Метризовні функтори і K-ультраметрики

Л. Є. Базилевич М. М. Зарічний О. Г. Савченко

Анотація Поняття K-ультраметричного простору є проміжним між поняттям метричного простору і ультраметричного (неархімедового) простору. Ми описуємо загальну конструкцію K-ультраметризації для метризовних функторів у сенсі В.В. Федорчука.

Ключові слова Ультраметричний простір, метризовний функтор

1 Вступ

Поняття ультраметрики (неархімедової метрики) знаходить численні застосування не лише у різних розділах математики, а й далеко за її межами (у інформатиці, фізиці, біофізиці). Нагадаємо, що ультраметрикою називають метрику d, яка задовольняє сильну нерівність трикутника $d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}$. Нещодавно один з авторів цієї замітки розглянув одне узагальнення поняття ультраметрики, а саме, поняття K-ультраметрики (див. [9]). Одна з мотивацій запровадження поняття K-ультраметрики лежить у теорії так званих розмитих метричних просторів.

Для K-ультраметричних просторів у статті [9] доведено структурну теорему. Крім того, у цій же статті розглянуто різні функторіальні конструкції у категорії (рівномірних) K-ультраметричних просторів та так званих K-нерозтягуючих відображень.

У статті [10] завважено, що можна розглядати функтор ідемпотентних мір на категорії (рівномірних) K-ультраметричних просторів та K-нерозтягуючих відображень. Нагадаємо, що поняття ідемпотентної міри виникло в контексті так званої ідемпотентної математики (див. [1,6,7,3] та ін.)

Ідемпотентні міри є частковим прикладом так званих неадитивних мір (ємностей). Ємності на ультраметричних просторах вивчалися в [2]. Виникає природна задача поширення одержаних результатів на функтор ємностей на категорії K-ультраметричних просторів.

У цій замітці ми розглядаємо загальну ситуацію і пропонуємо конструкцію, яка може застосовуватися до кожного метризовного функтора в сенсі В.В. Федорчука.

2 Цілком метризовні функтори

Нехай F — майже нормальний у сенсі Є. Щепіна функтор у категорії **Comp** компактних гаусдорфових просторів (див., наприклад, [11]). Тут ми коротко нагадаємо, що умова нормальності означає неперервність, мономорфність, епіморфність, збереження ваги, перетинів, прообразів, точки і порожньої множини. Якщо опустити умову збереження ваги, то одержуємо означення майже нормального функтора.

Поняття метризовності функтора вперше означив В.В. Федорчук [12], узагальнюючи властивості конкретних функторів у категорії **Comp**. Кажемо, що функтор F метризовний, якщо кожній метриці d_X на просторі X відповідає метрика $d_F(X)$ на просторі $F(X)$, причому виконано умови:

1. зберігаються ізометричні вкладення;
2. природне вкладення $X \to F(X)$ є ізометричним вкладенням;
3. $\mathrm{diam}(X) = \mathrm{diam}(F(X))$.

Нехай (X, d) — ультраметричний простір. Для кожного $K > 0$ через $\sim_K$ позначаємо відношення еквівалентності на X, означене умовою: $x \sim_K y$ тоді і лише тоді, коли $d(x, y) \leq K$. Нехай через $q_K\colon X \to X/\sim_K$ позначено факторвідображення, а для кожних $K \geq L > 0$, через $q_{LK}\colon X/\sim_L \to X/\sim_K$ — природне відображення. Тоді, очевидно, $X = \varprojlim(X/\sim_K, q_{LK})$.

Означимо відображення $\tilde{d}\colon F(X) \times F(X) \to \mathbb{R}$ формулою

$$\tilde{d}(a, b) = \inf\{K > 0 \mid F(q_K)(a) = F(q_K)(b)\},\ a, b \in F(X).$$

Нескладно показати, що функція $\tilde{d}$ є ультраметрикою на множині $F(X)$. У доведенні ми використовуємо той факт, що $F(X) = \varprojlim(F(X/\sim_K), F(q_{LK}))$ — це випливає з властивості неперервності функтора F.

