Proc. Intern. Geom. Center 2013 **6**(2) 35–51

Жесткость замкнутых выпуклых полиэдров

Анатолий Дмитриевич Милка

Аннотация Рассматривается Теорема Лежандра и Коши о жесткости замкнутых выпуклых полиэдров, определившая современное научное направление "Геометрия в целом". Опровергается популярная в прошлом столетии версия Штейница об ошибке, допущенной авторами в ее доказательстве. Список евклидовских "Начал" , в аксиоматических Определениях которых Лежандр увидел эту Теорему, отличается от восстановленного Гейбергом Оригинала "Начал". Список включает неполный и исправленный Вариант содержащейся в Оригинале предельно общей Теоремы о жесткости полиэдров, открытой профессиональными математиками задолго до времени Александрии и Афин. В статье доказывается эта Общая Теорема, названная Теоремой Евклида, и находятся ее естественные аналоги в сферическом, гиперболическом и де Ситтера пространствах. Статья продолжает работы автора: *Что такое геометрия "в целом"?* – Москва: Знание, 12, 1986, 32 с.; *Неопознанная египетская геометрия* // Proc. Int. Geom. Center, 2008, т.1, в.1-2, с.97-115; *Истоки и содержание аксиоматики "Начал"* // Proc. Int. Geom. Center, 2009, т.2, в.3, с.41-54; *Unidentified Egyptian Geometry* // Europ. J. of Combin., 2010, v.31, p.1065-1071.

Ключевые слова Изгибания, жесткость полиэдров, теорема Лежандра и Коши, теорема Евклида, теоремы Александрова и Минковского.

УДК 514

Вдохновение
Нужно в поэзии
Как и в геометрии
А.С. Пушкин

Памяти Вениамина Федоровича КАГАНА

1. Код Лежандра и Коши

В теории Лежандра и Коши о жесткости замкнутых выпуклых полиэдров есть два ключевых Предложения об изгибаниях плоских и сферических полигонов [1, 1794; 2, 1812]. Почти столетие геометры уделяли этим Предложениям особое внимание. Изложим первое Предложение вместе с доказательством, которыми открывается знаменитый мемуар Коши:

"**Лемма 1.1.** *Если в треугольнике ABC, плоском или сферическом, сохраняя длины сторон AB и BC, увеличить угол B, заключенный между этими сторонами, то противоположная сторона треугольника AC увеличится.*

Теорема 1.1. *Если в выпуклом полигоне $ABCDEFG$, плоском или сферическом, сохраняя длины сторон AB, BC, ... FG, увеличить одновременно углы B, C,... F, заключенные между этими сторонами, то замыкающая хорда полигона AG увеличится.*

Доказательство. Пусть увеличится один угол B; тогда увеличится угол ABG; значит, увеличится хорда AG. Аналогично можно увидеть, что при последовательном увеличении углов C, D, ... F хорда AG всегда увеличивается. Одновременное увеличение всех углов дает тот же эффект, что и их последовательное увеличение, рассматриваемая хорда AG только возрастает".

Доказательство не сопровождается надлежащим рисунком, и в сороковые годы немецкий математик Штейниц нашел у Лежандра и Коши ошибку [3, 1934]. Изогнутый полигон может оказаться невыпуклым, монотонное возрастание замыкающих хорд изогнутых полигонов будет нарушено, доказательство потеряет силу. Эта версия, начиная с Адамара, до последнего времени поддерживалась ведущими геометрами [4, 2004]. Интуитивно полагалось, что авторы непосредственно применяют цитированную Лемму. Но второе и третье предложения доказательства Теоремы, да и ее формулировка, ставшие для Штейница закрытым Кодом, свидетельствуют об обратном. Лежандр и Коши, глубже вникая в проблему, применяют Лемму опосредствованно, удобно представляя лишь первый шаг доказательства. Они прямо сравнивают замыкающую хорду каждого изогнутого полигона с хордой AG, характер возрастания хорд и выпуклость изогнутых полигонов их не интересуют. Из первого предложения только следует, что изгибание полигона осуществляется в плоскости и при сохранении локальной выпуклости; полигон называется локально выпуклым, если все его углы обращены относительно полигона в одну и ту же сторону.

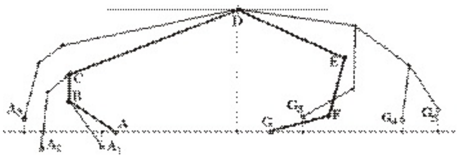


Рис. 1a

На Рис. 1a показаны исходный выпуклый и изогнутые локально выпуклые полигоны с общей фиксированной вершиной D, наивысшей из вершин полигонов над прямой AG. Очевидно, проекция на прямую AG замыкающей хорды каждого изогнутого полигона с избытком покрывает хорду AG. Так что действительно "хорда AG только возрастает". Образно говоря, в рассматриваемой конфигурации концы изогнутых полигонов располагаются ближе к "бесконечности" у прямой AG, чем концы хорды AG. Этим простым эффектным приемом и доказывается Теорема.

Версия Штейница не верна, доказательство Лежандра и Коши безупречно. Иллюстративный Рис. 1a точно соответствует авторскому тексту. Авторскому тексту соответствует и приведенное ниже доказательство для сферических полигонов; напомним, что именно вариант сферы требуется в решении проблемы о жесткости полиэдров, которая интересовала Лежандра и Коши.

