Proc. Intern. Geom. Center 2013 **6**(1) 42–49 $d\omega$

Про нескінченно малі поворотно-тангенціальні деформації поверхонь сталої гауссової кривини

Юлія Степанівна Федченко

Анотація Для нескінченно малих поворотних деформацій знайдено нову форму основних рівнянь, яку представлено через компоненти вектора зміщення. Досліджено нескінченно малі поворотно-тангенціальні деформації поверхонь сталої гауссової кривини

Ключові слова нескінченно мала поворотна деформація, поверхня сталої гауссової кривини

УДК 514.76

Вступ У роботі [1] одеським геометром Лейко С.Г. введено новий тип нескінченно малих деформацій поверхонь в евклідовому просторі E_3, які названо поворотними. Для таких деформацій характерна наступна геометрична властивість: кожна геодезична крива переходить, в головному, в ізопериметричну екстремаль повороту. Для нескінченно малих поворотних деформацій поверхонь знайдено основні рівняння, детально вивчено конформний випадок [2]. Вказано зв'язок нескінченно малих поворотно-конформних деформацій з теорією тонкостінних пружних оболонок [3].

У даному дослідженні вивчаються нескінченно малі поворотно-тангенціальні деформації поверхонь. Для таких деформацій знайдено основні рівняння та показано, що поверхні сталої гауссової кривини допускають поворотно-тангенціальні деформації.

Розглянемо поверхню S класу C^3 в евклідовому просторі E_3 з векторно-параметричним рівнянням $\overline{r} = \overline{r}(x^1, x^2)$ та її деформацію S_ε:

$$\overline{r}_\varepsilon = \overline{r}(x^1, x^2) + \varepsilon \overline{U}(x^1, x^2), \tag{1}$$

де

$$\overline{U}(x^1, x^2) = u_i \overline{r}^i + \overset{0}{u}\, \overline{n} \tag{2}$$

- вектор зміщення, ε -нескінченно малий параметр, а u_i, $\overset{0}{u}$-відповідно тангенціальні та нормальна компоненти вектора зміщення. Всі індекси тут і надалі незалежно набувають значень $1, 2$.

Нехай γ – геодезична крива на S, $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$ – її образ при нескінченно малій деформації (1) на поверхні S_ε, $\widetilde{k}_\varepsilon$ - геодезична кривина кривої $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$, $\widetilde{K}_\varepsilon$ – гауссова кривина S_ε, $\widetilde{K}_\varepsilon \neq 0$. Наведемо основні означення та теореми з теорії нескінченно малих поворотних деформацій поверхонь [1].

Означення 1 *Крива на поверхні S називається ізопериметричною екстремаллю повороту, якщо вздовж неї геодезична кривина k і гауссова кривина K поверхні пропорційні: $k = cK$, c-const*

Означення 2 *Нескінченно малу деформацію (1) поверхні S ненульової гауссової кривини $K \neq 0$ будемо називати нескінченно малою поворотною деформацією, якщо для кожної геодезичної кривої виконується умова*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\widetilde{k}_\varepsilon}{\varepsilon \widetilde{K}_\varepsilon} = c,$$

де c - деяка стала, яка в загальному випадку залежить від γ.

Теорема 1 *Нехай $P^h_{ij} = \delta \Gamma^h ij$ – варіація символів Кристоффеля при нескінченно малій деформації (1). Для того, щоб вектор зміщення $\overline{U}$ визначав нескінченно малу поворотну деформацію поверхні S ненульової гауссової кривини $K \neq 0$ необхідно і досить, щоб на ній існував симетричний тензор a_{ij} разом з яким цей вектор задовольняє рівняння*

$$\nabla_{(k} P^h_{ij)} = a_{(ij} \delta^h_{k)} + \frac{1}{K} K_{(i} P^h_{jk)}. \tag{3}$$

Тут δ^h_k- символ Кронекера, $K_i = \partial_i K$, ∇_k - коваріантна похідна по x^k. Круглі дужки означають циклювання.

