О сердцевине некоторой четырехмерной три-ткани Бола

Михеева А.А., Толстихина Г.А.

Аннотация Доказано, что сердцевина четырехмерной левой три-ткани Бола B_ℓ^*, связанной преобразованием парастрофии с известной четырехмерной средней три-тканью Бола Π^* параболического типа, не изотопна ее координатной квазигруппе. Также доказано, что левая обратная квазигруппа указанной сердцевины определяет среднюю три-ткань Бола гиперболического типа.

Ключевые слова Три-ткань Бола, сердцевина ткани Бола, локально симметрическое пространство, три-ткань Бола параболического типа, три-ткань Бола гиперболического типа

УДК 514.7

.

Введение

Пусть $W(r,r,r)$ – три-ткань, образованная на гладком многообразии $\mathcal{M}$ размерности $2r$ тремя гладкими слоениями λ_1, λ_2, λ_3 коразмерности r. Напомним [1], что с любой три-тканью $W(r,r,r)$ связана гладкая локальная квазигруппа, определяемая гладкой функцией

$$f:\ X\times Y\to Z,\quad z=f(x,y)\equiv x\cdot y, \tag{1}$$

где $x\in X$, $y\in Y$, $z\in Z$; $\dim X=\dim Y=\dim Z=r$ и в каждой точке многообразия $\mathcal{M}=X\times Y$ выполняются условия $|\dfrac{\partial f}{\partial x}|\neq 0$, $|\dfrac{\partial f}{\partial y}|\neq 0$. Квазигруппа (1) называется локальной координатной квазигруппой три-ткани $W(r,r,r)$. С другой стороны, уравнение $z=f(x,y)$ связывает параметры слоев ткани, проходящих через одну точку многообразия $\mathcal{M}$, и называется уравнением три-ткани.

Множества X, Y и Z являются локальными базами слоений λ_1, λ_2 и λ_3 соответственно, а слои ткани задаются уравнениями: $\lambda_1 : \ x = const$, $\lambda_2 : \ y = const$, $\lambda_3 : \ z = f(x,y) = const$. Параметры x, y и z допускают изотопические преобразования вида $\tilde{x} = \alpha(x)$, $\tilde{y} = \beta(y)$, $\tilde{z} = \gamma(z)$, где α, β, γ — локальные диффеоморфизмы, при этом уравнение (1) преобразуется к виду $\tilde{z} = \tilde{f}(\tilde{x},\tilde{y}) = \gamma(f(\alpha^{-1}(\tilde{x}), \beta^{-1}(\tilde{y})))$. Последнее определяет квазигруппу, изотопную квазигруппе (1). Три-ткани, определяемые функциями f и $\tilde{f}$ (изотопными квазигруппами), являются эквивалентными [1].

Три-ткани Бола (левые B_ℓ, правые B_r и средние B_m) образуют особый класс тканей, связанных с симметрическими пространствами, которые порождаются сердцевинами этих тканей [1], [4]. Так, сердцевина левой три-ткани Бола задается операцией

$$(*) : X \times X \to X, \quad c = a * b, \tag{2}$$

где a, b, c – параметры вертикальных слоев, входящих в произвольную левую конфигурацию Бола. Напомним [1], что для ткани B_ℓ, заданной уравнением (1), уравнение сердцевины получается из равенств

$$f(a,y) = f(b,\hat{y}), \quad f(c,y) = f(a,\hat{y}), \quad a,b,c \in X, \quad y,\hat{y} \in Y, \tag{3}$$

соответствующих замыканию на ткани левых конфигураций Бола. Исключая из этих равенств параметр $\hat{y}$, получаем равенство

$$f(a, f^{-1}(b, f(a,y))) = f(c,y),$$

которое должно выполняться для любого y. Отсюда находим уравнение сердцевины $c = a*b$. Согласно [1] сердцевина (2) является локальной гладкой квазигруппой, изотопной левой лупе Бола. Напомним [1], что лупа (квазигруппа с единицей) с операцией $(\circ)$ называется левой лупой Бола, если в ней выполняется левое тождество Бола: $(u \circ (v \circ u)) \circ w = u \circ (v \circ (u \circ w))$.