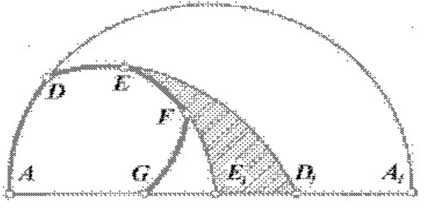


Рис. 1b

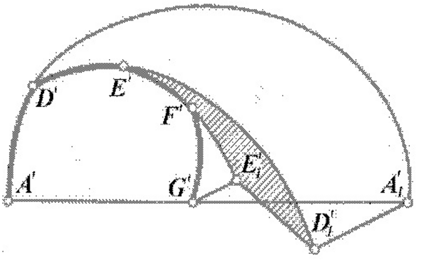


Рис. 1c

Доказательство Теоремы для изгибаний полигонов на сфере $ADEFG \to A'D'E'F'G'$, где Лемма применяется к внешним углам полигонов, изложено в брошюре автора [5, 1986]; его интерпретируют Рис. 1b и Рис. 1c.

Роль "бесконечности" у "прямых" линий на сфере AG и $A'G'$ для точек A и A' играют диаметральные к ним точки A_1 и A'_1; дуги $AA_1 = A'A'_1$, $DD_1 = D'D'_1$, $EE_1 = E'E'_1$. Замыкающие хорды исходного и изогнутого полигонов $AG < A'G'$, так как из неравенства треугольника и по Лемме

$$G'A'_1 \leq G'E'_1 + E'_1D'_1 + D'_1A'_1 < GE_1 + E_1D_1 + D_1A_1 = GA_1.$$

Теорема справедлива и для гиперболических полигонов, достаточно адекватно повторить доказательство, изложенное для плоскости. Аналог этой Теоремы для общих выпуклых кривых приводится в работе [6, 1970].

Замечание. Как показано в работах [4, 5], вопрос об изгибаниях полигонов с сохранением выпуклости представляет самостоятельный интерес.

Достоинством формулировки Теоремы Лежандра и Коши является ее чрезвычайная общность. Принадлежность плоскости или сфере изогнутых полигонов, их локальная выпуклость, увеличение всех углов полигонов суть только технические упрощения. Теорема справедлива и при изгибании полигона с потерей локальной выпуклости, даже если изогнутый полигон принимает пространственную форму. Это хорошо видно на сферических полигонах.

Теорема 1.2. *Если в выпуклом плоском, сферическом или гиперболическом полигоне $P \equiv A...D...G$, сохраняя длины сторон, изменить одновременно, не уменьшая, углы между сторонами, если при этом полигон потеряет локальную выпуклость либо локальная выпуклость сохранится, но хотя бы один из углов увеличится, то замыкающая хорда полигона AG увеличится.*

Доказательство. Рассмотрим изгибание полигона P в некоторый полигон P' с потерей локальной выпуклости в евклидовом и гиперболическом пространствах.

Допустим, что некоторые углы полигона P увеличились. Тогда выполним следующую Первую операцию. Изгибаем полигон P с сохранением локальной выпуклости, чтобы все углы полигона уравнялись с соответствующими углами полигона P'. При этом оставляем фиксированной специально выбранную вершину D (Рис. 1a).

Согласно условиям Теоремы, на полигоне P' есть некоторый участок из трех последовательных звеньев, не являющийся локально выпуклым полигоном. Пусть $R'S'T'K'$ и $RSTK$ – такой участок на P' и соответствующий ему участок на P. Тогда выполним следующую Вторую операцию в одном из вариантов: если $S' \neq D'$, то заменяем в полигонах P' и P участки $R'S'T'$ и RST новыми звеньями $R'T'$ и RT; если $T' \neq D'$, то заменяем в полигонах

P' и P участки $S'T'K'$ и STK новыми звеньями $S'K'$ и SK. В первом варианте угол при вершине T' полигона P' станет большим угла при вершине T полигона P, во втором варианте угол при вершине S' полигона P' станет большим угла при вершине S полигона P. Это увеличение углов поясняется равенством соответствующих углов исходных полигонов P' и P и применением в вершинах T' и T, S' и S неравенства треугольника для углов между звеньями.

Подвергая последовательно полигоны P и P' Первой и Второй операциям, приходим к конгруэнтным полигонам. На начальном этапе проекция замыкающей хорды изогнутого полигона P на исходную прямую AG стала большей хорды AG. В последующем эта проекция только увеличивалась. Вершины же A' и G' полигона P' оставались неподвижными. Эти положения и утверждают Теорему.

2. Деформации замкнутых полигонов

Второе ключевое, и ведущее, Предложение Лежандра и Коши (Теорема 2.1, евклидовы и сферические полигоны) относится к изгибаниям замкнутых полигонов. Оно устанавливается авторами на базе Теоремы 1.1; мы приводим иное, независимое и оптимальное доказательство. Рассматриваются евклидовы, сферические и гиперболические полигоны.

Лемма 2.1. *Если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$, сохраняя длины сторон AB, BC, CD и выпуклость, увеличить углы B и C, заключенные между этими сторонами, то сторона четырехугольника AD увеличится.*

Лемма доказывается элементарно, так же, как и Лемма 1.1.

