Геометрична еквівалентність функцій морса-смейла роду один на тривимірній сфері

Н. В. Лукова-Чуйко

Анотація Досліджуються функції Морса на тривимірній сфері, поле градієнта яких є полем Морса-Смейла (МС-функції). Розглядаються гомеоморфізми, які є одночасно топологічнрою еквівалентністю функцій та полів. Описані всі МС-функції, що задаються поверхнею Хегора роду один і мають не більше ніж шість точок перетину між меридіанами.

Ключові слова функції Морса, еквівалентність, поле Морса-Смейла

УДК 517.91

1 Вступ

Нехай M — гладкий многовид. Два векторних поля X, Y називаються топологічно еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм $h : M \to M$, який відображає траєкторії поля X в траєкторії поля Y, зберігаючи їх орієнтацію.

Різними способами топологічна класифікація векторних полів Морса-Смейла на поверхнях отримана Е.А.Леонтовичем та А.Г.Майером, М.Пейксото, В.В.Шарком, Х.Вонгом, Г.Флейтасом, Е.Гірик та інш.

Топологічна класифікація векторних полів Морса-Смейла на тривимірних многовидах без замкнених орбіт була побудована Г.Флейтасом [1] Я.Л.Уманським [2] і в загальному випадку О.О.Пришляком [3].

Нехай M — гладкий многовид $f : M \to \mathbf{R}$ — гладка функція.

Означення 1 *Функції $f, g : M \to \mathbf{R}$ називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h : M \to M$, $h' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, для яких виконується рівність $f \circ h = h' \circ g$ і гомеоморфізм h' зберігає орієнтацію прямої.*

Глобальна топологічна класифікація функцій Морса на поверхнях та однозв'язних многовидах розмірності більшої за 5 була отримана в роботах В.В.Шарко та А.Т.Фоменко [5], [4]. Топологічну класифікацію функцій Морса на замкнених тривимірних многовидах побудовано в [3].

Нехай M – ріманів многовид.

Означення 2 *Функцією Морса-Смейла називається така функція Морса поле градієнта якої є полем Морса-Смейла.*

Означення 3 *Дві функції $f, g : M \to \boldsymbol{R}$ називаються геометрично еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h : M \to M$, $h' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ для яких виконується рівність $f \circ h = h' \circ g$ і крім того гомеоморфізм h відображає траєкторії поля grad f на траєкторії поля grad g.*

У [6] отримана класифікація функцій Морса-Смейла на замкнених ріманових тривимірних многовидах по відношенню до геометричної еквівалентності в термінах узагальнених діаграм Хегора.

Постановка задачі. Дослідити геометричні властивості функцій Морса-Смейла роду один на тривимірній сфері, знайти число геометрично нееквівалентних МС-функцій, що мають не більше ніж шість точок перетину між меридіанами.

2 Узагальнені діаграми Хегора

Нехай $H \cup H' = M$ — розбиття Хегора тривимірного многовида M, $F = \partial H = \partial H'$ — загальна поверхня кренделів H і H'.

Набір $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ замкнутих кривих, які не перетинаються, на поверхні F називається *узагальненою системою меридіанів* кренделя H, якщо вони обмежують диски $D_i \subset H$, після розрізування кренделя за якими вийде незв'язне об'єднання тривимірних дисків.

Нехай $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ — також узагальнена система меридіанів кренделя H'.

Означення 4 *Трійка (F, u, v), що складається з замкненої поверхні і двох узагальнених систем меридіанів, називається узагальненою діаграмою Хегора (УДХ) многовида M.*

Діаграми $(F,\ u,\ v)$ і $(F',\ u',\ v')$ називаються *гомеоморфними*, якщо існує такий гомеоморфізм h: $F \to F$, що $h(u)=u'$, $h(v)=v'$.

Діаграми $(F,\ u,\ v)$ і $(F',\ u',\ v')$ називаються *напівізотопними*, якщо існують ізотопії φ_t, ψ_t: $F \to F$, $t \in [0,1]$, що $\varphi_0=\psi_0=1$, $\varphi_1(u)=u'$, $\psi_1(v)=v'$.

Визначимо операцію додавання меридіанів: сумою $u_1\#\ u_2$ двох меридіанів u_1і u_2 уздовж простої кривої γ, що з'єднує u_1 і u_2, називається та компонента краю околу об'єднання $\partial U(u_1 \cup u_2 \cup \gamma)$, яка не ізотопна ні u_1, ні u_2 в U.