Відмітимо, що нескінченно малі геодезичні деформації [4], [5] є найпростішими з нескінченно малих поворотних деформацій. У цьому випадку будемо казати, що нескінченно мала поворотна деформація є тривіальною.

Теорема 2 *Якщо нескінченно мала деформація геодезична, то вона є поворотною і*

$$a_{ij} = \nabla_j \psi_i + \nabla_i \psi_j + \frac{1}{K}(K_i \psi_j + K_j \psi_i).$$

Лема 1 *Для будь-якої нескінченно малої деформації варіацію символів Кристоффеля можна подати через компоненти вектора зміщення $\overline{U}$ (2) у вигляді*

$$\delta\Gamma^h_{ij} \equiv P^h_{ij} = g^{\alpha h}(\nabla_{ij}u_\alpha + K(u_\alpha g_{ij} - u_i g_{j\alpha}) + \overset{0}{u}_\alpha\, b_{ij} - \overset{0}{u}_i\, b_{j\alpha} - \overset{0}{u}_j\, b_{i\alpha} - \overset{0}{u}\, \nabla_i b_{j\alpha}). \tag{4}$$

Доведення. При нескінченно малій деформації варіації першого фундаментального тензора та символів Кристоффеля мають наступний вигляд:

$$\delta g_{ij} \equiv 2\varepsilon_{ij} = \nabla_j u_i + \nabla_i u_j - 2\,\overset{0}{u}\, b_{ij}, \tag{5}$$

$$\delta\Gamma^h_{ij} = g^{\alpha h}(\nabla_j \varepsilon_{i\alpha} + \nabla_i \varepsilon_{j\alpha} - \nabla_\alpha \varepsilon_{ij}). \tag{6}$$

Продиференціюємо рівність (5) коваріантно по x^k. Матимемо

$$2\nabla_k \varepsilon_{ij} = \nabla_{jk} u_i + \nabla_{ik} u_j - 2\,\overset{0}{u}_k\, b_{ij} - 2\,\overset{0}{u}\, \nabla_k b_{ij}, \tag{7}$$

де $\nabla_{jk} = \nabla_k \nabla_j$.

Змінюючи індекси в (7), отримаємо набори $2\nabla_j\varepsilon_{i\alpha}$, $2\nabla_i\varepsilon_{j\alpha}$, $2\nabla_\alpha\varepsilon_{ij}$:

$$2\nabla_j \varepsilon_{i\alpha} = \nabla_{\alpha j} u_i + \nabla_{ij} u_\alpha - 2\,\overset{0}{u}_j\, b_{i\alpha} - 2\,\overset{0}{u}\, \nabla_j b_{i\alpha},$$

$$2\nabla_i \varepsilon_{j\alpha} = \nabla_{\alpha i} u_j + \nabla_{ji} u_\alpha - 2\,\overset{0}{u}_i\, b_{j\alpha} - 2\,\overset{0}{u}\, \nabla_i b_{j\alpha},$$

$$2\nabla_\alpha \varepsilon_{ij} = \nabla_{j\alpha} u_i + \nabla_{i\alpha} u_j - 2\,\overset{0}{u}_\alpha\, b_{ij} - 2\,\overset{0}{u}\, \nabla_\alpha b_{ij}.$$

Враховуючи рівняння Гаусса

$$b_{ik} b^l_j - b_{ij} b^l_k = R^l_{ijk},$$

тотожність Річчі

$$(\nabla_{kj} - \nabla_{jk}) u_i = K(u_k g_{ij} - u_j g_{ik}),$$

знаходимо, що

$$\nabla_j \varepsilon_{i\alpha} + \nabla_i \varepsilon_{j\alpha} - \nabla_\alpha \varepsilon_{ij} = \nabla_{ij} u_\alpha +$$

$$+ K(u_\alpha g_{ij} - u_i g_{j\alpha}) + \overset{0}{u}_\alpha\, b_{ij} - - \overset{0}{u}_i\, b_{j\alpha} - \overset{0}{u}_j\, b_{i\alpha} - \overset{0}{u}\, \nabla_i b_{j\alpha},$$

а варіація символів Кристоффеля, з огляду на (6), матиме вигляд (4).