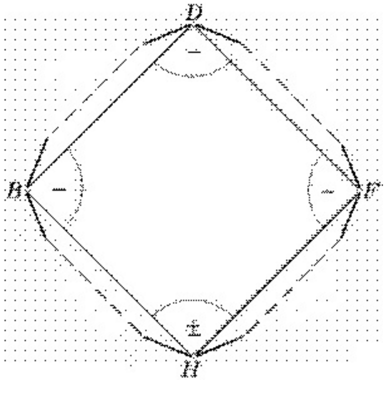


Рис. 2а

Теорема 2.1. *Пусть P и P' – неконгруэнтные замкнутые выпуклые полигоны с соответственно равными сторонами. Отметим углы полигонов знаками "+" или "− если конкретный угол одного полигона больше или* *меньше соответствующего угла другого полигона. Тогда при обходе каждого полигона будет не менее четырех перемен знаков.*

Доказательство. Число отмеченных вершин на каждом из полигонов – не меньше четырех. Если это число больше четырех, то на одном из полигонов, пусть на P, найдутся четыре отмеченные вершины, три из которых имеют знаки "$-$". Пусть такими вершинами будут B, D, F и H, как показано на Рис. 2a.

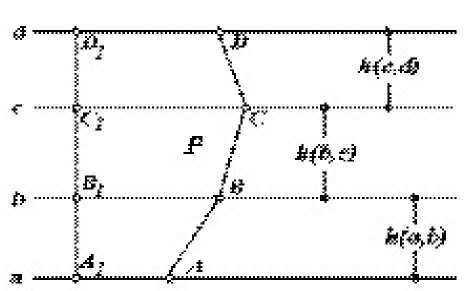
Будем непрерывно изгибать полигон P, изменяя углы в этих вершинах, уменьшая углы D, H. По Лемме 2.1 углы B, F четырехугольника $BDFH$ увеличиваются. Наступит момент, когда один из углов B, F, H полигона P станет равным соответствующему углу полигона P'. Число отмеченных вершин на полигонах уменьшится, число перемен знаков не увеличится, при этом еще останутся отмеченные вершины, так как угол D с изгибанием полигона P уменьшался.

Последовательно применяя к рассматриваемым полигонам описанную операцию, придем к полигонам P и P', имеющим точно по четыре отмеченные вершины. Снова учитывая Лемму 2.1, находим, что число перемен знаков равно четырем. Значит, на исходных полигонах было не меньше, чем по четыре перемены знака.

Приведенное доказательство Теоремы изложено в брошюре автора [5, 1986]; в дифференциальной геометрии этой Теореме соответствует известная Теорема о четырех вершинах овала [7, 1935].

Теорема 2.2. *Пусть P и P' – неконгруэнтные замкнутые выпуклые полигоны с соответственно равными углами, причем евклидовы полигоны ограничивают равные площади. Отметим стороны полигонов знаками "$+$" или "$-$ если конкретная сторона одного полигона больше или меньше соответствующей стороны другого полигона. Тогда при обходе каждого полигона будет не менее четырех перемен знаков.*

Эта Теорема двойственна Теореме 2.1 [5; 8, 1996]. В случае сферических полигонов она вытекает из Теоремы 2.1; стоит лишь перейти на сфере от рассматриваемых полигонов к полярным к ним полигонам. Для доказательства Теоремы в случае евклидовых и гиперболических полигонов нужны дополнительные сведения. Введем Определения. *Полосой* в гиперболической (евклидовой) плоскости называется область между расходящимися (параллельными) прямыми r и s, сторонами полосы; длина общего перпендикуляра $h(r, s)$ к сторонам полосы называется *шириной* полосы.



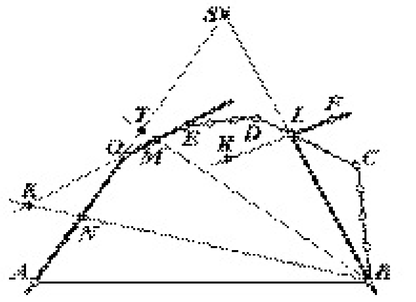


Рис. 2b Рис. 2c

Лемма 2.2. *Пусть $P = A...BC...D$ и $P' = A'...B'C'...D'$ – гиперболические или евклидовы неконгруэнтные выпуклые полигоны с равными соответствующими углами, вписанные в полосы H и H' под равными ненулевыми наклонами к сторонам полос a и a', d и d' в вершинах A и A', D и D' соответственно. Пусть звенья полигона P – не меньшие соответствующих им звеньев полигона P'. Тогда ширина $h(a,d)$ полосы H больше ширины $h(a',d')$ полосы H'.*

Доказательство. Для евклидовых полигонов Лемма очевидна. Ограничимся трехзвенными гиперболическими полигонами $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Пусть $A_1'D_1'$ – общий перпендикуляр к сторонам полосы H', где $A_!' \in a'$, $D_1' \in d'$. Пусть b', c' – прямые линии, проходящие через вершины B', C' полигона P' перпендикулярно прямой $A_1'D_1'$ в точках $B_1' \in A_1'D_1'$, $C_1' \in A_1'D_1'$. Линии b', c' делят полосу H' на три меньшие полосы.