Позначимо через U_1, U_2,..., U_k ті області, на які меридіани u_1, u_2,..., u_n розбивають поверхню F, а через v_1, v_2,..., v_l—відповідні області для меридіанів v_1, v_2,..., v_m.

Діаграма називається *упорядкованою*, якщо задано таке відображення

$$\sigma : \{U_1, U_2, ..., U_k, u_1, u_2, ..., u_n, v_1, v_2, ..., v_m, v_1, v_2, ..., v_l\} \to \{1, 2, ..., N\},$$

що є відображенням на.

Упорядковані узагальнені діаграми Хегора (УУДХ) називаються гомеоморфними, якщо існує їх гомеоморфізм як діаграм Хегора, який зберігає упорядкування.

За функцією Морса побудуємо розбиття многовида на ручки (неоднозначно). Як і для звичайних діаграм Хегора поверхня F є межею об'єднання ручок індексу 0 і 1. Меридіанами будуть косередні сфери 1-ручок та середні сфери 2-ручок. Функція порядку на множині областей та меридіанів задається за допомогою порівняння значень функції Морса у відповідних критичних точках.

3 Геометрична еквівалентність.

Означення 5 *Функції f, g: $M \to \boldsymbol{R}$ називаються геометрично еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми h: $M \to M$, h': $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, для яких: 1) виконується рівність $f \circ h = h' \circ g$, 2) гомеоморфізм h відображає траєкторії поля градієнта функції f на траєкторії поля градієнта функції g; 3) гомеоморфізм h' зберігає орієнтацію прямої.*

Теорема 1 *([6])Дві функції Морса-Смейла f і g на тривимірному многовиді M будуть геометрично еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх УУДХ гомеоморфні.*

Функція σ має такі властивості:

1. якщо $u_i \subset \partial U_j$, то $\sigma(u_i) > \sigma(U_j)$;
2. якщо $v_i \subset \partial V_j$, то $\sigma(v_i) < \sigma(V_j)$;
3. якщо $u_i \cap v_j \neq \emptyset$, то $\sigma(u_i) < \sigma(v_j)$;
4. якщо $U_i \cap v_j \neq \emptyset$, то $\sigma(U_i) < \sigma(v_j)$;
5. якщо $u_i \cap V_j \neq \emptyset$, то $\sigma(u_i) < \sigma(V_j)$;
6. якщо $U_i \cap V_j \neq \emptyset$, то $\sigma(U_i) < \sigma(V_j)$.

Функцію σ, яка задовольняє властивостям 1) – 6), будемо називати *допустимою*.

Теорема 2 *([6]) Для кожної допустимої УУДХ існує функція Морса-Смейла, яка породжує цю УУДХ.*

4 Функції Морса-Смейла роду один на тривимірній сфері

Обчислимо число нееквівалентних МС-функцій на поверхні Хегора роду один де є не більше ніж шість точок перетину між меридіанами. Обчислимо також число узагальнених діаграм Хегора, що їм відповідають. Будемо розглядати діаграми Хегора на тривимірній сфері. Складністю функції будемо називати число точок перетину між меридіанами діаграми Хегора.

I. Нехай є один меридіан першого типу і один меридіан другого типу на поверхні Хегора роду один. Оскільки многовид сфера, то алгебраїчне число точок перетину дорівнює ± 1. Тому точок перетину непарне число.

Для функції порядку виконуються такі властивості:

$$u \subset \partial U \Rightarrow \sigma(u) > \sigma(U), \quad v \subset \partial V \Rightarrow \sigma(v) < \sigma(V),$$
$$u \cap v \neq \emptyset \Rightarrow \sigma(u) < \sigma(v), \quad U \cap v \neq \emptyset \Rightarrow \sigma(U) < \sigma(v),$$
$$u \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \sigma(u) < \sigma(V), \quad U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \sigma(U) < \sigma(V).$$

Тому можливе єдине упорядкування $\sigma(U) = 1$, $\sigma(u) = 2$, $\sigma(v) = 3$, $\sigma(V) = 4$.