Лема доведена.

1 Нова форма нескінченно малих поворотних деформацій поверхонь

У даному пункті подамо основні рівняння (3) безпосередньо через компоненти вектора зміщення (2).

Теорема 3 *Для того, щоб поверхня $S, K \neq 0$ допускала нескінченно малу поворотну деформацію необхідно і достатньо, щоб на ній існував симетричний тензор a_{ij}, який разом з компонентами вектора зміщення $\overline{U}$ (2) задовольняє систему рівнянь:*

$$
\begin{cases}
\nabla_i u_k = u_{ki}; \\
\nabla_l u_{ki} = v_{kil}; \\
3\nabla_i v_{hkj} = K_i(u_k g_{hj} - u_j g_{hk}) + K_j(u_k g_{hi} - u_i g_{hk}) + \\
+\frac{K_i}{K}(v_{hkj} - \nabla_k \overset{0}{u} b_{hj} - \nabla_j \overset{0}{u} b_{hk} + \nabla_h \overset{0}{u} b_{jk} - \overset{0}{u} \nabla_k b_{hj}) + \\
+\frac{K_j}{K}(v_{hik} - \nabla_i \overset{0}{u} b_{hk} - \nabla_k \overset{0}{u} b_{hi} + \nabla_h \overset{0}{u} b_{ki} - \overset{0}{u} \nabla_i b_{hk}) + \\
+\frac{K_k}{K}(v_{hji} - \nabla_j \overset{0}{u} b_{hi} - \nabla_i \overset{0}{u} b_{hj} + \nabla_h \overset{0}{u} b_{ij} - \overset{0}{u} \nabla_j b_{hi}) + \\
+K(-3u_{hi}g_{kj} + 2u_{jk}g_{hi} + 2u_{ki}g_{hj} + 2u_{kj}g_{hi} - u_{ij}g_{hk} - u_{ji}g_{hk} - u_{ik}g_{hj}) + \\
+2\nabla_{jk} \overset{0}{u} b_{hi} + 2\nabla_{ik} \overset{0}{u} b_{hj} + 2\nabla_{ij} \overset{0}{u} b_{hk} - \\
-\nabla_{hk} \overset{0}{u} b_{ij} - \nabla_{hj} \overset{0}{u} b_{ki} - \nabla_{hi} \overset{0}{u} b_{jk} + \\
+3\nabla_j \overset{0}{u} \nabla_k b_{hi} + 3\nabla_i \overset{0}{u} \nabla_k b_{hj} + 3\nabla_k \overset{0}{u} \nabla_j b_{hi} - 3\nabla_h \overset{0}{u} \nabla_k b_{ij} + \\
+\overset{0}{u}(3\nabla_{ik} b_{hj} + K(-2b_{ij}g_{hk} + 2b_{hk}g_{ij} - b_{hj}g_{ik} + b_{ik}g_{hj} + b_{jk}g_{hi} - b_{hi}g_{jk})) + \\
+a_{ij}g_{hk} + a_{ki}g_{hj} + a_{jk}g_{hi}.
\end{cases}
\tag{8}
$$

Доведення. Необхідність. Нехай поверхня S допускає нескінченну малу поворотну деформацію. Тоді, за теоремою 1, симетричний тензор a_{ij} з вектором зміщення $\overline{U}$ задовольняють рівняння (3). За лемою 1 варіацію символів Кристоффеля можна подати лише через компоненти вектора зміщення $\overline{U}$:

$$\delta\Gamma_{ij}^h \equiv P_{ij}^h = g^{\alpha h}(\nabla_{ij}u_\alpha + K(u_\alpha g_{ij} - u_i g_{j\alpha}) + \overset{0}{u}_\alpha b_{ij} - \overset{0}{u}_i b_{j\alpha} - \overset{0}{u}_j b_{i\alpha} - \overset{0}{u} \nabla_i b_{j\alpha}).$$