На Рис. 2b показаны элементы полосы H, соответствующие элементам полосы H': A_1D_1 – общий перпендикуляр к сторонам a и d полосы; b и c – прямые линии, проходящие через вершины B и C под теми же углами к звеньям полигона P, под какими соответствующие линии b' и c' наклонены к звеньям полигона P'; B_1 и C_1 – точки пересечения линий b и c с перпендикуляром A_1D_1. Линии b и c делят полосу H на три меньшие полосы, соответствующие меньшим полосам в полосе H'; на Рис. 2b показаны общие перпендикуляры к сторонам меньших полос.

Очевидно,

$$A_1B_1 \geq h(a,b), \quad B_1C_1 \geq h(b,c), \quad C_1D_1 \geq h(c,d).$$

Из условий Леммы следует, что

$$h(a,b) \geq h(a',b'), \quad n(b,c) \geq h(b',c'), \quad h(c,d) \geq h(c',d'),$$

и хотя бы одно из этих неравенств строгое, поскольку полигоны P и P' – неконгруэнтные. Этими положениями и утверждается Лемма:

$$h(a,d) = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 > h(a',b') + h(b',c') + h(c',d').$$

Лемма 2.3. *Пусть $P = AB...CD...E$ и $P' = A'B'...C'D'...E'$ – гиперболические или евклидовы неконгруэнтные выпуклые полигоны с равными соответствующими углами, вписанные одинаковыми сторонами в углы AOE и $A'O'E'$ под равными ненулевыми наклонами к лучам OA и $O'A'$, OE и $O'E'$ в вершинах A и A', E и E' соответственно. Пусть звенья полигона P – не большие соответствующих им звеньев полигона P'. Тогда площадь $\sigma(W)$ области W, отсекаемой полигоном P от угла AOE, меньше площади $\sigma(W')$ области W', отсекаемой полигоном P' от угла $A'O'E'$.*

Доказательство. Триангулируем область W' хордами $B'O'$, ..., $C'O'$, $D'O'$ ... . Направим в область W из вершин B, ..., C, D ... лучи b, ..., c, d ... под теми же углами к звеньям полигона P, под какими соответствующие хорды наклонены к звеньям полигона P'. Причислим к набору лучей также лучи AO и EO. В условиях Леммы у конкретного звена XY лучи x, y пересекаются в некоторой точке Z, определяя над звеном XY треугольник XYZ. Площадь этого треугольника не превосходит площади соответствующего треугольника $X'Y'O'$ триангуляции W'. Введем полигон $\tilde{P}(B)$, составленный из полигона $P(B) = B...CD...E$ и лучей b, EO; введем полигон $\tilde{P}'(B')$,составленный из полигона $P'(B') = B'...C'D'...E'$ и лучей $B'O'$, $E'O'$.

Пусть полигоны P и P' обращены к вершинам углов O и O' выпуклыми сторонами. И пусть луч b пересекает сторону AO во внутренней точке N. Тогда луч b также пересекает в некоторой точке K луч EO вне стороны EO; докажем это Предложение; в евклидовом случае Предложение очевидно. Деформируем полигон $\tilde{P}'(B')$, сохраняя его углы и последовательно уравнивая (в условиях Леммы – не увеличивая) звенья полигона $P'(B')$ с соответствующими звеньями полинома $P(B)$. В процессе деформации факт пересечения лучей $B'O'$ и $E'O'$ сохраняется, по завершении деформации полигон $\tilde{P}'(B')$ станет конгруэнтным полигону $\tilde{P}(B)$. Значит лучи b и EO действительно пересекаются. Область W покрывается треугольником ABN и новой областью $W(B)$, отсекаемой полигоном $P(B)$ от угла BKE. Аналогичная ситуация с покрытием области W возникает в случаях, когда луч b проходит через вершину O или когда луч b проходит через внутреннюю точку M стороны EO и пересекает в некоторой точке T луч AO вне стороны AO.

Пусть полигоны P и P' обращены к вершинам углов O и O' вогнутыми сторонами (Рис. 2с). И пусть луч b пересекает сторону AO во внутренней точке N. Тогда луч b также пересекает в некоторой точке K луч EO вне стороны EO; докажем это Предложение; в евклидовом случае Предложение очевидно. Положим, что лучи b и EO не пересекаются. Деформируем выпуклый полигон $\tilde{P}(B)$, сохраняя его углы и последовательно уравнивая (в условиях Леммы – не уменьшая) звенья полигона $P(B)$ с соответствующими звеньями полинома $P'(B')$. В процессе деформации факт непересечения лучей b и EO сохраняется, по завершении деформации полигон $\tilde{P}(B)$ станет конгруэнтным полигону $\tilde{P}'(B')$. Но лучи $B'O'$ и $E'O'$ пересекаются – противоречие; значит, лучи b и EO также пересекаются. Таким образом, если луч b пересекает в некоторой внутренней точке полигон AOE, то характер покрытия области W в принципе повторяет уже рассмотренные случаи покрытия, когда полигоны $P(B)$ и $P'(B')$ обращены к вершинам O и O' выпуклыми сторонами. Правда, здесь возникает еще особый вариант покрытия, когда луч b пересекает в некоторой точке L полигон $P(B)$.