1. У випадках однієї та трьох точок перетину між меридіанами існує по одні діаграмі Хегора. Вони мають такий вигляд:

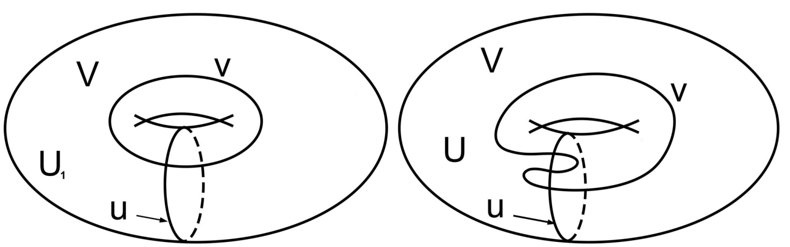

Рис. 1.

Отже, є лише **одна** МС-функція на поверхні Хегора роду один з **однією** точкою перетину між меридіанами і одна МС-функція з трьома точками перетину.

3. Нехай є п'ять точок перетину між меридіанами. Тоді, можливі такі діаграми:

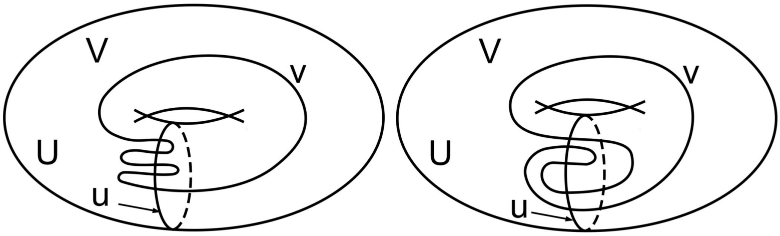

Рис. 2.

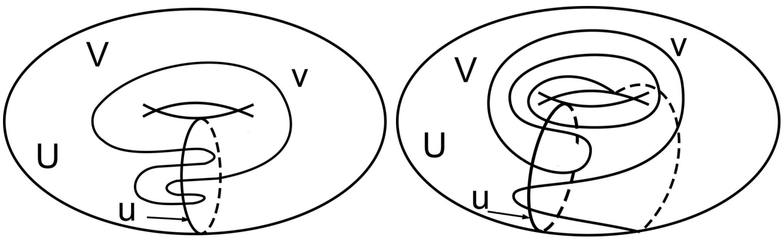

Рис. 3.

На кожній діаграмі існує одне упорядкування, а отже кожна діаграма задає одну МС-функцію. Маємо **4** діаграми Хегора і, відповідно, **4** МС-функції, що їх задають, якщо є **п'ять** точок перетину між меридіанами.

Отже, має місце така

Теорема 3 *На тривимірній сфері існує по одній геометрично не еквівалентній МС-функції складності 1 та 3 та чотири МС-функції складності 5, у яких по одній критичній точці кожного індексу.*

II. Нехай є два меридіани першого типу u_1, u_2 і один меридіан другого типу v на поверхні Хегора роду один. Якщо один з меридіанів гомотопний нулю(є границею двовимірного диску на поверхні), то як і в **I.** маємо непарну кількість точок перетину між меридіанами *u,v*. Якщо u_1, u_2 гомотопні між собою, то кількість точок перетину буде парною.

1. Якщо є одна точка перетину між меридіанами, то діаграма Хегора має такий вигляд:

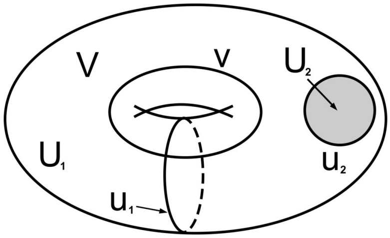

Рис. 4.

$u_2 \subset \partial U_1 \Rightarrow \sigma(u_2) > \sigma(U_1)$, $u_2 \subset \partial U_2 \Rightarrow \sigma(u_2) > \sigma(U_2)$, $v \subset \partial V \Rightarrow \sigma(v) > \sigma(V)$, $u_1 \cap v \neq \emptyset \Rightarrow \sigma(u_1) < \sigma(v)$, $u_1 \subset \partial U_1 \Rightarrow \sigma(u_1) > \sigma(U_1)$, $u_1 \subset \partial U_1 \Rightarrow \sigma(u_1) > \sigma(U_1)$, $U_1 \cap v \neq \emptyset \Rightarrow \sigma(U_1) < \sigma(v)$, $u_1 \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \sigma(u_1) < \sigma(V)$, $u_2 \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \sigma(u_2) < \sigma(V)$, $U_1 \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \sigma(U_1) < \sigma(V)$, $U_2 \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \sigma(U_2) < \sigma(V)$.

