О вложении шестимерной групповой три-ткани с тривиальной сердцевиной в три-ткань Муфанг

Гегамян Г.Д.

Аннотация Построено вложение шестимерной групповой три-ткани с тривиальной сердцевиной в некоторую десятимерную ткань Муфанг.

Ключевые слова Три-ткань Бола, сердцевина ткани Бола, локально симметрическое пространство, групповая три-ткань, три-ткань Муфанг, тривиальная сердцевина, локально плоская структура

УДК 514.7

Введение

В работе [3] найдены структурные уравнения левой три-ткани Бола $B_l \equiv B_l(r,r,r)$, сердцевина которой является тривиальной, то есть изотопна абелевой группе. Такая ткань обозначена B_l^0. Доказано, что локально симметрическая связность, порождаемая сердцевиной ткани B_l^0 на базе ее первого слоения, является локально плоской. Полученные результаты применены для групповых три-тканей, которые, как известно, являются тканями Бола. Рассмотрены все классы четырехмерных ($r = 2$) и шестимерных ($r = 3$) групповых три-тканей с тривиальной сердцевиной. Оказалось, что при $r = 2$ тривиальную сердцевину имеет только групповая три-ткань, определяемая абелевой группой, то есть параллелизуемая три-ткань. В случае $r = 3$, кроме параллелизуемой, существует еще только одна групповая три-ткань с тривиальной сердцевиной, при этом соответствующая группа Ли (координатная группа ткани) входит в класс трехмерных групп Ли, для которых ранг матрицы, образованной компонентами структурного тензора группы, равен 1 (в [2] эта группа обозначена $\Gamma_{3,7}$). В настоящей работе построено вложение указанной шестимерной групповой три-ткани в некоторую десятимерную ткань Муфанг.

1. Три-ткань Муфанг

Пусть $W(r,r,r)$ – три-ткань, образованная на $2r$-мерном дифференцируемом многообразии $\mathcal{M}$ тремя гладкими слоениями λ_1, λ_2 и λ_3 коразмерности r. Следуя [1], зададим слоения ткани $W(r,r,r)$ в некоторых локальных координатах на многообразии $\mathcal{M}$ уравнениями

$$\lambda_1: \ x = const, \quad \lambda_2: \ y = const, \quad \lambda_3: \ z = f(x,y) = const,$$

где $x = (x^1, ..., x^r)$, $x \in X$, $y = (y^1, ..., y^r)$, $y \in Y$, $z = (z^1, ..., z^r)$, $z \in Z$, а $f = (f^1, ..., f^r)$ – гладкая функция.

Уравнение $z = f(x,y)$ связывает параметры x, y и z слоев первого, второго и третьего слоений три-ткани $W(r,r,r)$, проходящих через одну точку многообразия $\mathcal{M}$, и называется уравнением три-ткани $W(r,r,r)$. Это уравнение определяет также квазигруппу

$$(\cdot): \ X \times Y \to Z, \quad z = f(x,y) \equiv x \cdot y, \tag{1}$$

которая называется локальной координатной квазигруппой три-ткани и рассматривается с точностью до изотопических преобразований $\tilde{x} = \alpha(x)$, $\tilde{y} = \beta(y)$, $\tilde{z} = \gamma(z)$. Для квазигруппы (1) определены обратные операции – левая и правая, обозначим их ${}^{-1}f$ и f^{-1} соответственно. Они задаются уравнениями [1]:

$$x =^{-1} f(z,y), \quad y = f^{-1}(x,z). \tag{2}$$

В [1] описаны основные классы три-тканей $W(r,r,r)$, в том числе три-ткани Бола – левая $B_l \equiv B_l(r,r,r)$, правая $B_r \equiv B_r(r,r,r)$ и средняя $B_m \equiv B_m(r,r,r)$. Эти ткани характеризуются замыканием соответствующих достаточно малых конфигураций Бола – левых (B_l), правых (B_r) и средних (B_m). Три-ткань, на которой замыкаются конфигурации Бола всех трех типов, называется тканью Муфанг и обозначается M. Следовательно, три-ткань Муфанг $M \equiv M(r,r,r)$ является одновременно левой, правой и средней тканью Бола.