Завважимо, що топологія на $F(X)$, індукована ультраметрикою $\tilde{d}$, взагалі кажучи, відмінна від вихідної топології на $F(X)$.

Нехай X — множина і $K \in [0, \infty]$. Метрику d на множині X будемо називати *K-ультраметрикою*, якщо $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ для кожних $x, y, z \in X$ таких, що $\min\{d(x, z), d(z, y)\} \leq K$.

Зауважимо, що кожна 0-ультраметрика насправді є метрикою і кожна ∞-ультраметрика є ультраметрикою. Зауважимо також, що кожен K-ультраметричний простір є K'-ультраметричним простором, якщо $K' \leq K$.

Назвемо K-ультраметричний простір рівномірно K-ультраметричним, якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що виконано умову: якщо $x, y \in X$ і $d(x, y) < K + \varepsilon$, то $d(x, y) \leq K$.

Наша задача — побудувати K-ультраметрику на просторі $F(X)$ для кожного рівномірно K-ультраметричного простору X. Насамперед завважимо, що для такого простору X маємо: $X = \varprojlim(X/\sim_R, q_{RS}, (0, K))$. Якщо $\mu, \nu \in F(X)$ і $F(q_K)(\mu) = F(q_k)(\nu)$, то приймемо

$$\tilde{d}(\mu, \nu) = \inf\{S \in (K, 0) \mid F(q_S)(\mu) = F(q_S)(\nu)\}.$$

Приймемо:

$$d_K(\mu, \nu) = \begin{cases} \tilde{d}(\mu, \nu), & \text{якщо } F(q_K)(\mu) = F(q_k)(\nu), \\ \max\{d_{F(q_K(X))}(F(q_K)(\mu), F(q_K)(\nu)), K + \varepsilon\}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Як бачимо, означення функції d_K залежить від того, яку сталу ε вибираємо у означенні рівномірної K-ультраметрики. Це явно не відзначалося у попередніх статтях, що стосуються рівномірно K-ультраметричних просторів.

Теорема 1 *Функція $d_K \colon F(X) \times F(X) \to \mathbb{R}$ є рівномірною K-ультраметрикою на множині $F(X)$.*

Доведення Візьмемо $\varepsilon > 0$ з означення рівномірної ультраметрики. Покажемо спочатку, що $d_K(\mu, \nu) > 0$, якщо $\mu \neq \nu$. Якщо $F(q_K)(\mu) = F(q_K)(\nu)$, то $d_K(\mu, \nu) = \tilde{d}(\mu, \nu) > 0$. У протилежному випадку $d_K(\mu, \nu) > \varepsilon > 0$.

Очевидно, що функція d_K симетрична.

Доведемо для функції d_K нерівність трикутника. Нехай $\mu, \nu, \tau \in F(X)$ — попарно різні елементи простору $F(X)$. Якщо

$$F(q_K)(\mu) = F(q_k)(\nu) = F(q_K)(\tau),$$

то нерівність трикутника випливає з (сильної) нерівності трикутника для метрики $\tilde{d}$. Якщо $F(q_K)(\mu) = F(q_K)(\nu) \neq F(q_K)(\tau)$, то

$$d_K(\mu,\nu) \le K < K+\varepsilon \le \max\{d_K(\mu,\tau), d_K(\nu,\tau)\}.$$

Якщо $F(q_K)(\mu) \neq F(q_k)(\nu) = F(q_K)(\tau)$, то $\max\{d_K(\mu,\tau), d_K(\nu,\tau)\} = d_K(\mu,\tau)$. При цьому, якщо $d_K(\mu,\nu) = K+\varepsilon$, то нерівність доведено. Тому припускаємо, що $d_K(\mu,\nu) = d_{F(q_K(X))}(F(q_K)(\mu), F(q_K)(\nu))$. Але тоді також $d_K(\mu,\tau) = d_{F(q_K(X))}(F(q_K)(\mu), F(q_K)(\tau))$ і нерівність трикутника має місце.

