Proc. Intern. Geom. Center 2013 **6**(3) 22–25 $d\omega$

Топологическая эквивалентность простых мс-пар на четырёхмерных многообразиях

Н. В. Лукова - Чуйко

Аннотация Доказан критерий топологической эквивалентности простой полярной МС-пары без критических точек индекса 3 на четырёхмерном многообразии в терминах упорядоченных диаграмм Кирби.

Ключевые слова функции Морса, эквивалентность, поле Морса - Смейла

УДК 517.91

Пусть M — гладкое многообразие. Два векторных поля X, Y на M называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : M \to M$, отображающий траектории поля X в траектории поля Y, сохраняя их ориентацию.

Разными способами топологическая классификация векторных полей Морса - Смейла на поверхностях получена Е.А.Леонтовичем и А.Г.Майером, М.Пейксото, В.В.Шарком, Х.Вонгом, Г.Флейтисом, Е.Гирик и др.

Топологической классификации векторных полей Морса - Смейла на трёхмерных многообразиях посвящены работы Г.Флейтаса, Я.Л.Уманського та О.О.Пришляка, а в четырёхмерном случае работа [1].

Функции $f, g : M \to \mathbf{R}$ называются топологически эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы $h : M \to M$, $h' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, для которых выполняется равенство $f \circ h = h' \circ g$ и гомеоморфизм h' сохраняет ориентацию прямой.

Глобальная топологическая классификация функций Морса на поверхностях и односвязных многообразиях размерности большей 5 была получена в работах А.Т.Фоменко и В.В.Шарко [2], [3]. Топологическую классификация функций Морса на замкнутых трехмерных многобразиях построено в [4], а на четырёхмерных в [5].

В [6] получена классификация функций Морса - Смейла на замкнутых римановых трехмерных многобразиях по отношению к геометрической эквивалентности в терминах обобщенных диаграмм Хегора.

МС-парой называется такая пара $\{f, X\}$, в которой f — функция Морса, а X — градиентно-подобное векторное поле этой функции.

Две МС-пары $\{f, X\}, \{g, Y\}$ называются топологически эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы $h : M \to M$, $h' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ для которых выполняется равенство $f \circ h = h' \circ g$ и кроме того гомеоморфизм h отображает траектории поля X на траектории поля Y.

По теореме Морса в окрестности невырожденнной критической точки существует система координат $x_1, x_2, ..., x_n$, в которой функция имеет вид $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(0) - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_k^2 + x_{k+1}^2 + ... + x_n^2$. Поле $X = \{-x_1, -x_2, ..., -x_k, x_{k+1}, ..., x_n\}$ будет градиентно-подобным для этой функции. Назовем эти функцию и поле стандарной парой.

МС-пара называется простой, если для каждой критической точки функции существует окресность в которой она топологически эквивалентна стандартной МС-паре.

МС-пара называется полярной, если у функции существует лишь один локальный минимум и один локальный максимум.

Постановка задачи. Найти условия топологической эквивалентности простой полярной МС-пары без критических точек индекса 3.

Топологическая еквивалентность простой полярной МС-пары без критических точек индекса 3. Будем рассматривать функции Морса на 4-мерных многобразиях, у которых один минимум и один максимум и нет критических точек индекса 3. Множество критических тоочек упорядочено по возрастанию значения функции в них. Номер критической точки – это номер ее критического значения. По функции построим разложение на ручки. Тогда это разложение на ручки будет задавать диаграмму Кирби, в которой каждой вложенной окружности с точкой соответствует 1-ручка, а окружности с оснащением - 2-ручка (эта окружность есть средней сферой 2-ручки). При этому каждая окружность имеет тот же номер, который и соответствующая критическая точка функции Морса (равный номеру соответствующей ручки).

При этом всегда можно добиться, чтобы окружность с точкой была стандартно вложеной, дуги внутри нее были горизонтальными и проходили над левой полуокружностью и под правой полуокружностью. В дальнейшем мы будем предполагать, что для всех диаграмм выполняется это свойство. По другому, мы это можем рассматривать как фиксацию внутреннего двухмерного диска, ораниченного окружностью с точкой, и всех его пересечений с дугами.