За аналогією запишемо ще два набори для P_{ki}^h, P_{jk}^h:

$$P_{ki}^h = g^{\alpha h}(\nabla_{ki}u_\alpha + K(u_\alpha g_{ki} - u_k g_{i\alpha}) + \overset{0}{u}_\alpha b_{ki} - \overset{0}{u}_k b_{i\alpha} - \overset{0}{u}_i b_{k\alpha} - \overset{0}{u} \nabla_k b_{i\alpha}),$$

$$P_{jk}^h = g^{\alpha h}(\nabla_{jk}u_\alpha + K(u_\alpha g_{jk} - u_j g_{k\alpha}) + \overset{0}{u}_\alpha b_{jk} - \overset{0}{u}_j b_{k\alpha} - \overset{0}{u}_k b_{j\alpha} - \overset{0}{u} \nabla_j b_{k\alpha}).$$

Враховуючи останні рівності, знаходимо $\nabla_k P^h_{ij}$,$\nabla_j P^h_{ki}$, $\nabla_i P^h_{jk}$. Підставимо знайдені вирази в рівняння (3), скористаємося тотожностями Річчі, зробимо спрощення і отримаємо,що

$$\begin{cases} 3\nabla_{kji}u^h = K_i(u_k\delta^h_j - u_j\delta^h_k) + K_j(u_k\delta^h_i - u_i\delta^h_k) + \\ +\frac{K_i}{K}(\nabla_{kj}u^h - \nabla_k \overset{0}{u}\, b^h_j - \nabla_j \overset{0}{u}\, b^h_k + \nabla_\alpha \overset{0}{u}\, g^{\alpha h}b_{jk} - \overset{0}{u}\, \nabla_k b^h_j) + \\ +\frac{K_j}{K}(\nabla_{ik}u^h - \nabla_i \overset{0}{u}\, b^h_k - \nabla_k \overset{0}{u}\, b^h_i + \nabla_\alpha \overset{0}{u}\, g^{\alpha h}b_{ki} - \overset{0}{u}\, \nabla_i b^h_k) + \\ +\frac{K_k}{K}(\nabla_{ji}u^h - \nabla_j \overset{0}{u}\, b^h_i - \nabla_i \overset{0}{u}\, b^h_j + \nabla_\alpha \overset{0}{u}\, g^{\alpha h}b_{ij} - \overset{0}{u}\, \nabla_j b^h_i) + \\ +K(-3\nabla_i u^h g_{kj} + 2\nabla_k u_j\delta^h_i + 2\nabla_i u_k\delta^h_j + 2\nabla_j u_k\delta^h_i - \nabla_j u_i\delta^h_k - \\ -\nabla_i u_j\delta^h_k - \nabla_k u_i\delta^h_j) + \\ +2\nabla_{jk} \overset{0}{u}\, b^h_i + 2\nabla_{ik} \overset{0}{u}\, b^h_j + 2\nabla_{ij} \overset{0}{u}\, b^h_k - \\ -\nabla_{\alpha k} \overset{0}{u}\, b_{ij}g^{\alpha h} - \nabla_{\alpha j} \overset{0}{u}\, b_{ki}g^{\alpha h} - \nabla_{\alpha i} \overset{0}{u}\, b_{jk}g^{\alpha h} + \\ +3\nabla_j \overset{0}{u}\, \nabla_k b^h_i + 3\nabla_i \overset{0}{u}\, \nabla_k b^h_j + 3\nabla_k \overset{0}{u}\, \nabla_j b^h_i - 3\nabla_\alpha \overset{0}{u}\, \nabla_k b_{ij}g^{\alpha h} + \\ + \overset{0}{u}\, (3\nabla_{ik}b^h_j + K(-2b_{ij}\delta^h_k + 2b^h_k g_{ij} - b^h_j g_{ik} + b_{ik}\delta^h_j + \\ +b_{jk}\delta^h_i - b^h_i g_{jk})) + a_{ij}\delta^h_k + a_{ki}\delta^h_j + a_{jk}\delta^h_i. \end{cases} \tag{9}$$

Опустимо в (9) h та покладемо $\nabla_i u_k = u_{ki}$, $\nabla_l u_{ki} = v_{kil}$. Отримаємо систему (8).