Пусть L – внутренняя точка некоторой стороны CD, L' – точка стороны $C'D'$, делящая эту сторону в том же отношении, в каком точка L делит сторону CD. Добавим в области W' хорду $L'O'$. Направим в область W луч LR под теми же углами к звеньям стороны CD, под какими хорда $L'O'$ наклонена к звеньям стороны $C'D'$, и введем луч LF, противоположный лучу LR. Луч LR проходит вне угла BLC. Иначе устанавливается невозможное – что лучи $L'O'$ и $E'O'$ не пересекаются; подобный случай уже рассматривался. Пусть S – точка пересечения лучей b и AO вне стороны AO. Область W покрывается треугольником ABS и новой областью $W_1(B)$, отсекаемой полигоном $P_1(B) = B...CL$ от угла BLF. Треугольнику ABS отвечает треугольник $A'B'O'$, области $W_1(B)$ – область $W_1'(B')$, отсекаемая от угла $B'O'L'$ полигоном $P_1'(B') = B'...C'L'$. Подобно определяется и случай покрытия, когда луч b проходит через вершину E.

По изложенным схемам осуществляется покрытие области W либо полной системой треугольников вида XYZ, построенных на сторонах XY полигона P, либо неполной системой таких треугольников. В случае полной системы треугольников площадь покрытия области W не превосходит площади $\sigma(W')$; эта площадь покрытия меньше площади $\sigma(W')$, так как полигоны P и P' неконгруэнтные. Неполная система треугольников покрытия может возникнуть лишь в случае, когда полигоны P и P' обращены к вершинам углов O и O' вогнутыми сторонами. Площадь такого покрытия не превосходит площади части области W', эта площадь покрытия также меньше площади $\sigma(W')$. Лемма доказана.

Доказательство Теоремы 2.2.

В условиях Теоремы при обходах полигонов P и P' обязательно будут перемены знаков. Это есть следствие Леммы 2.3. Остается показать, что при обходах полигонов P и P' не может быть двух перемен знаков.

Пусть полигоны P и P' разделяются вершинами A, C и A', C' на полигоны $P(B) = A...B...C$, $P(D) = A...D...C$ и $P'(B') = A'...B'...C'$, $P'(D') = A'...D'...C'$ со знаками у сторон "$+$" , "$-$" и "$-$" , "$+$" соответственно. Проведем к полигонам P и P' через вершины A, C и A', C' опорные прямые линии a, c и a', c' под соответственно равными наклонами к сторонам этих полигонов. В условиях Теоремы опорные линии можно подобрать в двух следующих вариантах. Первый вариант: линии a, c и a', c' суть расходящиеся прямые линии для гиперболических и параллельные прямые линии для евклидовых полигонов P и P'. Второй вариант: линии a, c и a', c' пересекаются в некоторых точках O и O', причем полигоны P и P' обращены к точкам O и O' выпуклыми сторонами.

Первый вариант. Сравнивая полигоны $P(B)$ и $P'(B')$, по Лемме 2.2 находим, что ширины соответствующих полос связаны неравенством $h(a,c) > h(a',c')$. Сравнивая полигоны $P(D)$ и $P'(D')$, по Лемме 2.2 находим, что $h(a,c) < h(a',c')$. Противоречие.

Второй вариант. Обозначим Σ площади полигонов P и P', а σ, σ' и $\sigma+\Sigma$, $\sigma'+\Sigma$ – соответственно площади, отсекаемые полигонами $P(B)$, $P'(B')$ и $P(D)$, $P'(D')$ от углов ABC, $A'B'C'$. По Лемме 2.3 находим, что $\sigma > \sigma'$ и $\sigma + \Sigma < \sigma' + \Sigma$. Противоречие.

Полученные противоречия утверждают Теорему – при обходах полигонов P и P' будет не менее четырех перемен знаков.

3. Жесткость выпуклых полиэдров

Рассмотрим трехмерное псевдоевклидово пространство E_1^3 с метрической формой $z^2 = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$. Сферы единичного и мнимоединичного радиусов в этом пространстве представляют собой плоскость де Ситтера и гиперболическую плоскость. Полный, не имеющий границы, полиэдральный конус в E_1^3 называется *полиэдральным углом*. Строго выпуклые полиэдральные углы с общей вершиной в начале координат – пространственно-подобный угол P и времени-подобный угол Q называются полярными углами, если каждое ребро одного угла внешне ортогонально некоторой грани другого угла и каждой грани одного угла внешне ортогонально некоторое ребро другого угла. Полигон $\bar{Q}$, пересечение угла Q с гиперболической сферой, называется полигоном, полярным к углу P. Пусть α – произвольная грань угла P, A – вершина полигона $\bar{Q}$, определяемая ребром угла Q, ортогональным к грани α. Очевидно, внешний угол полигона $\bar{Q}$ в вершине A равен плоскому углу грани α. Пусть a – произвольное ребро угла P, $\bar{a}$ – сторона полигона $\bar{Q}$, определяемая гранью угла Q, ортогональной ребру a. Очевидно, сторона $\bar{a}$ равна внешнему двугранному углу полиэдра P при ребре a. Отсюда, в частности, следует, что кривизна угла P – отрицательная – сумма плоских углов пространственно-подобного строго выпуклого полиэдрального угла превосходит 2π, для проверки надо лишь перейти к полярному полигону $\bar{Q}$; весьма полезная геометрическая интерпретация этого факта.