С другой стороны, три-ткань Муфанг характеризуется тем, что любая ее локальная координатная квазигруппа изотопна лупе Муфанг. Напомним [1], что лупа (квазигруппа с единицей) является лупой Муфанг, если в ней выполняется тождество Муфанг:

$$(u \circ v) \circ (w \circ u) = u \circ ((v \circ w) \circ u),$$

где ($\circ$) – операция в лупе. Напомним также [1], что касательная W-алгебра ткани Муфанг является алгеброй Мальцева. Последняя характеризуется выполнением тождества

$$[[\xi,\eta],[\xi,\zeta]] = [[[\xi\eta]\,\zeta]\,\xi] + [[[\eta\zeta]\,\xi]\,\xi] + [[[\zeta\xi]\,\xi]\,\eta]\,. \tag{3}$$

Согласно [1], локальная W-алгебра три-ткани W определена в касательном пространстве T_e к координатной лупе ткани в ее единице e. Она содержит две операции — бинарную (коммутирования) и тернарную (ассоциирования), первая из которых определяется тензором кручения a^i_{jk}, а вторая – тензором кривизны b^i_{jkl} ткани, так что

$$[\xi,\eta]^i = -2a^i_{jk}\xi^j\eta^k, \quad (\xi,\eta,\zeta)^i = -b^i_{jkl}\xi^j\eta^k\zeta^l,$$

$\xi,\eta,\zeta \in T_e$, $i,j,k,l,... = \overline{1,r}$. Напомним [1], что тензорами кручения и кривизны произвольной три-ткани $W(r,r,r)$ называются величины a^i_{jk} и b^i_{jkl}, входящие в структурные уравнения ткани:

$$\begin{gathered} d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \\ d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + b^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l, \end{gathered} \tag{4}$$

$$\nabla a^i_{jk} \equiv da^i_{jk} - a^i_{mk}\omega^m_j - a^i_{jm}\omega^m_k + a^m_{jk}\omega^i_m = b^i_{[j|l|k]}\underset{1}{\omega}^l + b^i_{[jk]l}\underset{2}{\omega}^l. \tag{5}$$

Формы Пфаффа $\underset{1}{\omega}^i = \dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}dx^j$ и $\underset{2}{\omega}^i = \dfrac{\partial f^i}{\partial y^k}dy^j$ образуют базис в пространстве дифференциальных 1-форм многообразия $\mathcal{M}$, несущего три-ткань $W(r,r,r)$. Слоения ткани задаются уравнениями

$$\lambda_1:\ \underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_2:\ \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_3:\ \underset{3}{\omega}^i \overset{def}{\equiv} \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0. \tag{6}$$

Так как тензор кривизны три-ткани Муфанг удовлетворяет условию $b = \operatorname{alt} b$, то он выражается через ее тензор кручения:

$$b^i_{jkl} = -2a^m_{[jk}a^i_{l]m}, \tag{7}$$

поэтому уравнения (5) примут вид

$$\nabla a^i_{jk} = -b^i_{jkl}(\underset{1}{\omega}^l - \underset{2}{\omega}^l). \tag{8}$$

Отсюда также следует, что в W-алгебре ткани Муфанг имеется лишь одна независимая операция:

$$[\xi,\eta]^i = -2a^i_{jk}\xi^j\eta^k. \tag{9}$$

С учетом (9) тождество (3), характеризующее алгебры Мальцева, может быть записано в тензорной форме

$$a^i_{jp}a^p_{lq}a^q_{km} + a^i_{kp}a^p_{mq}a^q_{jl} + a^i_{lp}a^p_{kq}a^q_{mj} + a^i_{mp}a^p_{jq}a^q_{lk} = a^i_{pq}a^p_{jk}a^q_{lm}. \tag{10}$$

Как уже сказано выше, три-ткань Муфанг является левой тканью Бола, поэтому она обладает сердцевиной. Так называется локальная квазигруппа, определяемая на базе X первого слоения ткани B_l уравнением $c = a * b$, которое следует из условия замыкания на ткани B_l конфигураций (B_l), а последнее записывается в виде равенства [1]:

$$c =^{-1} f(f(a, f^{-1}(b, f(a, y))), y), \quad a, b, c \in X, \quad y \in Y, \tag{11}$$

(здесь ^{-1}f и f^{-1} определяются уравнениями (2)). Равенство (11) выполняется для любого $y \in Y$ и задает операцию $(*) : X \times X \to X$, $c = a * b$. Если f – локальная координатная лупа три-ткани, то уравнение (11) может быть записано в виде [3]:

$$c = f(a, f^{-1}(b, a)). \tag{12}$$

Известно [6], что сердцевина ткани B_l изотопна левой лупе Бола, но не изотопна, вообще говоря, координатной квазигруппе этой ткани.