Таким образом, сердцевина три-ткани B_l определяет некоторую левую ткань Бола, обозначим ее CB_l, Левая обратная квазигруппа сердцевины $(*)$ определяет парастроф ткани CB_l – среднюю ткань Бола B_m. При этом особый интерес представляют четырехмерные ткани B_m, которые, как известно, являются грассманизуемыми, то есть эквивалентны грассмановым тканям. Напомним [1], [2], что всякая четырехмерная ткань B_m порождается на грассмановом многообразии прямых $G(1,4)$ проективного пространства P^3 тремя гиперповерхностями, одна из которых является плоскостью (обозначим ее π), а две другие принадлежат одной и той же квадрике (обозначим ее Q). Такие ткани классифицированы по виду квадрики Q и ее взаимному расположению с плоскостью π. При этом различают ткани трех типов: эллиптического (квадрика Q овальная), гиперболического (квадрика Q кольцевидная) и параболического (квадрика Q является конусом). В [3] найдены уравнения всех четырехмерных три-тканей B_m параболического типа. Возникает задача: определить тип и класс средних тканей Бола, связанных преобразованием парастрофии с три-тканями CB_l, которые определяются известными четырехмерными тканями B_m параболического типа. Далее мы рассмотрим одну из таких тканей.

1. Четырехмерная средняя три-ткань Бола Π^*

Рассмотрим четырехмерную *среднюю* три-ткань Бола (ткань B_m), определяемую уравнениями [3]:

$$\begin{cases} z^1 = \dfrac{1}{\sqrt{x^2y^2}}\dfrac{x^2-y^2}{x^1-y^1}, \\ z^2 = z^1x^1 - \sqrt{\dfrac{x^2}{y^2}}, \end{cases} \tag{4}$$

где $x^2 \neq 0$, $y^2 \neq 0$, $x^1 - y^1 \neq 0$. В [3] найдены уравнения всех четырехмерных три-тканей B_m параболического типа, в том числе уравнения (4) ткани класса Π^*, которая характеризуется тем, что гиперплоскость π пересекает конус Q по невырожденной действительной кривой второго порядка.

Известно [1], что ткани Бола связаны преобразованием парастофии: левая (правая) обратная квазигруппа ${}^{-1}f$ (f^{-1}) координатной квазигруппы f ткани B_m суть координатная квазигруппа ткани B_ℓ (ткани B_r). Найдем левую обратную квазигруппу координатной квазигруппы (4), затем переобозначим переменные $x^i \leftrightarrow z^i$, а полученные уравнения левой ткани Бола изотопическим преобразованием $\sqrt{y^2} \to y^2$, $\sqrt{z^2} \to z^2$, $\dfrac{z^1}{z^2} \to z^1$, $\dfrac{1}{z^2} \to z^2$ приведем к виду

$$\begin{cases} z^1 = \dfrac{1 + x^2(x^1y^1 - x^2)}{x^1y^2}, \\ z^2 = \dfrac{x^1y^1 - x^2}{y^2}, \end{cases} \tag{5}$$

где $x^1 \neq 0$, $y^2 \neq 0$. Уравнения (5) определяют левую три-ткань Бола, обозначим ее B_ℓ^*.

