Proc. Intern. Geom. Center 2013 **6**(3) 26–39 $d\omega$

Об аффинных омбилических погружениях высокой коразмерности.

Елена Алексеевна Шугайло

Аннотация В работе описаны свойства многомерных аффинных омбилических погружений высокой коразмерности с плоской и локально симметрической индуцированной связностью. Дана параметризация омбилических погружений с нильпотентным оператором кривизны.

Ключевые слова аффинное погружение, оператор кривизны, локально симметрическая связность.

УДК 514.754

Введение

Пусть (M^n, ∇) – аффинное n-мерное многообразие со связностью ∇, $(\mathbb{R}^{n+k}, D)$ – стандартное (арифметическое) аффинное пространство с плоской связностью D. Обозначим $\mathfrak{X}(M^n)$ множество всех гладких векторных полей на M^n. В соответствии с [3], погружение $f : (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k}, D)$ называется аффинным, если вдоль погружения определено k-мерное трансверсальное дифференцируемое распределение Q: $x \in M^n \mapsto Q_x$ такое, что для всех $x \in M^n$ и всех $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ справедливо разложение

$$D_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X,\ Y),\ h(X,\ Y) \in Q, \tag{1}$$

которое определяет *аффинную фундаментальную форму* $h(X, Y)$.

Для произвольного трансверсального векторного поля ξ записывается также аналогичное разложение $D_X\xi = -f_*(S_\xi X) + \nabla^{\perp}_X\xi$, которое определяет *оператор Вейнгартена* S_ξ относительно ξ и *трансверсальную связность* $\nabla^\perp$.

Отображение $S_x : Q_x \times T_x(M^n) \to T_x(M^n)$, действующее по правилу $(\xi, X) \mapsto S_\xi X$ в каждой точке $x \in M^n$, определяет *отображение Вейнгартена.*

Пусть $\xi_1, \ldots \xi_k$ – базис трансверсального распределения Q. Аффинные аналоги разложений Гаусса и Вейнгартена записываются в виде

$$D_X Y = \nabla_X Y + h^\alpha(X,\ Y)\xi_\alpha, \tag{2}$$

$$D_X \xi_\alpha = -S_\alpha X + \tau_\alpha^\beta(X)\xi_\beta. \tag{3}$$

Компоненты *кубической формы* аффинного погружения относительно базиса трансверсального распределения имеют вид:

$$C^\alpha(X,\ Y,\ Z) = (\nabla_X h^\alpha)(Y,\ Z) + \tau_\beta^\alpha(X) h^\beta(Y,\ Z). \tag{4}$$

В [7] доказано, что ранг отображения $h(X,\ Y) : T_x(M) \times T_x(M) \to Q_x$ не зависит от выбора трансверсального распределения и называется *точечной коразмерностью* аффинного погружения. Доказано также, что в случае аффинного погружения максимальной точечной коразмерности размерность ядра и образа отображения Вейнгартена не зависят от выбора трансверсального распределения. Следовательно, можно выделять отдельные классы погружений, имеющие общие свойства отображения Вейнгартена. Одним из таких классов являются омбилические погружения. Хорошо изучены омбилические гиперповерхности - собственные и несобственные аффинные сферы ([2,3] и др.). Определение и свойства омбилических погружений коразмерности два даны в [4]. Для погружений более высокой коразмерности введем аналогичное определение

Определение 1 *Аффинное погружение $f : (M^n,\ \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k},\ D)$, для которого существует трансверсальное распределение Q такое, что отображение Вейнгартена обладает следующим свойством:*

$$S : (\xi, X) \mapsto \lambda_\xi \cdot X,\ \textit{где}\ \lambda_\xi\ \textit{ – гладкая функция}\ \forall\ \xi,$$

называется аффинным омбилическим погружением. При этом

(i) если все λ_ξ нулевые, то есть $S \equiv 0$, то погружение называется *несобственным аффинным омбилическим*;

(ii) в противном случае погружение называется *собственным аффинным омбилическим.*

Операторы Вейнгартена аффинного омбилического погружения обладают следующими свойствами: $S_\alpha = \lambda_\alpha \cdot I$, где λ_α – гладкие функции, I – тождественный оператор.