Можливі такі упорядкування:

U_1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
U_2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3
u_1	2	3	4	2	2	3	3	3	3	3	3	4	3	2	2	2	2	3	2	2	2	2
u_2	3	3	3	3	4	4	4	5	4	5	3	3	4	2	3	4	3	2	4	4	4	5
v	3	4	5	4	3	5	4	4	4	4	4	5	5	3	4	3	3	4	3	4	5	4

Отже, число топологічно нееквівалентних МС-функцій на поверхні Хегора роду один з **однією** точкою перетину між меридіанами дорівнює **22** і маємо **одну** діаграму Хегора.

2. Нехай є дві точки перетину між меридіанами. Діаграма Хегора має такий вигляд:

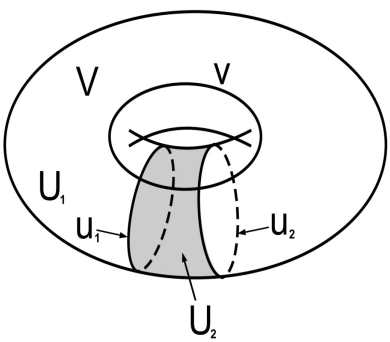

Рис. 5.

Можливі такі упорядкування:

U_1	1	1	1	1
U_2	2	2	1	1
u_1	3	3	2	2
u_2	3	4	2	3
v	4	5	3	4

Отже, число топологічно нееквівалентних МС-функцій на поверхні Хегора роду один з **двома** точками перетину між меридіанами дорівнює **4** і маємо **одну** діаграму Хегора.

3. Нехай є три точки перетину між меридіанами. Можливі три різні діаграми Хегора:

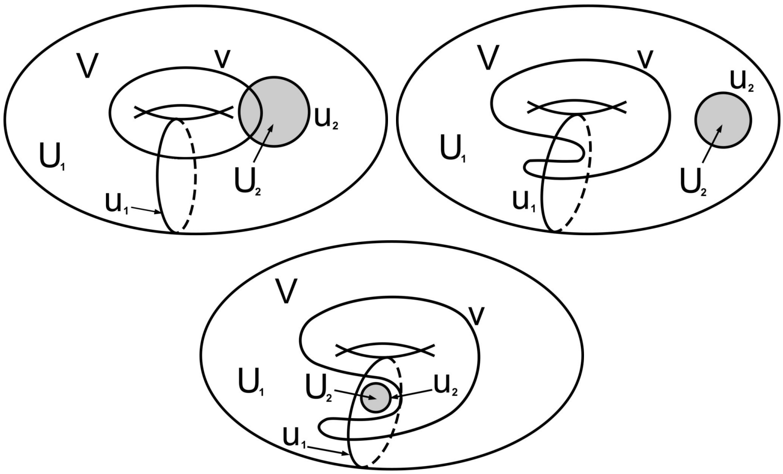

Рис. 6.

Для першої діаграми можливі 11 упорядкувань, для другої і третьої по 22 упорядкування. Отже для **трьох** точок перетину існує **3** діаграми Хегора і **55** МС-функцій, що їх задають.

4. Нехай є чотири точки перетину між меридіанами. Перетини меридіанів на діаграмі Хегора такі як на першій та другій діаграмах на рис. 1.

Можливі такі упорядкування:

U_1	1	1	1	1
U_2	2	2	1	1
u_1	3	3	2	2
u_2	3	4	2	3
V	4	5	3	4

Отримали **4** МС-функції і **одну** діаграму Хегора.

5. Нехай є п'ять точок перетину між меридіанами. Можливі такі різні діаграми Хегора:

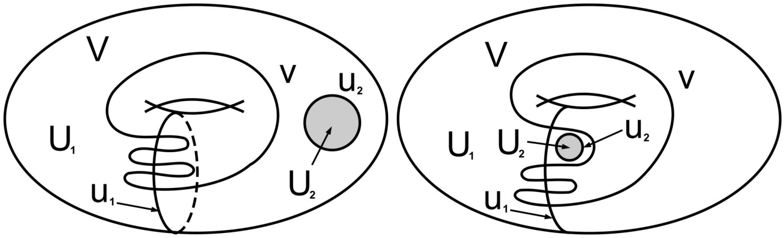

Рис. 7.