Достатність. Нехай на поверхні існує деякий симетричний тензор a_{ij} та деякі функції u_i, $\overset{0}{u}$, що задовольняють систему рівнянь (8). Покажемо, що існує вектор зміщення поворотної деформації.

Будемо міркувати в зворотному напрямі. Спочатку в (8) піднімемо індекс h і переходимо від системи (8) до системи (9). Виділивши в (9) вирази для $\nabla_k P^h_{ij}$,$\nabla_j P^h_{ki}$, $\nabla_i P^h_{jk}$ та P^h_{ij},P^h_{ki}, P^h_{jk} отримаємо рівняння (3). Тоді за теоремою 1 існує вектор зміщення поворотної деформації. Теорема доведена.

2 Нескінченно малі поворотно-тангенціальні деформації поверхонь

У даному пункті досліджено нескінченно малі поворотні деформації поверхонь за наявністю додаткової умови $\overset{0}{u}= 0$. Такі нескінченно малі деформації будемо називати поворотно-тангенціальними. Знайдено основні рівняння таких деформацій. Вивчено випадок поворотно-тангенціальних деформацій поверхонь сталої гауссової кривини.

Теорема 4 *Для того, щоб деформація поверхні була поворотно-тангенціальною необхідно, щоб існував симетричний тензор a_{ij} який* *разом з компонентами вектора зміщення $\overline{U}$ (2) задовольняє систему рівнянь:*

$$\begin{cases} \overset{0}{u}= 0; \\ \nabla_i u_k = u_{ki}; \\ \nabla_l u_{ki} = v_{kil}; \\ 3\nabla_i v_{hkj} = K_i(u_k g_{hj} - u_j g_{hk}) + K_j(u_k g_{hi} - u_i g_{hk}) + \\ +\frac{K_i}{K} v_{hkj} + \frac{K_j}{K} v_{hik} + \frac{K_k}{K} v_{hji} + \\ +K(-3u_{hi} g_{kj} + 2u_{jk} g_{hi} + 2u_{ki} g_{hj} + 2u_{kj} g_{hi} - u_{ij} g_{hk} - \\ -u_{ji} g_{hk} - u_{ik} g_{hj}) + a_{ij} g_{hk} + a_{ki} g_{hj} + a_{jk} g_{hi}. \end{cases} \tag{10}$$

Доведення. Нехай деформація є поворотною. Тоді за теоремою 3 існує симетричний тензор a_{ij}, який з компонентами вектора змішення $\overline{U}$ задовольняє систему (8). За умови тангенціальності $\overset{0}{u}= 0$ система (8) і набуває вигляду (10). Теорема доведена.

Теорема 5 *Якщо на поверхні існує симетричний тензор a_{ij} та деякі функції u_i, що задовольняють систему рівнянь (10), тоді при нульовій функції $\overset{0}{u}= 0$ деформація поверхні з вектором зміщення $\overline{U}$ є поворотно-тангенціальною.*

Доведення. Нехай на поверхні існує симетричний тензор a_{ij} та деякі функції u_i, що задовольняють систему (10). Покажемо що деформація є поворотно-тангенціальною. Умова $\overset{0}{u}= 0$ забезпечує тангенціальність деформації. Рівняння системи $(10)_4$, враховуючи нульову компоненту вектора зміщення, можна записати у вигляді $(8)_3$, що, за теоремою 3, є умовою поворотної деформації. Теорема доведена.