2. Вложение шестимерной групповой три-ткани с тривиальной сердцевиной в десятимерную три-ткань Муфанг

В [3] найдены уравнения шестимерной групповой три-ткани, определяемой трехмерной группой Ли $\Gamma_{3,7}$, они имеют вид:

$$\begin{cases} z^1 = x^1 + y^1, \\ z^2 = x^2 + y^2, \\ z^3 = x^3 + y^3 - x^1y^2 + x^2y^1. \end{cases} \tag{13}$$

Обозначим эту ткань GW^0. Сердцевина ткани GW^0 задается уравнениями

$$c^1 = 2a^1 - b^1, \quad c^2 = 2a^2 - b^2, \quad c^3 = 2a^3 - b^3 \tag{14}$$

и является, очевидно, тривиальной. Тензор кручения ткани GW^0 имеет, согласно [3], одну ненулевую компоненту

$$a^3_{12} = 1, \tag{15}$$

а тензор кривизны равен нулю, поскольку эта три-ткань – групповая.

Заметим, что для ткани GW^0 выполняются условия $a^i_{jp}a^p_{km} = 0$ (см. [3]), которые равносильны равенству $[[\xi\eta]\,\zeta] = 0$. Поэтому локальная W-алгебра этой ткани (алгебра Ли) является нильпотентной. Это единственная трехмерная неабелева нильпотентная алгебра Ли [4].

Покажем, что существует три-ткань Муфанг (обозначим ее $\bar{M}$), для которой групповая три-ткань (13) будет фактор-тканью.

Согласно [5], в некоторых локальных координатах уравнения ткани, допускающей фактор-ткань, могут быть приведены к виду

$$z^a = f^a(x^b, y^c), \quad z^u = f^u(x^j, y^k), \tag{16}$$

здесь и далее $a, b, c, ... = \overline{1, \rho}$; $u, v, w, ... = \overline{\rho+1, r}$; $\rho < r$, а первая серия уравнений задает фактор-ткань. Для рассматриваемой три-ткани $\bar{M}$ $\rho = 3$, функции f^a определяются уравнениями (13), $u = \overline{4, r}$.

При $r = 4$ получаем восьмимерную три-ткань Муфанг, определяемую лупой Муфанг минимальной размерности, уравнения которой известны [1], а тензор кручения имеет следующие ненулевые компоненты: $a^1_{14} = a^2_{24} = -a^3_{34} = 1$, $a^3_{12} = 1$. Сравнивая последние с (15), видим, что искомая три-ткань $\bar{M}$ не эквивалентна восьмимерной ткани Муфанг.

Покажем, что ткань Муфанг вида (16) существует при $r = 5$ и найдем ее уравнения. В соответствии с [1] (см. также [5]) запишем структурные уравнения (4) произвольной три-ткани, имеющей фактор-ткань $\tilde{W} = \tilde{W}(\rho, \rho, \rho)$:

$$\begin{gathered}
d\underset{1}{\omega}^a = \underset{1}{\omega}^b \wedge \omega^a_b + a^a_{bc}\underset{1}{\omega}^b \wedge \underset{1}{\omega}^c, \quad d\underset{2}{\omega}^a = \underset{2}{\omega}^b \wedge \omega^a_b - a^a_{bc}\underset{2}{\omega}^b \wedge \underset{2}{\omega}^c, \\
d\underset{1}{\omega}^u = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^u_j + a^u_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^u = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^u_j - a^u_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \\
d\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + b^a_{bcd}\underset{1}{\omega}^c \wedge \underset{2}{\omega}^d, \\
d\omega^u_j = \omega^k_j \wedge \omega^u_k + b^u_{jkl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l,
\end{gathered} \tag{17}$$

Уравнения $\underset{1}{\omega}^a = 0$, $\underset{2}{\omega}^a = 0$ являются вполне интегрируемыми и задают $2(r-\rho)$-мерное трансверсальное подмногообразие $\mathcal{M}'$, на котором определена подткань $W' = W'(r-\rho, r-\rho, r-\rho)$, образованная слоениями

$$\lambda'_1 : \ \underset{1}{\omega}^u = 0, \quad \lambda'_2 : \ \underset{2}{\omega}^u = 0, \quad \lambda'_3 : \ \underset{3}{\omega}^u \equiv \underset{1}{\omega}^u + \underset{2}{\omega}^u = 0.$$