Аналогічні міркування застосовуємо для випадку, коли $F(q_K)(\mu), F(q_k)(\nu), F(q_K)(\tau)$ — попарно різні елементи простору $F(X)$.

Тепер перевіримо умову з означення K-ультраметрики. Надалі нехай $\mu,\nu,\tau \in F(X)$ — попарно різні елементи простору $F(X)$.

Не зменшуючи загальності, припускаємо, що $d_{F(q_K(X))}(\mu,\nu) \le K$. Якщо також $d_{F(q_K(X))}(\nu,\tau) \le K$, то з сильної нерівності трикутника для метрики $\tilde{d}$ випливає, що

$$d_{F(q_K(X))}(\mu,\nu) \le \max\{d_{F(q_K(X))}(\mu,\tau), d_{F(q_K(X))}(\tau,\nu)\}.$$

Тепер якщо $d_{F(q_K(X))}(\mu,\nu) \le K$ і $d_{F(q_K(X))}(\nu,\tau) \ge K+\varepsilon$, то також і $d_{F(q_K(X))}(\mu,\tau) \ge K+\varepsilon$, а отже

$$\begin{aligned} d_{F(q_K(X))}(\mu,\tau) &= d_K(F(q_K)(\mu), F(q_K)(\tau)) = d_K(F(q_K)(\nu), F(q_K)(\tau)) = d(\nu,\tau) \\ &= \max\{d(\mu,\nu), d(\nu,\tau)\}. \end{aligned}$$

Перевіримо, що функція d_K є рівномірною K-ультраметрикою. Нехай $\mu,\nu \in F(X)$ і $d_K(\mu,\nu) < K+\varepsilon$. З означення функції d_K випливає, що тоді $F(q_K)(\mu) = F(q_k)(\nu)$, а тому $d_K(\mu,\nu) \le K$.

Зауважимо, що ця конструкція може бути здійснена також і у випадку некомпактних просторів. Справді, існує продовження за Чигогідзе [13] функтора F на категорію тихоновських просторів (ми зберігаємо для цього продовження ту ж саму літеру F). Маючи $a,b \in F(X)$, розглянемо звуження метрики на компактну множину $\mathrm{supp}(a) \cup \mathrm{supp}(b)$ і для цієї метрики означимо відстань між a і b як вище.

Означимо категорію $\mathbf{UUMET}_K$. Її об'єктами є K-ультраметричні простори, а морфізмами простору (X,d) у простір (Y,ϱ) — K-нерозтягуючі відображення, тобто неперервні відображення $f\colon X \to Y$ такі, що $\varrho(f(x),f(y)) \le d(x,y)$ для кожних $x,y \in X$ таких, що $d(x,y) \le K$.

Теорема 2 *Наведена вище конструкція визначає функтор на категорії рівномірних K-ультраметричних просторів та K-нерозтягуючих відображень.*

Доведення Якщо $\mu, \nu \in F(X)$ і $d_K(\mu,\nu) \le K$, то $d_K(\mu,\nu) = \tilde{d}(\mu,\nu)$. Позначимо через $q'_S\colon Y \to Y/\sim_S$ для $S \in (0,K]$. З умови K-нерозтягуваності випливає, що для кожного $S \in (0,K]$ існує відображення $f_S\colon X/\sim_S \to Y/\sim_S$ таке, що $q'_S f = f_S q_S$. Звідси $F(q'_S)F(f) = F(f_S)F(q_S)$, а тому

$$\varrho_K(F(f)(\mu), F(f)(\nu)) = \tilde{\varrho}(F(f)(\mu), F(f)(\nu)) \le \tilde{d}(\mu,\nu) = d_K(\mu,\nu).$$

3 Приклади

Тут ми подаємо деякі приклади метризовних функторів.