Лемма 3. *Пусть P и P' – неконгруэнтные пространственно-подобные строго выпуклые полиэдральные углы с соответственно равными плоскими углами. Отметим внешние двугранные углы полигонов знаками "+" или "−" , если конкретный двугранный угол одного полиэдрального угла больше или меньше соответствующего двугранного угла другого полиэдрального угла. Тогда при обходе вокруг вершины каждого полиэдрального угла будет не меньше четырех перемен знаков.*

Лемма вытекает из Теоремы 2.2; надо лишь перейти к полярным полигонам $\bar{Q}$ и $\bar{Q}'$, соответствующим полиэдральным углам P и P'.

Теорема 3. *Одинаково составленные замкнутые строго выпуклые полиэдры в евклидовом пространстве, у которых соответствующие плоские углы равны, а соответствующие грани имеют равные площади, полиэдры в сферическом и гиперболическом пространствах, у которых соответствующие плоские углы равны, и пространственно-подобные полиэдры в пространстве де Ситтера, у которых соответствующие плоские углы равны, конгруентны.*

Рассмотрим четырехмерное псевдоевклидово пространство E_1^4 с метрической формой $z^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2$. Сферы единичного и мнимоединичного радиусов в этом пространстве представляют собой пространство де Ситтера и гиперболическое пространство. Строго выпуклые полиэдральные углы с общей вершиной в начале координат – пространственно-подобный угол P и времени-подобный угол Q – называются *полярными* углами, если каждое ребро одного угла внешне ортогонально некоторой грани другого угла и каждой грани одного угла внешне ортогонально некоторое ребро другого угла. Строго выпуклые полиэдры $\bar{P}$ и $\bar{Q}$, пересечения углов P и Q со сферой де Ситтера и гиперболической сферой, называются пространственноподобным и времени-подобным полярными полиэдрами; гранями этих полиэдров соответственно являются стандартные сферические и гиперболические полигоны. Каждым вершине, ребру, грани одного из полиэдров $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ соответствуют полярные грань, ребро, вершина другого полиэдра; каждое ребро одного из полиэдров $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ равно внешнему двугранному углу при полярном ребре другого полиэдра.

Доказательство Теоремы 3 проводится известными методами Коши-Лежандра [1, 2] и Александрова [9, 1950]. Сначала, по Лежандру и Коши, устанавливается равенство соответствующих двугранных углов рассматриваемых полиэдров; при этом применяется комбинаторика Коши, основанная на Теореме Эйлера. Затем, по Александрову, с помощью Теоремы 2.2 устанавливается равенство соответствующих ребер многогранников; применяется метод, двойственный методу Коши-Лежандра. Этим и доказывается Теорема 3. Очевидно, нет необходимости приводить подробное ее доказательство.

Александров качественно упростил доказательство Коши-Лежандра, применяя вместо комбинаторики Коши и Теоремы Эйлера Теорему Жордана для сферы; ведь Теорема Эйлера тоже основывается на Теореме Жордана. Добавим, что для случаев сферического, гиперболического и де Ситтера пространств второй этап доказательства Теоремы может быть сокращен. С этой целью, наряду с рассматриваемыми полиэдрами вводятся полярные к ним полиэдры, которые оказываются тоже с равными соответствующими плоскими углами. На первом этапе устанавливается равенство соответствующих двугранных углов как у исходных, так и у полярных полиэдров. На втором этапе, по изложенному ранее геометрическому признаку полярных ребер, из равенства соответствующих двугранных углов полиэдров извлекается необходимое равенство их соответствующих ребер – Теорема о конгруентности полиэдров доказана.

Евклидов вариант Теоремы 3 содержится в Определении 10 книги XI "Начал" издания Гейберга [10, 1948-1950]; издание основано на сравнительном анализе различных списков "Начал" и признано историками как ближайшее к Оригиналу. Это вариант представляет предельно общий результат о жесткости замкнутых выпуклых полиэлров, открытый профессиональными математиками задолго до времени Александрии и Афин [11, 2008]. Определение 9 есть вспомагательное Предложение к Определению 10.

Определение 9. *Подобными телесными фигурами будут заключенные между равными по количеству подобными плоскостями.*

Определение 10. *Равные же и подобные телесные фигуры будут заключенные между равными по количеству и по величине подобными плоскостями.*

Здесь "телесные фигуры" и "плоскости" – полиэдры и полигоны, грани полиэдров; "телесные фигуры, заключенные между равными по количеству подобными плоскостями" – одинаково составленные (комбинаторно эквивалентные) полиэдры с равными соответствующими плоскими углами; "равные телесные фигуры" и "равные по величине плоскости" – полиэдры с равными по длине соответствующими ребрами и соответствующие полигоны с равными площадями.

В "Началах" рассматриваются без каких-либо определений только выпуклые полигоны и полиэдры. Если необходимые определения и были в Оригинале, то они устранены "исправлениями" переписчиков. Например, это подтверждается Предложением 21 из книги XI: *"Всякий телесный угол заключается между плоскими углами, меньшими [чем] четыре прямых <угла>"*; Предложение верно только для выпуклых "телесных углов".