Найдем сердцевину этой ткани. Запишем равенства (3), соответствующие замыканию на ткани B_ℓ левых конфигураций Бола, и учтем уравнения (5), получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{1+a^2(a^1y^1-a^2)}{a^1y^2} = \dfrac{1+b^2(b^1\hat{y}^1-b^2)}{b^1\hat{y}^2}, & \dfrac{a^1y^1-a^2}{y^2} = \dfrac{b^1\hat{y}^1-b^2}{\hat{y}^2}, \\ \dfrac{1+c^2(c^1y^1-c^2)}{c^1y^2} = \dfrac{1+a^2(a^1\hat{y}^1-a^2)}{a^1\hat{y}^2}, & \dfrac{c^1y^1-c^2}{y^2} = \dfrac{a^1\hat{y}^1-a^2}{\hat{y}^2}. \end{cases}$$

Исключая из нее переменные $\hat{y}^1$ и $\hat{y}^2$, получим уравнения, которые должны удовлетворяться тождественно относительно y^1 и y^2, поэтому верны равенства:

$$\begin{aligned} c^1 &= a^1\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^1}{a^2}((a^1(1-b^2)-b^1(1-a^2))\frac{b^2}{b^1} + (a^1b^2-a^2b^1)\frac{a^2}{a^1}), \\ c^2 &= a^2\frac{b^1}{a^1} + (a^1(1-b^2)-b^1(1-a^2))\frac{b^2}{b^1} + (a^1b^2-a^2b^1)\frac{a^2}{a^1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Последние задают сердцевину ткани B_ℓ^*.

Покажем, что сердцевина (6) не изотопна координатной квазигруппе (5) рассматриваемой ткани B_ℓ^*. Согласно [5] изотопия координатной квазигруппы и сердцевины ткани устанавливается с помощью некоторого гладкого r-мерного подмногообразия V, трансверсального слоям ткани. В [6] найдены условия существования подмногообразия V, они имеют вид:

$$a^i_{jk}|_V = 0, \tag{7}$$

где a^i_{jk} – тензор кручения ткани. Напомним [1], что тензорами кручения и кривизны произвольной три-ткани $W(r,r,r)$ называются величины a^i_{jk} и b^i_{jkl}, входящие в структурные уравнения ткани:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j\wedge\omega^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j\wedge\underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j\wedge\omega^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j\wedge\underset{2}{\omega}^k,$$
$$d\omega^i_j = \omega^k_j\wedge\omega^i_k + b^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^k\wedge\underset{2}{\omega}^l,$$

$i,j,k,... = \overline{1,r}$. Здесь $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ – формы Пфаффа, которые образуют базис в пространстве дифференциальных 1-форм многообразия $\mathcal{M}$, несущего ткань $W(r,r,r)$, при этом $\underset{1}{\omega}^i = \bar{f}^i_j dx^j$, $\underset{2}{\omega}^i = \tilde{f}^i_j dy^j$, $\bar{f}^i_j = \dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$, $\tilde{f}^i_j = \dfrac{\partial f^i}{\partial y^k}$, а $f = (f^i)$ – функция ткани.

Известно [1], что компоненты тензора кручения можно вычислить по формулам $a^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}$, где $\Gamma^i_{jk} = -\dfrac{\partial^2 f^i}{\partial x^l\partial y^m}\bar{g}^l_j\tilde{g}^m_k$, $(\bar{g}^i_j)$ и $(\tilde{g}^i_j)$ – обратные матрицы для матриц $(\bar{f}^i_j)$ и $(\tilde{f}^i_j)$ соответственно. По этим формулам найдем компоненты тензора кручения три-ткани B_ℓ^*, определяемой уравнениями (5). В результате получим:

$$a_{12}^1 = \frac{x^1y^1y^2}{\Delta}, \quad a_{12}^2 = \frac{x^1y^2}{\Delta},$$

где $\Delta = 1 - (x^2)^2 + 2x^1x^2y^1 - (x^1)^2(y^1)^2$. Так как в области определения ткани $x^1 \neq 0$, $y^2 \neq 0$, то $a_{12}^2 \neq 0$, поэтому условия (7) не выполняются, а значит, подмногообразие V, задающее изотопию сердцевины и координатной квазигруппы ткани B_ℓ^*, не существует. Следовательно, верно

Предложение 1. *Сердцевина (6) четырехмерной левой три-ткани Бола B_ℓ^* не изотопна ее координатной квазигруппе (5).*