Почнемо з функтора напівнеперервних згори ємностей. Через $\exp X$ позначаємо множину всіх непорожніх компактних підмножин простору X, наділену метрикою Гаусдорфа. Ємністю на компакті X називають функцію $c\colon \exp X \cup \{\emptyset\} \to [0,1]$, що задовольняє умови:

1. $c(\emptyset) = 0,\ c(X) = 1$;
2. якщо $F \subset G$, то $c(F) \le c(G)$ (монотонність);
3. якщо $c(F) < a$, то існує окіл U множини F такий, що $c(G) < a$ для кожної замкненої множини $G \subset U$ (напівнеперервність згори).

Для кожної ємності μ і кожної неперервної функції φ задається інтеграл Шоке
$$\mu(\varphi) = \int_X \varphi d\mu = \int_0^\infty \mu(\varphi \ge t)dt - \int_{-\infty}^0 (1 - \mu(\varphi \ge t))dt.$$
Через $\mathrm{n-LIP} = \mathrm{n-LIP}(X,d)$ позначаємо множину всіх ліпшицевих функцій з ліпшицевою константою $\le n$ з множини $C(X)$.

Кожна метрика d на X тепер породжує метрику $\hat{d}$ на множині $M(X)$ всіх напівнеперервних згори ємностей на X:

$$\hat{d}(\mu,\nu) = \sup\{|\mu(\varphi) - \nu(\varphi)| \mid \varphi \in 1-\mathrm{LIP}\}$$

(див. [8]).

Для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ відображення $M(f)\colon M(X) \to M(Y)$ задаємо формулою: $M(f)(c)(F) = c(f^{-1}(F))$, для кожного $c \in M(X)$ і замкненої підмножини $F \subset Y$.

Відомо, що функтор напівнеперервних згори ємностей M майже нормальний.

Теорема 3 *Відображення носія* $\mathrm{supp} = \mathrm{supp}_X\colon M(X) \to \exp X$ *є* K-*нерозтягуючим.*

Доведення цього факту повторює відповідне доведення для функтора ймовірнісних мір, запропоноване в [9]. Нескладно перевірити, що клас відображень supp_X складає природне перетворення функтора M в функтор exp.

Застосовуючи конструкцію попереднього параграфа, одержуємо K-ультраметризацію простору напівнеперервних згори ємностей на K-ультраметричному просторі.

Функтор ідемпотентних мір розглянуто у статті [10]. Нехай c_X означає функцію на топологічному просторі X, тотожньо рівну c. За традиціями ідемпотентної математики через $c \odot \varphi$ позначаємо функцію $c_X + \varphi$. Через $\varphi \oplus \psi$ позначаємо максимум функцій φ і ψ.

Означення 1 *Нехай* X *— компактний гаусдорфовий простір. Функціонал* $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ *називається* ідемпотентною мірою *(мірою* Маслова*), якщо*

1. $\mu(c_X) = c$;
2. $\mu(c \odot \varphi) = c \odot \mu(\varphi)$;
3. $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$.

Відомо, що довільна ідемпотентна міра є неперервним функціоналом на нормованому просторі $C(X)$.

Застосовуючи перетворення $t \mapsto e^t$, одержуємо альтернативний опис ідемпотентних мір. Через $C_+(X)$ позначаємо множину всіх невід'ємних неперервних функцій на X. Вважаємо, що ідемпотентна міра на X — це функціонал $\mu\colon C_+(X) \to \mathbb{R}$, що задовольняє умови:

1. $\mu(c_X) = c$;
2. $\mu(c\varphi) = c\mu(\varphi)$ для кожного $c > 0$;
3. $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$.

Нехай $I(X)$ множина всіх ідемпотентних мір на X. Наділимо $I(X)$ слабкою* топологією. Базу цієї топології складають множини

$$O(\mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon) = \{\nu \in I(X) \mid |\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, n\}.$$

В [6] доведено, що $I(X)$ є компактним гаусдорфовим простором.