Д.Д. Мордухай-Болтовской приводит следующий Комментарий 6 (Подобие тел) к книге XI "Начал" [10]: *"В Определении 9 выступает дисгармония с определением подобия плоских фигур в шестой книге "Начал" (Определение 1). Там подобные фигуры определяются как такие, которые имеют соответственно равные углы, и стороны, заключающие эти углы, пропорциональны."* По тексту "Начал" этот признак "подобие" относится лишь к "прямолинейным фигурам" – к полигонам. Такое определение подобия не применимо к "телесным фигурам и не только из-за дисгармонии с Определением 9. Требование Определения 1 "стороны пропорциональны" противоречит требованию Определения 10 "равные по величине плоскости" – оно перегружает Определение 10. Поэтому в Определениях 9 и 10 и для "плоскостей и для "телесных фигур" признак "подобны" означает "соответствующие плоские углы равны"; у "телесных фигур" двугранный угол характеризуется "плоским углом" – линейным углом в современной терминологии. В подтверждение этого вывода достаточно сравнить Определение 8 (Плоский угол) и Определение 6 (Наклон плоскости к плоскости) из книг I и XI "Начал"; углы фигур здесь определяются общей терминологией. По свидетельствам Аристотеля и Прокла, так квалифицировалось подобие фигур Пифагором – как равенство соответствующих плоских углов; это вполне гармонирует с наглядными, опытными представлениями.

В связи с изложенным, вспомогательное Определение 9 читается как Теорема: *Комбинаторно эквивалентные замкнутые выпуклые полиэдры, у граней которых соответствующие углы равны, имеют равные соответствующие двугранные углы.*

Определения 9 и 10 в "Началах" являются аксиомами, необходимыми для построения Теории объемов и относящимися к треугольным пирамидам и призмам. Следовательно, сами Определения в качестве Теорем для произвольных выпуклых полиэдров были известным много ранее разработки содержательного Учения о геометрии, какими являются "Начала" [12, 2010]. Отдавая должное высокому научному и аксиоматическому уровню этого Учения, а также непревзойденной Школе его Создателей, мы называем евклидов вариант Теоремы 3 (Определения 10) Теоремой Евклида [11, 12]. Учением называл "Начала" Д. Гильберт, их высоко ценил и К.Ф. Гаусс.

Теорема Евклида. *Замкнутые одинаково составленные выпуклые полиэдры конгруентны, если у них соответствующие плоские углы равны и площади соответствующих граней равны.*

В заключение напомним Теоремы о жесткости выпуклых полиэдров, заложившие основы важного направления современной Геометрии "в целом" – внутренней и внешней Геометрии общих выпуклых поверхностей.

Теорема 3.1. (Лежандр и Коши) *Замкнутые выпуклые полиэдры, одинаково составленные из конгруентных граней, конгруэнтны.*

Теорема следует из Теоремы - Определения 9. Как отмечает Коши, Лежандр увидел эту Теорему [также] в Определении 9 книги XI "Начал"; к сожалению, у Лежандра был список "Начал" , явно испорченный переписчиками. В подтверждение приводим оригинальные формулировки из [2]:

"*Следствие 1. Из предыдущей Теоремы следует, что выпуклые полиэдры, одинаково составленные из конгруэнтных граней, конгруэнтны. Это есть то, что составляет Теорему, заключающуюся в Определении 9 книги XI Евклида.*

Следствие 2. Из предыдущей Теоремы следует, что выпуклые полиэдры, одинаково составленные из подобных граней, подобны. Это есть то, что составляет Теорему, заключающуюся в Определении 10 цитированной книги."

Теорема 3.2. (Минковский) *Если у двух замкнутых выпуклых полиэдров грани соответственно параллельны и имеют равные площади, то полиэдры конгруэнтны и параллельно расположены.*

Теорема следует из Теоремы-Опеределения 10 [9]. Минковский получил эту теорему, рассматривая задачу о заполнении пространства равными и параллельно расположенными выпуклыми полиэдрами – параллелоэдрами. Задача возникла при исследовании проблем геометрической Теории чисел и Кристаллографии Федоровым.

Теорема 3.3. (Александров) *Если у двух замкнутых выпуклых полиэдров грани соответственно параллельны и если соответствующие грани не могут быть параллельным переносом помещены одна в другой, то полиэдры конгруэнтны и параллельно расположены.*

Теорема широко обобщает Теорему 3.2 [9].

4. Проблемы

Представляем актуальную проблематику, связанную с Теоремой.

Жесткость полиэдров при минимальных данных.

Проблема 1. *Доказать, что комбинаторно эквивалентные замкнутые выпуклые полиэдры в R^n конгруэнтны, если (a) площади сферических изображений их соответствующих вершин равны, (b) средние кривизны их соответствующих ребер всех размерностей равны, (c) площади их соответствующих гиперграней равны.*

Эта проблема формулировалась автором в the workshop "Rigidity and Flexibility Vienna, Austria, 2006 [13, Problem section].

Аналог проблемы Стокера (J.J. Stoker, 1968).

Проблема 2. *Доказать, что комбинаторно эквивалентные неевклидовы замкнутые выпуклые полиэдры конгруэнтны, если их соответствующие ребра или их соответствующие двугранные углы равны.*

В.А. Александровым доказано, что существуют сферические и гиперболические замкнутые невыпуклые полиэдры без самопересечений, допускающие нетривиальные непрерывные деформации с сохранением двугранных углов [14].

Аналог проблемы Брикара (R. Bricard, 1897).

