладкие многообразия, $\dim P = n+r$, $\dim M = n$; G — группа Ли, гладко и свободно действующая справа на P, $\dim G = r$; $M = Orb_G P$ — пространство орбит этого действия; $\pi : P \to M$ — естественная проекция, сопоставляющая точке $p \in P$ ее орбиту. При этом должно выполняться свойство *локальной тривиальности.*

Главное расслоение допускает изучение методом Картана – Лаптева. Суть его в том, что на многообразии P вводится кобазис дифференциальных форм ω^a, ω^i, где $a, b, c, d, e, \ldots = 1, 2, \ldots r$; $i, j, k, \ldots = r+1, \ldots r+n$. Формы ω^i есть базисные формы вертикального распределения, то есть являются комбинациями дифференциалов параметров слоя, которые обозначим x^i. Иными словами, эти формы можно рассматривать как базисные формы многообразия M.

Формы ω^a с точностью до комбинации форм ω^i представляют собой дуальный базис фундаментальных векторных полей, определенных действием группы G в слое, и зависят от дифференциалов параметров u^a группы G.

Как показано в [1], все эти формы должны удовлетворять структурным уравнениям вида

$$\begin{aligned} d\omega^i =&\omega^j \wedge \omega^i_j, \\ d\omega^a =&-\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \omega^a_j \wedge \omega^j, \end{aligned} \tag{1}$$

где формы ω^i_j зависят от дифференциалов локальных координат — параметров x^i и дифференциалов параметров подвижного репера (корепера) первого порядка; формы ω^a_j зависят от дифференциалов, вообще говоря, всех параметров: x^i, u^a и параметров репера. Величины C^a_{bc} образуют структурный тензор группы Ли G, то есть кососимметричны по нижним индексам и удовлетворяют тождеству Якоби:

$$C^a_{e[b}C^e_{cd]} = 0.$$

Естественно рассмотреть обобщение этой конструкции — такое расслоение, в каждом слое которого действует r–мерная группа Ли, гладко зависящая от слоя. Это понятие было введено нами ранее, см., например, [2] и [3]. Зависимость группы от слоя означает, что рассматривается семейство групп Ли, или деформация группы Ли. Пусть $G(x)$ — семейство групп Ли размерности r, где x — параметр деформации. Будем далее предполагать, что пространство параметров деформации является гладким многообразием размерности n, обозначим его M.

Пусть, как и выше, P — гладкое многообразие, $\dim P = n + r$, $\pi : P \to M$ — субмерсия, и в слое $\pi^{-1}(x), x \in M$, свободно и транзитивно действует группа $G(x)$. Многообразие P с такой структурой будем называть *обобщенным главным расслоенным пространством* или просто *обобщенным главным расслоением.*

Найдем структурные уравнения обобщенного главного расслоения, обобщающие уравнения (1).

Прежде всего заметим, что структурный тензор $C^a_{bc}(x)$ группы $G(x)$ также должен удовлетворять тождествам Якоби:

$$C^a_{e[b}(x)C^e_{cd]}(x) = 0, \tag{2}$$

которые выполняются тождественно при любом x из M.

Далее на многообразии M введем базисные формы ω^i, которые будут также удовлетворять первой серии структурных уравнений (1). Также, как и в случае обычных главных расслоений мы можем перенести левоинвариантные поля с группы Ли $G(x)$ на соответствующий слой над точкой x, поскольку группа действует на этом слое транзитивно и свободно. На слое получим фундаментальные векторные поля, для которых найдем базис дуальных форм ω^a. Эти формы будут удовлетворять структурным уравнениям

$$d\omega^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}(x)\omega^b \wedge \omega^c + \omega^a_j \wedge \omega^j, \qquad (3)$$

аналогичным второй серии уравнений (1). Таким образом, структурные уравнения обобщенного главного расслоения могут быть записаны в той же форме, что и структурные уравнения главного расслоения, разница в том, что величины C^a_{bc} в первом случае не являются постоянными, а зависят от переменной x — точки базы расслоения.

Аналогичная картина наблюдается и для G-структур. Классическое понятие G-структуры также допускает обобщения. Одно из них заключается в том, чтобы отказаться от условия, что действие группы G является точным. Такие G-структурой называют обобщенными. Мы будем рассматривать другое обобщения понятия G-структуры, связанное с деформацией группы Ли. Такой объект мы будем называть K-обобщенной G-структурой.