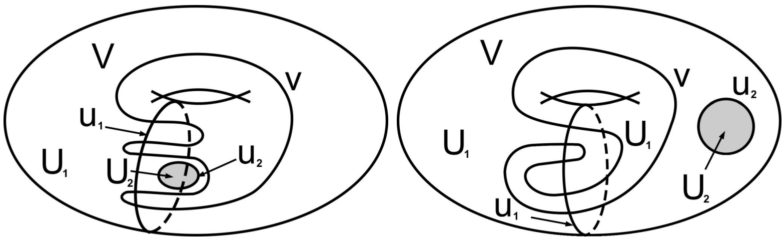

Рис. 8.

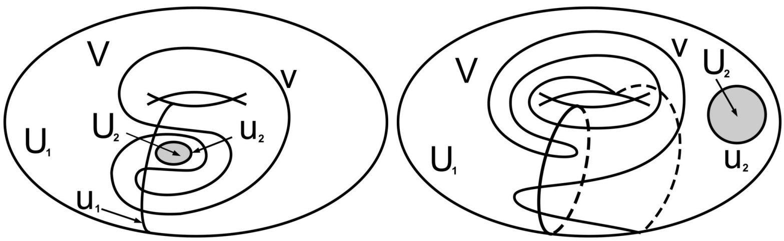

Рис. 9.

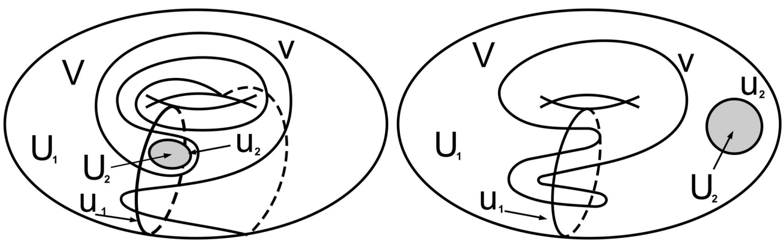

Рис. 10.

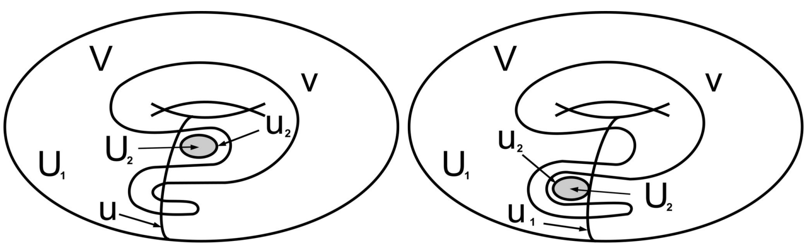

Рис. 11.

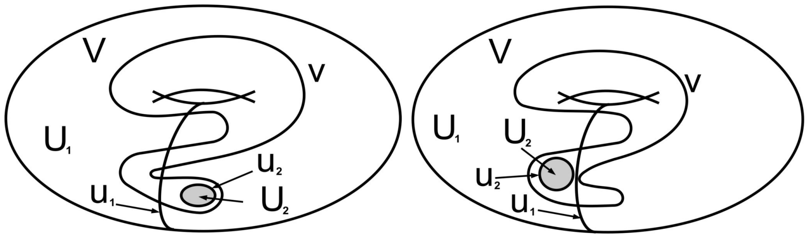

Рис. 12.

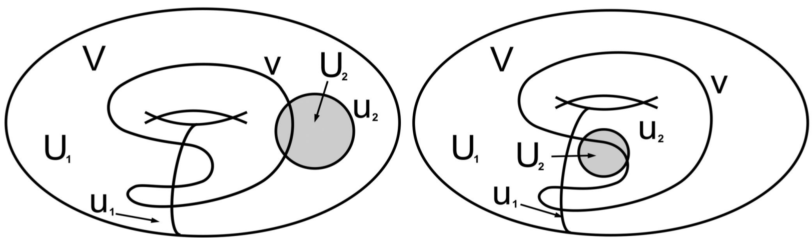

Рис. 13.

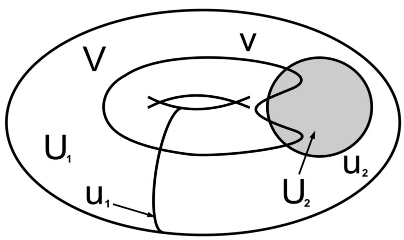

Рис. 14.