Проблема 3. *Доказать, что существуют евклидовы, сферические, гиперболические, пространственно-подобные деситтеровы замкнутые невыпуклые полиэдры без самопересечений, которые допускают нетривиальные непрерывные деформации с сохранением углов граней и, в евклидовом случае, с сохранением площадей граней.*

Непрерывно изгибаемые по Коши замкнутые невыпуклые полиэдры-флексоры без самопересечений в R^3 открыты Р. Коннели [15]; инвариантность объемов полиэдров при изгибаниях доказана И.Х. Сабитовым. Решение этой проблемы важно для теории оболочек. Как подчеркивает И.И. Ворович в Послесловии к известной монографии А.В. Погорелова [16], необходимо исследовать устойчивость оболочек, "имеющих нулевую жесткость на изгиб и конечную жесткость на растяжение" , у которых "энергия, накопленная при растяжении, пропорциональна изменению площади". Такое исследование может расширить класс модельных флексоров, открытых автором [17].

Аналог проблемы Миндинга (E.F.A. Minding, 1836).

Проблема 4. *Доказать, что пространственно-подобные деситтеровы замкнутые выпуклые изометричные поверхности конгруэнтны.*

Эта проблема в евклидовом и сферическом пространствах решена А.В. Погореловым [18], а в гиперболическом - А.Д. Милкой [19].

Список литературы

1. A.M. Legendre. Elements de Geometrie. Premier edition. Paris, Note XII, (1794), p. 321 – 334.
2. A.L. Cauchy. Sur les polygones et polyedres. Seconde memoire // J. de l'Ecole Polytechnique – (1813). - 9. - p. 87 – 98.
3. E. Steinitz , H. Rademacher. Vorlesungen uber die Theorie der Polyeder. Berlin: Springer-Verlag, (1934).
4. И.Х. Сабитов. Вокруг доказательства леммы Лежандра-Коши о многоугольниках // Сиб. матем. журн. – (2004) - 45, N4. - с. 892 – 919.
5. А.Д. Милка. Что такое геометрия "в целом"? Москва: Знание, (1986), 32 с.
6. А.Д. Милка Об одной теореме Шура-Шмидта // Укр. геом. сборник – (1970). - 8. - с. 91 – 94.
7. В. Бляшке Дифференциальная геометрия. М.-Л.: ОНТИ-НКТП, (1935), 332 с.
8. A.D. Milka. Space-like convex surfaces in pseudo-Euclidean spaces // AMS translations – (1996). - 176. - p. 97 – 150.
9. А.Д. Александров. Выпуклые многогранники. М.-Л.: Гостехиздат, (1950), 428 с.
10. Д.Д. Мордухай-Болтовской. "Начала"Евклида. М.-Л.: Гостехиздат, (1948), 448 с.
11. А.Д. Милка. Неопознанная египетская геометрия // Proc. Int. Geom. Center – (2008). - 1, N1-2. - с. 97 – 114. Сокращенный перевод: A.D Milka . Unidentified Egyptian geometry // European Journal of Combinatorics – (2010). - 31. - p. 1065 – 1070.
12. А.Д. Милка. Истоки и содержание аксиоматики "Начал"// Proc. Int. Geom. Center – (2009). - 2, N3.
13. Special issue on Rigidity and Related Topics in Geometry // Eur. Journ. Combinatorics – (2010), 31.
14. V.A. Alexandrov. Continuous deformations of polyhedra that do not alter the dihedral angles // arXiv: 1212.4676, (2012).
15. R. Connelly. A flexible sphere // Math. Intell. – (1978). - 1(3). - p. 130 – 131.
16. А.В. Погорелов. Геометрическая теория устойчивости оболочек. М.: Наука, (1966).
17. A.D. Milka. Linear bending of star-like pyramids // C.R. Mecanique – (2003). - 12.
18. А.В. Погорелов Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, (1969), 760 с.
19. А.Д. Милка. Однозначная определенность общих замнкутых выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского // Укр. геом. сборник – 1980. - 23. - р. 99 – 107.

Анатолий Дмитриевич Милка
ФТИНТ им. Б.И.Веркина НАН Украины, Харьков, Украина
E-mail: milka@ilt.kharkov.ua

Anatoliy Milka
B. Verkin Institute for Low temperature Physics and Engineering of NAS of Ukraine, Kharkiv, Ukraine.

Rigidity of closed convex polyhedra

We discuss Theorem of Legendre and Cauchy concerning the rigidity of closed convex polyhedra, which determined the actual scientific direction of "Geometry in large". We deny the version of Steinitz, which was popular in the last century, about a mistake admitted in the proof by Legendre and Cauchy. A version of Euclid's "Elements" , in which axiomatic Definitions Legendre has seen this Theorem, differs from the Original version of "Elements"restored by Heiberg. This version of "Elements"includes an incomplete and corrected Variant of an extremely general Theorem, contained in the Original, concerning the rigidity of polyhedra, which had been opened by professional mathematicians long before the time of Alexandria and Athens. In our paper we prove this General Theorem, named Theorem of Euclid, and find its natural analogues in spherical, hyperbolic and de Sitter spaces. Article continues the previous paper of the author: *What is the geometry "in large" ?* – Moscow: Znanie, 12, 1986, 32 p.; *Unidentified Egyptian Geometry* // Proc. Int. Geom. Center, 2008, v.1, n.1-2, p.97-115; *Sources and contents of the axiomatic of "Elements"* // Proc. Int. Geom. Center, 2009, v.2, n.3, p.41-54; *Unidentified Egyptian Geometry* // Europ. J. of Combin., 2010, v.31, p.1065-1071.