Диаграмму Кирби, в которой каждой окружности приписан номер, а для окружностей с точками зафиксированы внутренние диски, назовем упорядоченной. Две упорядоченные диаграммы Кирби называются изоморфными, если существует гомеоморфизм сфер S^3, который отображает вложенные окружности на окружности, сохраняя точки или оснащения окружностей, номера окружностей и точки пересечения с внутренними дисками.

Теорема 1 *Две простые полярные МС-пары без критических точек индекса 3 на четырехмерных многообразиях топологически эквивалентны тогда и только тогда, если построенные по ним упорядоченные диаграммы Кирби изоморфны.*

Доказательство. *Необходимость.* Поскольку топологическая эквивалентность задает соответствие между траекториями полей, то она порождает биекцию между их пересечениями с трехмерными сферами, которая по по построению будет гомеоморфизмом. При этом окружности отображаются в окружности, сохраняя отмеченые точки и оснащения. Соответствие критических значений гарантирует равенство номеров (порядков) этих окружностей.

Достаточность. Не ограничивая общности можем считать, что у двух функций одинаковые значения в соответствующих критических точках. Гомеоморфизм диаграмм задает соответствие между траекториями полей (кроме неустойчивых многообразий критических точек индекса 2 и 3). При необходимости подправим его так, чтобы он совпадал с гомеоморфизмом в окрестности оснащенных окружностей, который задается условием простоты функций. Тогда получим также соответствие между неустойчивыми многообразиями критических точек индекса 2. Соответствие между неустойчивыми многообразиями критических точек можно получить из условия единственности одноточечных компактификаций на пространстве орбит. Таким образом, получим гомеоморфизм пространства орбит одной функции в другую. Для каждой орбиты (траектории) зададим гомеоморфизм на соответствующую орбиту другой функции с помощью равентсва значений функций в точках орбиты. Таким образом получим искомый гомеоморфизм многообразий.

Пример. На четырёхмерной сфере функция Морса с 4 критическими точками индексов 0,1, 2 и 4 задается произвольным узлом (2-ручка) и окружностью с точкой, которая есть границей 2-диска, который пересекается с узлом трансверсально в одной внутренней точке. Две такие диаграммы эквивалентны, если эквивалентны их узлы (существует гомеоморфизм трехмерной сферы, переводящий узел в узел).

Заключение. Исследованы топологические свойства МС-пар на замкнутых четырёхмерных многообразиях. Автор надеется, что полученные результаты можна будет распространить на более широкий класс МС-пар.

Список литературы

1. Prishlyak A.O. Gradient like Morse-Smale dynamical systems on 4-manifolds // Mat. studii, T.16, No.1 , 2001.- p.99-104.
2. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1. – Ижевск: Изд. Дом "Удмурский универ.", 1999. -444с.
3. Шарко В.В. Функции на многообразиях. К.: Наук. думка, 1980. - 196 с.
4. Пришляк А. Топологические свойства функций на двух- и трехмерных многообразиях. Palmarium Acad. Publ. 2012. - 132c.
5. Пришляк А.О. Сопряженность функций Морса на 4-мерных многообразиях // Успехи мат. наук, V.56. No.1, 2001,- с.173-174.
6. Лукова Н.В., Пришляк О.О. Геометричні властивості МС-функцій на тривимірних многовидах // Збірник праць Інституту математики НАНУ, Т. 2, № 3, 2005.- с.112-124.

Н. В. Лукова - Чуйко

Государственный университет телекомуникаций, кафедра высшей математики, Киев

E - mail :lukova@ukr.net

Topological equivalance of simple MS-pairs on 4-manifolds

It is proved a criterion of topological equivalence of simple polar MS-pairs without critical points of index 3 on 4-manifolds using ordered Kirby diagrams