2. Четырехмерная три-ткань B_m, связанная преобразованием парастрофии с тканью CB_ℓ^*

Как уже сказано выше, сердцевина ткани Бола суть локальная гладкая квазигруппа, изотопная левой лупе Бола. Поэтому она определяет некоторую левую ткань Бола, не эквивалентную, вообще говоря, исходной три-ткани. Из предложения 1 следует, что определяемая сердцевиной (6) четырехмерная левая ткань Бола (обозначим ее CB_ℓ^*) не эквивалентна три-ткани (5). Рассмотрим среднюю ткань Бола, получаемую преобразованием парастрофии из ткани CB_ℓ^*, и определим ее тип. Для этого найдем уравнения левой обратной квазигруппы для сердцевины (6), затем положим $\dfrac{1}{a^1} = z^1$, $\dfrac{a^1}{a^2} = z^2$, $c^i = x^i$, $b^i = y^i$, $(i = 1, 2)$, в результате получим уравнения три-ткани B_m в виде

$$\begin{cases} z^1 = \dfrac{y^2(x^1+y^1)^2 - (x^2y^1 - x^1y^2)^2}{x^1y^1(x^1+y^1)(x^2+y^2)}, \\ z^2 = \dfrac{x^1+y^1}{x^2+y^2}. \end{cases} \tag{8}$$

Найдем сердцевину три-ткани (8) аналогично тому, как были найдены уравнения сердцевины три-ткани (5). В результате получим те же уравнения (6). Это значит, что три-ткань (8) имеет ту же сердцевину (6), что и ткань Π^*.

Согласно [4] сердцевина средней ткани Бола индуцирует на базе третьего слоения симметрическую связность $\widetilde{\Gamma}$, определяемую формами

$$\underset{3}{\omega}^i, \quad \tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i + a_{jk}^i(\underset{1}{\omega}^k - \underset{2}{\omega}^k).$$

Тензор кривизны этой связности имеет вид

$$R_{jkl}^i = \frac{1}{4}(b_{jkl}^i - 2a_{mj}^i a_{kl}^m). \tag{9}$$

Так как три-ткани (6) и (8) имеют одну и ту же сердцевину, то каждая из них индуцирует на базе третьего слоения одну и ту же симметрическую связность $\widetilde{\Gamma}$. Найдем компоненты тензора кривизны этой связности.

Как уже сказано выше, четырехмерная три-ткань B_m является грассманизуемой, поэтому для нее выполняются равенства [1]:

$$a^i_{jk} = a_j\delta^i_k - a_k\delta^i_j, \quad b^i_{jkl} = b_{jk}\delta^i_l - b_{jl}\delta^i_k. \tag{10}$$

В силу последних запишем (9) в виде

$$R^i_{jkl} = \frac{1}{4}\left(\left(b_{jk} + \frac{1}{2}a_ja_k\right)\delta^i_l - \left(b_{jl} + \frac{1}{2}a_ja_l\right)\delta^i_k\right). \tag{11}$$

Так как для ткани Π^* $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $b_{11} = -\frac{1}{2}$, $b_{12} = b_{21} = 0$, $b_{22} = 0$, (см. [3]), то по формулам (11) найдем

$$R^1_{112} = 0, \quad R^1_{212} = -\frac{1}{32}, \quad R^2_{112} = -\frac{1}{8}, \quad R^2_{212} = 0. \tag{12}$$

Поскольку для ткани (8) компоненты тензора R^i_{jkl} симметрической связности $\widetilde{\Gamma}$ будут те же самые, то с учетом (12) из выражений (11) найдем компоненты тензора кривизны три-ткани (8), в результате получим:

$$b_{12} = -\frac{1}{2}a_1a_2 = b_{21}, \quad b_{22} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}a_2a_2, \quad b_{11} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_1a_1, \tag{13}$$