Слоения фактор-ткани $\tilde{W} = W/W'$ задаются на фактор-многообразии $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\mathcal{M}'$ размерности 2ρ уравнениями:

$$\tilde{\lambda}_1 : \ \underset{1}{\omega}^a = 0, \quad \tilde{\lambda}_2 : \ \underset{2}{\omega}^a = 0, \quad \tilde{\lambda}_3 : \ \underset{3}{\omega}^a \equiv \underset{1}{\omega}^a + \underset{2}{\omega}^a = 0.$$

Из равенств (10) с учетом (15) следует, что для искомой ткани $\bar{M}$ можно положить $a^4_{jk} = 0$, а из набора a^5_{jk} ненулевыми могут быть следующие компоненты: a^5_{12}, a^5_{14}, a^5_{24}, a^5_{34}. При этом из (7) получаем, что тензор кривизны имеет единственную ненулевую компоненту

$$b^5_{124} = \frac{2}{3} a^5_{34} \equiv b \tag{18}$$

при условии $a^5_{34} \neq 0$. Учитывая найденные в [3] структурные уравнения групповой ткани (13), запишем уравнения (17) для ткани $\bar{M}$, получим:

$$\begin{aligned}
&d\underset{1}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{1}{\omega}^2 = 0, \quad d\underset{1}{\omega}^3 = 2\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^2, \quad d\underset{1}{\omega}^4 = 0,\\
&d\underset{1}{\omega}^5 = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^5_j + 2a^5_{12}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^2 +\\
&+2a^5_{14}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^4 + 2a^5_{24}\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{1}{\omega}^4 + 2a^5_{34}\underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{1}{\omega}^4,\\
&d\underset{2}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^2 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^3 = -2\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^2, \quad d\underset{2}{\omega}^4 = 0,\\
&d\underset{2}{\omega}^5 = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^5_j - 2a^5_{12}\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^2 -\\
&-2a^5_{14}\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^4 - 2a^5_{24}\underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^4 - 2a^5_{34}\underset{2}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^4,
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
&d\omega^4_j = \omega^k_j \wedge \omega^4_k,\\
&d\omega^5_1 = \omega^4_1 \wedge \omega^5_4 + \omega^5_1 \wedge \omega^5_5 + b\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^4 - b\underset{1}{\omega}^4 \wedge \underset{2}{\omega}^2,\\
&d\omega^5_2 = \omega^4_2 \wedge \omega^5_4 + \omega^5_2 \wedge \omega^5_5 - b\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^4 + b\underset{1}{\omega}^4 \wedge \underset{2}{\omega}^1,\\
&d\omega^5_3 = \omega^4_3 \wedge \omega^5_4 + \omega^5_3 \wedge \omega^5_5,\\
&d\omega^5_4 = \omega^4_4 \wedge \omega^5_4 + \omega^5_4 \wedge \omega^5_5 + b\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^2 - b\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^1,\\
&d\omega^5_5 = \omega^4_5 \wedge \omega^5_4,
\end{aligned} \tag{20}$$

при этом $\omega^1_j = \omega^2_j = \omega^3_j = 0$. Из (20) следует, что система уравнений

$$\omega^4_j = 0, \quad \omega^5_3 = 0, \quad \omega^5_5 = 0 \tag{21}$$

является вполне интегрируемой. С учетом (21) запишем уравнения (8), получим:

$$da^5_{12} = -b(\underset{1}{\omega}^4 - \underset{2}{\omega}^4), \quad da^5_{14} = b(\underset{1}{\omega}^2 - \underset{2}{\omega}^2), \quad da^5_{24} = -b(\underset{1}{\omega}^1 - \underset{2}{\omega}^1), \tag{22}$$

$da^5_{34} = 0$. Отсюда следует, что $a^5_{34} = const$, положим

$$a^5_{34} = -3. \tag{23}$$

Тогда из (18) находим

$$b = -2. \tag{24}$$

Из уравнений (19) найдем следующие формы:

$$\begin{aligned}&\underset{1}{\omega}^1 = dx^1,\ \underset{1}{\omega}^2 = dx^2,\ \underset{1}{\omega}^3 = x^1dx^2 - x^2dx^1 + dx^3,\ \underset{1}{\omega}^4 = dx^4,\\ &\underset{2}{\omega}^1 = dy^1,\ \underset{2}{\omega}^2 = dy^2,\ \underset{2}{\omega}^3 = -y^1dy^2 + y^2dy^1 + dy^3,\ \underset{2}{\omega}^4 = dy^4,\end{aligned} \tag{25}$$