Заметим, что аффинные омбилические погружения являются частным случаем центро-аффинных погружений [4,3].

Данная работа посвящена изучению собственных аффинных омбилических погружений.

1 Предварительные сведения

Рассмотрим аффинное погружение $f : (M^n,\ \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k},\ D)$. Хорошо известны [2] основные уравнения аффинных погружений:

$$R(X,\ Y)Z = h^\alpha(Y,\ Z)S_\alpha X - h^\alpha(X,\ Z)S_\alpha Y; \tag{5}$$

$$(\nabla_X h^\alpha)(Y,\ Z) + \tau^\alpha_\beta(X)h^\beta(Y,\ Z) = (\nabla_Y h^\alpha)(X,\ Z) + \tau^\alpha_\beta(Y)h^\beta(X,\ Z); \tag{6}$$

$$(\nabla_X S_\alpha)Y - \tau^\beta_\alpha(X)S_\beta Y = (\nabla_Y S_\alpha)X - \tau^\beta_\alpha(Y)S_\beta X; \tag{7}$$

$$\begin{gathered} h^\beta(X,\ S_\alpha Y) - h^\beta(Y,\ S_\alpha X) = \\ X(\tau^\beta_\alpha(Y)) + \tau^\beta_\gamma(X)\tau^\gamma_\alpha(Y) - Y(\tau^\beta_\alpha(X)) - \tau^\beta_\gamma(Y)\tau^\gamma_\alpha(X) - \tau^\beta_\alpha([X,\ Y]). \end{gathered} \tag{8}$$

Доказано [7], что если M^n – подмногообразие в $\mathbb{R}^{n+k}$ с трансверсальным распределением $Q = \mathrm{span}\{\xi_1, \ldots,\ \xi_k\}$ и $\bar{Q} = \mathrm{span}\{\bar{\xi}_1, \ldots,\ \bar{\xi}_k\}$ – преобразование трансверсального распределения

$$\bar{\xi}_\alpha = \Phi^\beta_\alpha \xi_\beta + Z_\alpha, \tag{9}$$

где Z_α – касательные векторные поля на M^n, $\Phi = [\Phi^\beta_\alpha]_{k\times k}$ невырожденная матрица из гладких функций, тогда:

$$\bar{h}^\alpha(X,\ Y) = [\Phi^{-1}]^\alpha_\beta h^\beta(X,\ Y) \tag{10}$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - [\Phi^{-1}]^\alpha_\beta h^\beta(X,\ Y)Z_\alpha \tag{11}$$

$$\bar{S}_\alpha X = \Phi^\beta_\alpha S_\beta X - \nabla_X Z_\alpha + \bar{\tau}^\beta_\alpha(X)Z_\beta \tag{12}$$

$$\bar{\tau}^\beta_\alpha(X) = [\Phi^{-1}]^\beta_\gamma\{\tau^\gamma_\delta(X)\Phi^\delta_\alpha + h^\gamma(X,\ Z_\alpha) + X(\Phi^\gamma_\alpha)\} \tag{13}$$

Теорема 1 *Пусть $f : (M^n,\ \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k},\ D)$ – собственное аффинное омбилическое погружение с радиусом-вектором погружения $\bar{r}$. Если в трансверсальном распределении существует векторное поле ξ такое, что $\lambda_\xi \neq 0$ во всей области определения, тогда базис трансверсального распределения может быть выбран следующим образом*

$$\xi_1 = -\bar{r},\ \xi_\alpha = \overrightarrow{\mathrm{const}} \text{ при } \alpha = \overline{2,k}. \tag{14}$$

При этом:

1) операторы Вейнгартена имеют следующий вид

$$S_1 = I,\ S_\alpha \equiv 0\ \forall \alpha = \overline{2,k}; \tag{15}$$

2) трансверсальная связность плоская, причем

$$\tau_\alpha^\beta(X) = 0 \text{ для всех } X \text{ и всех } \alpha, \beta = \overline{1,k};$$

3) тензор кривизны индуцированной связности вычисляется по формуле

$$R(X,\ Y)Z = h^1(Y,\ Z)X - h^1(X,\ Z)Y \tag{16}$$

4) связность является проективно плоской;

5) связность полусимметрическая, т.е. $R \cdot R = 0$;

6) тензор Риччи симметричен и вычисляется по формуле

$$Ric(Y,\ Z) = (n-1)h^1(Y,\ Z).$$

Доказательство Рассмотрим аффинное омбилическое погружение $f : (M^n,\ \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k},\ D)$. Операторы Вейнгартена имеют следующий вид $S_\alpha = \lambda_\alpha \cdot I$, причем существует α такое, что $\lambda_\alpha \neq 0$ во всей области определения. Не нарушая общности можем считать, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда можно выбрать базис в трансверсальном распределении

$$\bar{\xi}_\alpha = \varPhi_\alpha^\beta \xi_\beta,\ \varPhi_{k\times k} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & -\lambda_2/\lambda_1 & \dots & -\lambda_k/\lambda_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

таким образом, что $\bar{S}_1 = I,\ \bar{S}_\alpha \equiv 0\ \forall \alpha = \overline{2,k}$. То есть операторы Вейнгартена имеют вид (15).

Из уравнения Гаусса (5) получаем, что тензор кривизны вычисляется по формуле (16)

$$R(X,\ Y)Z = h^1(Y,\ Z)X - h^1(X,\ Z)Y.$$

Тензор кривизны в данном случае совпадает с тензором кривизны индуцированной связности центро-аффинного погружения гиперповерхности [3]. Следовательно, в данном случае связность имеет те же свойства, а именно:

1) *тензор Риччи симметричен* и вычисляется по формуле

$$Ric(Y,\ Z) = (n-1)h^1(Y,\ Z);$$

2) *связность является проективно плоской.*

Прямым подсчетом легко проверить, что данная связность полусимметрическая, т.е. $R \cdot R = 0$.

$$\begin{gathered}(R(U,W)\cdot R)(X,Y)Z = R(U,W)(R(X,Y)Z) - R(R(U,W)X,Y)Z - \\ R(X,R(U,W)Y)Z - R(X,Y)(R(U,W)Z) = (R(U,W)(h^1(Y,Z)X - \\ h^1(X,Z)Y) - R(h^1(W,X)U - h^1(U,X)W,Y)Z - R(X,h^1(W,Y)U - \\ h^1(U,Y)W)Z - R(X,Y)(h^1(W,Z)U - h^1(U,Z)W) = \\ h^1(Y,Z)(h^1(W,X)U - h^1(U,X)W) - h^1(X,Z)(h^1(W,Y)U - h^1(U,Y)W) - \\ h^1(W,X)(h^1(Y,Z)U - h^1(U,Z)Y) + h^1(U,X)(h^1(Y,Z)W - h^1(W,Z)Y) - \\ h^1(W,Y)(h^1(U,Z)X - h^1(X,Z)U) + h^1(U,Y)(h^1(W,Z)X - h^1(X,Z)W) - \\ h^1(W,Z)(h^1(Y,U)X - h^1(X,U)Y) + h^1(U,Z)(h^1(Y,W)X - h^1(X,W)Y) = 0\end{gathered}$$

Рассмотрим уравнения Риччи (8) для данного погружения

при $\alpha = 1: \quad h^\beta(X,\ S_1Y) - h^\beta(Y,\ S_1X) = h^\beta(X,\ Y) - h^\beta(Y,\ X) = 0;$

при $\alpha = \overline{2,k}: \quad h^\beta(X,\ S_\alpha Y) - h^\beta(Y,\ S_\alpha X) = h^\beta(X,\ 0) - h^\beta(Y,\ 0) = 0.$