Розглянемо приклад ідемпотентної міри на просторі X. Нехай $x_1, \dots, x_n \in X$ і $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ — набір чисел таких, що $\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = 1$. Означимо $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ наступним чином:

$$\mu(\varphi) = \max\{\lambda_i \odot \varphi(x_i) \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Для довільного $x \in X$ через δ_x означимо функціонал на $C(X)$ наступним чином: $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(X)$. Тоді можна записати, що $\mu = \oplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i}$.

Для заданого неперервного відображення $f\colon X \to Y$, задамо відображення $I(f)\colon I(X) \to I(Y)$ наступним чином. Нехай $\varphi \in C(Y)$, тоді, для даної $\mu \in O(X)$, задамо $I(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f)$.

Ми отримали коваріантний функтор I на категорії **Comp**.

З [6] відомо, що I зберігає клас вкладень. Як наслідок, для кожної замкненої підмножини A компактного гаусдорфового простору X, множині $I(A)$ можемо поставити у відповідність підмножину $I(\iota)(A)$ множини $I(X)$, де $\iota\colon A \to X$ позначає вкладення. Це дає змогу означити носії ідемпотентних мір, аналогічно до ймовірнісних мір. Носій ідемпотентної міри μ позначаємо через $\mathrm{supp}(\mu)$.

Нагадаємо, що якщо d — деяка метрика на просторі X, то на множині $I(X)$ ідемпотентних мір на X з компактними носіями метрику можна означити такою конструкцією (див. [1]).

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Для кожних $\mu, \nu \in I(X)$ нехай

$$\tilde{d}_n(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(\varphi) - \nu(\varphi)| \mid \varphi \in \mathrm{n-LIP}\}.$$

У статті [1] показано, що функція $\tilde{d}_n$ є псевдометрикою на множині $I(X)$.

Тоді функція $\tilde{d}\colon I(X) \times I(X) \to \mathbb{R}$, означена формулою

$$\tilde{d}(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{d}_n(\mu, \nu)}{2^i},$$

є метрикою на множині $I(X)$.

Через d_{HZ} позначаємо метрику на множині ідемпотентних мір з компактними носіями на ультраметричних просторах, означену у статті [3]. Вона рівна метриці, означеній загальною конструкцією у попередньому параграфі. Таким чином, одержуємо конструкцію K-ультраметризації простору ідемпотентних мір з компактними носіями (див. [10]).

Важливими прикладами рівномірно K-ультраметричних просторів є $(K+\varepsilon)$-дискретні простори, тобто метричні простори, що задовольняють умову: $d(x, y) \geq K + \varepsilon$ для кожних $x, y \in X$, $x \neq y$. Метрика на $I(X)$ для $(K+\varepsilon)$-дискретного простору (X, d) задається формулою: $d_K(\mu, \nu) = \max\{d_{HZ}(\mu, \nu), K + \varepsilon\}$, якщо $\mu \neq \nu$. Отриманий метричний простір знову є $(K+\varepsilon)$-дискретним.

Нагадаємо, що через P позначається функтор ймовірнісних мір на категорії $\mathbf{UUMET}_K$ (див. [9]).

Теорема 4 *Функтори I та P на категорії* $\mathbf{UUMET}_K$ *не ізоморфні.*

Доведення Ми модифікуємо приклад з статті [6]. Нехай

$$X = \{a, b\},\ Y = \{c, d\},\ Z = \{(a, c), (a, d), (b, d)\} \subset X \times Y.$$

Вважаємо, що відстані між попарно різними точками у просторах X, Y, Z рівні 1. Нехай $p_1\colon Z \to X$ та $p_2\colon Z \to Y$ — обмеження проектування на перший і другий співмножник відповідно. Тоді пара відображень $P(p_1), P(p_2)$ розділяє точки у множині $P(Z)$. Водночас, це не так для пари $I(p_1), I(p_2)$. Справді, нехай

$$\mu = 0 \odot \delta_{(a,c)} \oplus (-1) \odot \delta_{(a,d)} \oplus 0 \odot \delta_{(b,d)},\ \mu = 0 \odot \delta_{(a,c)} \oplus (-2) \odot \delta_{(a,d)} \oplus 0 \odot \delta_{(b,d)}.$$