Напомним одно из определений G-структуры. Пусть G — подгруппа полной линейной группы $GL(n)$, действующей в некотором фиксированном n-мерном векторном пространстве V со стандартным базисом, и пусть $B(M)$ — расслоение реперов гладкого многообразия M размерности n, $\pi : B(M) \to M$ — естественная проекция. Тогда всякий репер p из $B(M)$ определяет изоморфизм пространства V на касательное пространство $T_x(M)$, где $x = \pi(p)$. G-структурой B_G на многообразии M называется подмногообразие в $B(M)$, такое, что для любой точки p из B_G и для любого g из $GL(n)$ точка $p \cdot g$ принадлежит B_G тогда и только тогда, когда $g \in G$. При этом, по определению, $p \cdot g(v) = p(gv), v \in V$.

Обобщим эту конструкцию следующим образом. Пусть $G(x)$ — гладкая деформация в $GL(n)$, то есть n-параметрическое семейство r-мерных подгрупп группы $GL(n)$, гладко зависящее от параметра x. Обозначим пространство параметров деформации опять через M и будем считать, что M — гладкое многообразие размерности n.

K-обобщенной G-структурой $B_G(x)$ на многообразии M назовем подмногообразие в расслоении $B(M)$ реперов многообразия M такое, что для любой точки p из $B_G(x)$ и для любого g из $GL(n)$ точка $p \cdot g$ принадлежит $B_G(x)$ тогда и только тогда, когда $g \in G(x)$, где $x = \pi(p)$. При этом, как и выше, $p \cdot g(v) = p(gv), v \in V$, и считается, что все $G(x)$ действуют в некотором фиксированном n-мерном векторном пространстве V со стандартным базисом.

Структурные уравнения G-структуры B_G найдены, например, в [4]:

$$\begin{aligned} d\omega^i =& a^i_{j\alpha}\omega^j \wedge \theta^\alpha + b^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \\ d\theta^\alpha =& -\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\beta \wedge \theta^\gamma + \theta^\alpha_j \wedge \omega^j, \end{aligned} \tag{4}$$

где индексы пробегают следующие значения: $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \ldots = 1, 2, \ldots r$; $i, j, k, \ldots = 1, \ldots n$. Здесь ω^i — базисные формы многообразия M, $a^i_{j\alpha}$ — постоянные, определяющие вложение группы G как подгруппы в полную линейную группу $GL(n)$, действующую на расслоении реперов многообразия M:

$$\pi^i_j = a^i_{j\alpha}\tilde{\theta}^\alpha; \tag{5}$$

π^i_j — инвариантные формы группы $GL(n)$, $\tilde{\theta}^\alpha$ — инвариантные формы группы G; $C^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные постоянные группы G, удовлетворяющие тождеству Якоби (см. выше); b^i_{jk} — первый структурный объект G-структуры. Формы θ^α есть кобазис, дуальный базису фундаментальных векторных полей, которые получаются на расслоении реперов многообразия M при действии группы G.

Пусть теперь, как и выше, $G(x)$ — гладкая деформация группы Ли, M — многообразие параметров. Тогда вложение группы $G(x)$ в $GL(n)$ запишется в виде

$$\pi^i_j = a^i_{j\alpha}(x)\tilde{\theta}^\alpha,$$

где $a^i_{j\alpha}(x)$ уже не постоянные, а функции от точки многообразия M. Структурные постоянные группы G также становятся функциями от x и удовлетворяют тождествам (2) при любом x. Поэтому структурные уравнения K-обобщенной G-структуры могут быть приведены к виду, аналогичному (4):

$$d\omega^i = a^i_{j\alpha}(x)\omega^j \wedge \theta^\alpha + b^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, d\theta^\alpha = -\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}(x)\theta^\beta \wedge \theta^\gamma + \theta^\alpha_j \wedge \omega^j. \tag{6}$$

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Структурные уравнения главного расслоенного многообразия. Труды геометрического семинара, т. 2, Москва, ВИНИТИ АН СССР, 1969, с. 161-178.
2. Кузаконь В.М. *Generalized fiber bundles with connections*// Ukr. J. Phys. 1998, v. **43**, n. 7, pp. 14-16.
3. Кузаконь В.М. *Обобщенные расслоенные пространства*// Ж. Математичні методи та фізико-механічні поля, том **45**, № 2, 2002, с. 58-63.
4. Акивис М.А. *О замкнутых G-структурах на дифференцируемом многообразии.* Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР) **7** (1975), 69–79.

В. М. Кузаконь
ОНАПТ, Одесса, Украина
E-mail: kuzakon_v@ukr.net
Viktor M. Kuzakon'

ONAFT, Odessa, Ukraine.

The generalized structures associated with a group Lie deformation

We use Cartan's method for the investigation of the generalized geometrical structures which were introduced by us earlier.