где (x^i, y^j) – локальные координаты на $\mathcal{M}$. Подставим (24) и (25) в (22) и проинтегрируем полученные уравнения, найдем:

$$a^5_{12} = 2(x^4 - y^4), \quad a^5_{14} = -2(x^2 - y^2), \quad a^5_{24} = 2(x^1 - y^1). \tag{26}$$

Теперь подставим (21) и (24) в систему (20). Интегрируя полученные уравнения, найдем формы

$$\begin{aligned}&\omega^5_1 = y^4dx^2 - x^2dy^4 - y^2dx^4 + x^4dy^2,\\ &\omega^5_2 = -y^4dx^1 + x^1dy^4 + y^1dx^4 - x^4dy^1,\\ &\omega^5_4 = y^2dx^1 - x^1dy^2 - y^1dx^2 + x^2dy^1.\end{aligned} \tag{27}$$

Формы $\underset{1}{\omega}^5$ и $\underset{1}{\omega}^5$ найдем, интегрируя соответствующие уравнения системы (19), в которых учтем (21), (23), (25)–(27); получим:

$$\begin{aligned}&\underset{1}{\omega}^5 = dx^5+\\ &+x^2y^4dx^1 - x^2x^4dx^1 - x^4y^2dx^1 + 3x^1x^4dx^2 - x^1y^4dx^2+\\ &+x^4y^1dx^2 + 3x^4dx^3 + x^1x^2dx^4 - x^2y^1dx^4 - 3x^3dx^4 + x^1y^2dx^4,\\ &\underset{2}{\omega}^5 = dy^5+\\ &= y^2x^4dy^1 - x^2y^4dy^1 - 3y^2y^4dy^1 - x^4y^1dy^2 + y^4x^1dy^2+\\ &+y^4y^1dy^2 + y^1x^2dy^4 - x^1y^2dy^4 - y^1y^2dy^4 + 3y^3dy^4 - 3y^4dy^3.\end{aligned} \tag{28}$$

Запишем уравнения (6) слоений рассматриваемой ткани $\bar{M}$ с учетом (25) и (28), проинтегрируем их и найдем уравнения этой ткани в виде:

$$\begin{cases} z^i = x^i + y^i,\ (i = 1, 2, 4), \quad z^3 = x^3 + y^3 - x^1y^2 + x^2y^1,\\ z^5 = x^5 + y^5+\\ +x^3y^4 - x^4y^3 + x^1x^2y^4 + 2x^1x^4y^2 + x^4y^1y^2 + 2x^2y^1y^4.\end{cases} \tag{29}$$

Уравнения (29) определяют также локальную координатную лупу ткани $\bar{M}$ с единицей e(0,0,0,0,0) – пятимерную лупу Муфанг.

Так как для операции (9) в локальной W-алгебре ткани $\bar{M}$ с ненулевыми компонентами (15), (23), (26) выполняются условия

$$[[\xi, \eta], [\zeta, \varsigma]] = 0, \quad [[[\xi, \eta], \zeta], \varsigma] = 0,$$

то эта W-алгебра является разрешимой нильпотентной алгеброй Мальцева. Согласно [4] при $r = 5$ такая нелиева алгебра Мальцева единственная. Верно

Предложение. *Уравнения десятимерной три-ткани Муфанг $\bar{M}$, определяемой единственной нелиевой разрешимой нильпотентной алгеброй Мальцева размерности 5, в некоторых локальных координатах могут быть приведены к виду (29).*

Укажем подткань W' три-ткани $\bar{M}$, факторизация по которой приводит к три-ткани GW^0. Из (19) следует, что система уравнений

$$\underset{1}{\omega}^1 = 0,\ \underset{1}{\omega}^2 = 0,\ \underset{1}{\omega}^3 = 0, \quad \underset{2}{\omega}^1 = 0,\ \underset{2}{\omega}^2 = 0,\ \underset{2}{\omega}^3 = 0$$

является вполне интегрируемой на многообразии $\mathcal{M}$, несущем три-ткань $\bar{M}$, и определяет 4-мерное трансверсальное подмногообразие $\mathcal{M}'$. На этом подмногообразии слоения

$$\lambda_1' :\ \underset{1}{\omega}^4 = 0,\ \underset{1}{\omega}^5 = 0, \quad \lambda_2' :\ \underset{2}{\omega}^4 = 0,\ \underset{2}{\omega}^5 = 0,$$
$$\lambda_3' :\ \underset{3}{\omega}^4 \equiv \underset{1}{\omega}^4 + \underset{2}{\omega}^4 = 0,\ \underset{3}{\omega}^5 \equiv \underset{1}{\omega}^5 + \underset{2}{\omega}^5 = 0,$$