Тоді

$$I(p_1)(\mu) = I(p_1)(\nu) = 0 \odot \delta_a \oplus 0 \odot \delta_b,\ I(p_2)(\mu) = I(p_2)(\nu) = 0 \odot \delta_c \oplus 0 \odot \delta_d.$$

4 Зауваження

У асимптотичній топології відомі твердження про те, що кожен метричний простір еквівалентний, як у сенсі категорії $\mathcal{A}$ (асимптотичної категорії Дранішникова), так і в сенсі так званої грубої категорії Роу [4] дискретному метричному просторові. Це дасть змогу застосувати результати попереднього параграфа до вивчення функторіальних конструкцій у асимптотичній топології.

Існує метризація Прохорова функтора ймовірнісних мір, а також аналогічна до неї метризація функтора напівнеперервних згори ємностей [8]. Ці метризації породжують K-ультраметризації функторів ймовірнісних мір та напівнеперервних згори ємностей відповідно.

Література

1. L. Bazylevych, D. Repovš, M. Zarichnyi, *Spaces of idempotent measures of compact metric spaces.* - Topol. Appl., 157 (2010), P. 136–144.
2. O. Hubal', *Capacity functor on the category of ultrametric spaces.* - Mat. Stud. 32 (2009), P. 132–139.
3. O. Hubal, M. Zarichnyi, *Idempotent probability measures on ultrametric spaces.* - J. Math. Anal. Appl. 343 (2008), no. 2, P. 1052–1060.
4. А. Н. Дранишников, *Асимптотическая топология.* - УМН, 55:6(336) (2000), С.71–116.
5. Г. Л. Литвинов, *Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение.* - Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. XIII, Зап. научн. сем. ПОМИ, 326, ПОМИ, СПб., 2005, 145–182
6. М. М. Заричный, *Пространства и отображения идемпотентных мер.* - Изв. РАН. Сер. матем., 74:3 (2010), С. 45–64.

7. M. Zarichnyi, *Spaces of measures related to dequantization.* - J. Phys. Stud. 11(1) (2007), P. 34—40.
8. М. М. Заричный, О. Р. Никифорчин, *Функтор емкостей в категории компактов.* - Матем. сб., 199:2 (2008), С. 3—26.
9. О. Савченко, *Функтори на категорії -ультраметричних просторів .* - Математичний вісник НТШ., 8 (2011), С. 100–110.
10. О. Г. Савченко, *Ідемпотентні міри і -ультраметричні простори.* - Праці міжнародного геометричного центру, 4:1 (2011), С. 42–49.
11. В. В. Федорчук, *Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q-многообразия.* - УМН, 36:3(219) (1981), С. 177-–195.
12. В. В. Федорчук, *Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов.* - Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:2 (1990), С. 396—417.
13. А. Чигогидзе, *О продолжении нормальных функторов.* - Вестник Московского Университета. Серия мат.-мех. – 6 (1984), С. 23-—26.

Л. Є. Базилевич

Національний університет “Львівська політехніка”,

Львів, вул. Степана Бандери, 12; E-mail: izar@litech.lviv.ua

М. М. Зарічний

Львівський національний університет імені Івана Франка,

Львів, вул. Університетська, 1; E-mail: mzar@litech.lviv.ua

О. Г. Савченко

Львівський національний університет імені Івана Франка,

Львів, вул. Університетська, 1; E-mail: mzar@litech.lviv.ua

L.E. Bazylevych

National University “Lviv Polytechnica”, Lviv, Stepana Bandert Str 12

M.M. Zarichnyi

Lviv Ivan Franko National University, Lviv, Universytetska Str 1

A.G. Savchenko

Kherson State Agrarian University, Kherson, Rozy Lyuksemburg Str 23

Metrizable functors and K-ultrametrics

The notion of K-ultrametric space is intermediate between that of metric space and of ultrametric (non-Archimedean) space. We describe a general construction of K-ultrametrization for metrizable functors in the sense of V.V. Fedorchuk.