Перші 12 діаграм мають по 22 упорядкування, а останні 3 по 11 упорядкувань.

Отже, якщо є **п'ять** точок перетину між меридіанами, то маємо **15** діаграм Хегора і **297** МС-функцій, що їх задають.

6. Нехай є шість точок перетину між меридіанами. Можливі такі чотири діаграми Хегора:

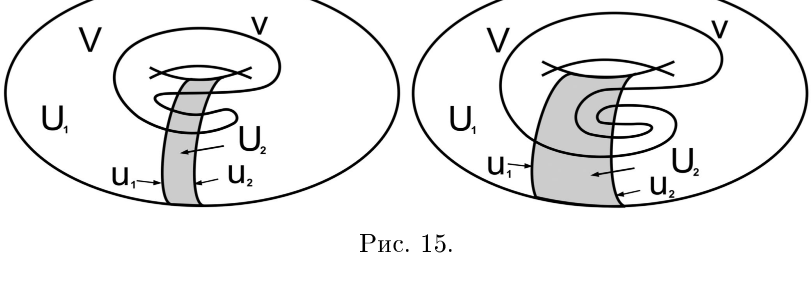

Рис. 15.

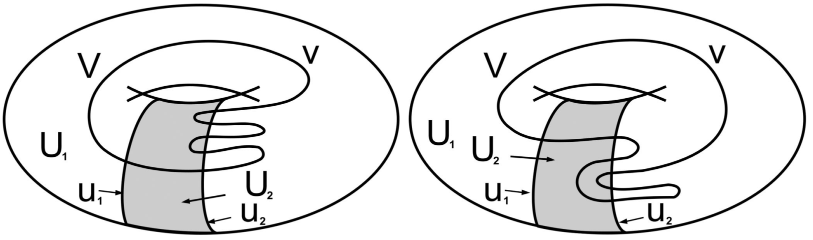

Рис. 16.

В кожному з чотирьох випадків можливі 4 упорядкування.

Отже, якщо є **шість** точок перетину між меридіанами маємо **4** діаграми Хегора і **16** МС-функцій, що їх задають.

Зауважимо, що якщо змінити типи меридіанів на протилежні, то діаграм і МС-функцій буде стільки ж. Таким чином, має місце така

Теорема 4 *На тривимірній сфері геометрично нееквівалентних МС-функцій роду 1 з шістьма критичними точками існує 44 функції складності 1, 8 функцій складності 2, 110 функцій складності 3, 8 функцій складності 4, 594 функції складності 5 та 32 функції складності 6.*

5 Висновки

Досліджено геометричні властивості МС-функцій на замкнених ріманових тривимірних многовидах. Підраховано число геометрично нееквівалентних МС-функцій, що задаються поверхнею Хегора роду один і мають не більше ніж шість точок перетину між меридіанами.

Література

1. Fleitas G. Classification of Gradient like flows on dimensions two and three , Bol. Soc. Brasil. Mat. - 1975. – Vol.6. - P. 155-183.
2. Уманский Я.Л. Схема трехмерной динамической системы Морса- Смейла без замкнутых траекторий , ДАН СССР. – 1976. – Т.230, №6. С. 1286-1
3. Пришляк О.О. Топологічні властивості функцій і векторних полів на маловимірних многовидах, Дис. на зд. наук. ст. доктора ф.-м. н., Київ. 2005. 272 с.
4. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1. – Ижевск: Изд. Дом "Удмурский универ.", 1999. -444с.
5. Шарко В.В. Функции на многообразиях. К.: Наук. думка, 1980. - 196 с.
6. Н.В. Лукова, О.О.Пришляк. Геометричні властивості МС-функцій на тривимірних многовидах // Збірник праць Інституту математики НАНУ, Т. 2, № 3, 2005.-с.112-124.

Н. В. Лукова-Чуйко
УДУФМТ, кафедра вищої математики та інформатики, Київ
E-mail: lukova@ukr.net

Geometric equivalence of Morse-Smale functions of one kind in a three-dimensional sphere

We investigate Morse functions on 3-manifold which the gradient field is a Morse-Smale vector field. We introduce the definition of geometric equivalence, which is topological equivalence of function and field. We describe the equivalence classes.