образуют подткань $W' = W'(2,2,2)$. При этом формы $\underset{1}{\omega}^4, \underset{1}{\omega}^5, \underset{2}{\omega}^4, \underset{2}{\omega}^5$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\underset{1}{\omega}^4 = 0,\ d\underset{1}{\omega}^5 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^4 = 0,\ d\underset{2}{\omega}^5 = 0.$$

Из них следует, что подткань W' является параллелизуемой, обозначим ее R^0. Согласно сказанному выше, $GW^0 = \bar{M}/R^0$. Итак, верна

Теорема. *Шестимерная групповая три-ткань GW^0, заданная уравнениями (13), может быть реализована как фактор-ткань десятимерной три-ткани Муфанг $\bar{M}$, определяемой уравнениями (29), по ее четырехмерной параллелизуемой подткани R^0.*

Найдем уравнения сердцевины $c = a * b$ три-ткани $\bar{M}$ в виде (12). В результате вычислений получим:

$$\begin{cases} c^1 = 2a^1 - b^1,\ c^2 = 2a^2 - b^2,\ c^3 = 2a^3 - b^3,\ c^4 = 2a^4 - b^4, \\ c^5 = 2a^5 - b^5 + 2a^1(a^2 - b^2)(a^4 - b^4) + \\ +2a^2(a^4 - b^4)(a^1 - b^1) + 2a^4(a^1 - b^1)(a^2 - b^2). \end{cases} \tag{30}$$

Очевидно, что эта сердцевина не является тривиальной, но содержит максимально возможную (четырехмерную) тривиальную фактор-квазигруппу, которая задается первыми четырьмя уравнениями системы (30) на соответствующем фактор-многообразии. Отметим также, что сердцевина три-ткани GW^0, определяемая уравнениями (14), суть шестимерная фактор-квазигруппа квазигруппы (30).

Заключение

В работе построено вложение шестимерной групповой три-ткани с тривиальной сердцевиной (она обозначена GW^0) в некоторую десятимерную три-ткань Муфанг. Заметим, что три-ткань GW^0 является единственной шестимерной групповой тканью с тривиальной сердцевиной. Она характеризуется тем, что ее локальная W-алгебра (алгебра Ли) является нильпотентной. Это единственная трехмерная неабелева нильпотентная алгебра Ли [4]. Три-ткань GW^0 реализована как фактор-ткань указанной десятимерной три-ткани Муфанг по ее четырехмерной параллелизуемой подткани.

Список литературы

1. Акивис М.А., Шелехов А.М. Многомерные три-ткани и их приложения/ монография. Тверь: ТвГУ. 2010. 308 с.
2. Васильева М.В. Группы Ли преобразований. М.: Моск. гос. пед. ин-т. 1969. 175 с.
3. Гегамян Г.Д., Толстихина Г.А. О левых тканях Бола с тривиальной сердцевиной. Вестник Тверского государственного университета. Серия: прикладная математика. Выпуск 2(25), №17. 2012. С. 99–114.
4. Кузьмин Е.Н. Алгебры Мальцева размерности пять над полем характеристики нуль. Алгебра и логика. Том 9, №5. 1970. С. 691–700.
5. Толстихина Г.А. Обобщенная левая три-ткань Бола $B_l(\rho, r, r)$ как фактор-ткань левой ткани Бола $B_l(r, r, r)$. Вестник Тверского государственного университета. Серия: прикладная математика. Выпуск 2(21), №21. 2011. С. 117 – 134.
6. Толстихина Г.А., Шелехов А.М. О три-тканях Бола с IC-свойством. Изв. Вузов. Мат. 2013. №5. С. 25–35.

Гегамян Г.Д.

Кафедра функционального анализа и геометрии

Тверской госуниверситет, Тверь, Россия

E-mail: geg_geghamyan@yahoo.com

G. Geghamyan

Tver State University, Russia.

About embedding of six-dimentional group three-web with trivial core to Moufang three-web

In this paper we have constructed an embedding of six-dimentional group three-web with trivial core to some ten-dimentional Moufang three-web. Bol three-web, core of Bol three-web, locally symmetric space, group three-web, Moufang three-web, trivial core, locally flat structure.