где a_1, a_2 – компоненты тензора кручения этой ткани. Согласно [2] ткани эллиптического, гиперболического и параболического типа характеризуются соответственно условиями: $|b_{ij}| > 0$, $|b_{ij}| < 0$, $|b_{ij}| = 0$. Для рассматриваемой ткани B_m, определяемой уравнениями (8), в силу (13) имеем:

$$|b_{ij}| = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{12} = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16}(a_1)^2 + \frac{1}{4}(a_2)^2. \tag{14}$$

Так как сердцевина ткани (8) изотопна левой обратной квазигруппе ее координатной квазигруппы, то для этой ткани выполняются условия (7), которые с учетом (10) примут вид

$$a_1|_V = 0, \quad a_2|_V = 0.$$

В силу последних из (14) следует, что на подмногообразии $V \subset \mathcal{M}$ $|b_{ij}| = -\frac{1}{16} < 0$. Поскольку указанная характеристика не зависит от выбора точек на многообразии $\mathcal{M}$, несущем три-ткань, (см. [2]), то эти условия будут выполняться на всем многообразии $\mathcal{M}$, несущем рассматриваемую три-ткань (8). Поэтому верно

Предложение 2. *Пусть* B_ℓ^* *– четырехмерная левая три-ткань Бола, связанная преобразованием парастрофии с четырехмерной средней три-тканью Бола* Π^* *параболического типа. Левая обратная квазигруппа (8) сердцевины (6) три-ткани* B_ℓ^* *определяет среднюю три-ткань Бола гиперболического типа.*

Заключение

В работе найдены уравнения сердцевины четырехмерной левой три-ткани Бола B_ℓ^*, связанной преобразованием парастрофии с известной четырехмерной средней тканью Бола Π^* параболического типа. Доказано, что найденная сердцевина не изотопна координатной квазигруппе ткани B_ℓ^*. С другой стороны, эта сердцевина определяет некоторую другую левую три-ткань Бола, которая обозначена CB_ℓ^*. Доказано, что ее парастроф (соответствующая средняя ткань Бола) является тканью гиперболического типа. Аналогично могут быть рассмотрены другие известные четырехмерные ткани Бола.

Список литературы

1. Акивис М.А., Шелехов А.М. Многомерные три-ткани и их приложения//монография/ Тверь: ТвГУ. 2010. 308 с.
2. Иванов А.Д. Об интерпретации четырехмерных тканей Боля в трехмерном проективном пространстве// Геометрия однородных пространств, М.: Моск. гос. пед. ин-т. 1973. С. 42–57.
3. Иванов А.Д. О четырехмерных тканях Боля параболического типа// Изв. Вузов. Мат. 1976. №1. С. 42–47.
4. Толстихина Г.А. О сердцевине координатной квазигруппы некоторой шестимерной три-ткани Боля// Ткани и квазигруппы. Калинин: КГУ, 1990. С. 18–22.
5. Толстихина Г.А. Об условиях изотопии координатной квазигруппы и сердцевины левой ткани Бола// Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского/ Матем., №4 (26). 2011 С. 255–262.
6. Толстихина Г.А., Шелехов А.М. О три-тканях Бола с IC-свойством// Изв. Вузов. Мат. 2013. №5. С. 25–35.

Михеева А.А., Толстихина Г.А.
Кафедра функционального анализа и геометрии
Тверской госуниверситет, Тверь, Россия
E-mail: heathjensen@yandex.ru, tga_56@mail.ru

G. Tolstikhina, A. Mikheeva
Tver State University, Russia.

About core of some four-dimmentional Bol three-web

In this paper we have proved that the core of left four-dimmentional Bol three-web B^*_ℓ, which is linked by the transformation of parastrophy with the well-known four-dimmentional parabolic middle Bol three-web Π^*, is not isotopic to its coordinate quasigroup. We have also proved that left reverse quasigroup of the core determines the hyperbolic middle Bol three-web.

Bol three-web, core of Bol three-web, locally symmetric space, parabolic Bol three-web, hyperbolic Bol three-web.