Проведемо дослідження системи (10) для поверхонь сталої гауссової кривини ($K = const \neq 0$). Для таких поверхонь система основних рівнянь поворотно-тангенціальних деформацій набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} \overset{0}{u}= 0; \\ \nabla_i u_k = u_{ki}; \\ \nabla_l u_{ki} = v_{kil}; \\ 3\nabla_i v_{hkj} = K(-3u_{hi} g_{kj} + 2u_{jk} g_{hi} + 2u_{ki} g_{hj} + 2u_{kj} g_{hi} - u_{ij} g_{hk} - \\ -u_{ji} g_{hk} - u_{ik} g_{hj}) + a_{ij} g_{hk} + a_{ki} g_{hj} + a_{jk} g_{hi}. \end{cases} \tag{11}$$

Система виду (11) досліджена Лейком С.Г. у роботі [6]. З рівнянь системи, в ізотермічній системі координат, знаходимо умови на вибір тензора a_{ij}, які в розгорнутому вигляді мають вигляд

$$\begin{cases} \nabla_1 a_{11} = K(6v_{221} - 7v_{111}); \\ \nabla_2 a_{22} = K(6v_{112} - 7v_{222}); \\ \nabla_2 a_{11} = \frac{1}{2}K(3v_{222} - 9v_{121} - 5v_{112} - 9v_{211}); \\ \nabla_1 a_{22} = \frac{1}{2}K(3v_{111} - 9v_{212} - 5v_{221} - 9v_{122}); \\ \nabla_1 a_{12} = \frac{1}{4}K(9v_{222} - 17v_{121} - 9v_{112} - 17v_{211}); \\ \nabla_2 a_{12} = \frac{1}{4}K(9v_{111} - 17v_{212} - 9v_{221} - 17v_{122}). \end{cases} \tag{12}$$

Якщо знайти умови інтегровності системи (11)-(12) та продиференціювати їх, то матимемо співвідношення, які тотожно виконуються в силу самої системи. Отже, маємо цілком інтегровну систему Коші і справедлива наступна теорема.

Теорема 6 *Поверхні сталої гауссової кривини* ($K = const \neq 0$) *допускають нескінченно малі поворотні деформації, що є тангенціальними. В ізотермічній системі координат вектор зміщення знаходиться як розв'язок системи (11)-(12) при початкових даних* u_{0i},u_{0ij}, v_{0ijk}, a_{0ij}.

Література

1. С. Г. Лейко, *Инфинитезимальные поворотные преобразования и деформации поверхностей евклидова пространства,* // Доклады академии наук, 1995, том 344, № 2, С.162-164.
2. С. Г. Лейко, Ю. С. Федченко, *Вектори зміщень для поворотно-конформних деформацій поверхонь обертання,* //Вісник ОДУ, 2003, Т.8, вип. 2, фізико-матем. наук, С. 50–54
3. С. Г. Лейко, Ю. С. Федченко, *Інфінітезимальні поворотні деформації поверхонь та їх застосування в теорії пружних оболонок,* // УМЖ, 2003, Т.55, №12, С.1697–1703
4. Ю. С. Федченко, *Нескінченно малі геодезичні деформації поверхонь,*// Proceedings of the international geometry center, 2011, Т.4, №1, С.50–63
5. М. Л. Гаврильченко, В.А.Киосак, Й.Микеш, *Геодезические деформации гиперповерхностей римановых пространств,* //Известия высших учебных заведений, 2004, №11(510), С.23-29.
6. С. Г. Лейко, *Дифференциальная геометрия обобщенно-геодезических отображений многообразий и их касательных расслоений,* / //Дисс. на соискание уч.степени доктора ф.-м. наук , Казань: Казанский университет, 1997, С.326.

Юлія Степанівна Федченко
ОНАХТ, Одеса, Україна
E-mail: `Fedchenko_Julia@ukr.net`

Julia Fedchenko
Odessa National Academy of Food Technologies, Odessa, Ukraine.

On infinitely small rotating-tangential deformations of the surfaces of constant Gaussian curvature

The new form of the basic equations, which presents from the components of the vector displacement, for infinitely small rotating deformations is found. The infinitely small rotating-tangential deformations of the surfaces of constant Gaussian curvature are studied.