Таким образом, для данного погружения *трансверсальная связность плоская.*

Поскольку $S_\alpha = 0$ при $\alpha = \overline{2,k}$ и $\nabla S_1 = 0$ при $\alpha = 1$, то из уравнений Кодацци (7), получаем: $-\tau^1_\alpha(X)Y = -\tau^1_\alpha(Y)X$. Так как это равенство выполняется при любых $X,\ Y$, то следовательно,

$$\tau^1_\alpha(X) = 0 \text{ для всех } X \text{ и всех } \alpha = \overline{1,k}. \tag{17}$$

Поскольку трансверсальная связность плоская, то можно выбрать базис в трансверсальном распределении таким образом, что все формы трансверсальной связности будут нулевые. А с учетом (17) оказывается, что такой базис может быть получен преобразованием $\bar{\xi}_\alpha = \Phi^\beta_\alpha \xi_\beta$ с матрицей $\Phi_{k\times k} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times(k-1)} \\ b_{(k-1)\times 1} & \Psi_{(k-1)\times(k-1)} \end{pmatrix}$, которая не меняет (12,13) вид операторов Вейнгартена (15).

Итак, получаем $D_X\xi_1 = -X,\ D_X\xi_\alpha = 0$ при $\alpha = \overline{2,k}$. Таким образом, если $\bar{r}$ - радиус-вектор погружения, то базис трансверсального распределения может быть выбран следующим образом $\xi_1 = -\bar{r},\ \xi_\alpha = \overrightarrow{\mathrm{const}}$ при $\alpha = \overline{2,k}$. Теорема полностью доказана.

Лемма 1 *Пусть* $f : (M^n,\ \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k},\ D)$ *– собственное аффинное омбилическое погружение, причем существует* α *такое, что* $\lambda_\alpha \neq 0$ *во всей области определения. Тогда погружение может быть параметризовано следующим образом*

$$\bar{r}(x) = \{\rho^1(x), \ldots, \rho^{n+1}(x), F^2(x), \ldots, F^k(x)\} \tag{18}$$

с базисом трансверсального распределения

$$\xi_1 = -\bar{\rho} = -\{\rho^1, \ldots, \rho^{n+1}, 0, \ldots, 0\}, \xi_\alpha = \{0, \ldots, 1, \ldots, 0\} \text{ при } \alpha = \overline{2,k}, \tag{19}$$

где единица стоит на $(n+\alpha)$*-м месте. При этом выполняются все свойства, сформулированные в теореме 1, за исключением форм трансверсальной связности:* $\tau_1^\beta(X) = X(F^\beta)$ *для* $\beta = \overline{2,k}$*, остальные компоненты нулевые.*

Доказательство Выберем базис трансверсального распределения (14). Итак, ξ_α – постоянные векторные поля для $\alpha = \overline{2,k}$. Пусть $V = \mathbb{R}^{n+1}$ – аффинное подпространство в $\mathbb{R}^{n+k}$, трансверсальное пространству $\tilde{Q} = \mathrm{Lin}\{\xi_2, \ldots,\ \xi_k\}$. Пусть $\pi : \mathbb{R}^{n+k} \to V$ – проекция вдоль $\tilde{Q}$ такая, что $\pi \circ f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ – центро-аффинное погружение с образом W – открытым подмножеством V и трансверсальным векторным полем $\tilde{\xi}$, где $\tilde{\xi}$ – проекция ξ_1 на V вдоль $\tilde{Q}$. Можем найти гладкое отображение $F : M^n \to \mathbb{R}^{k-1}$ такое, что $f(x) = (\pi \circ f)(x) + \sum\limits_{\alpha=2}^{n} F^\alpha(x)\xi_\alpha$.

Выберем систему координат в подпространстве $\tilde{Q}$ следующим образом: $\xi_\alpha = \{0, \ldots, 1, \ldots, 0\}$, где единица стоит на $(n+\alpha)$-м месте при $\alpha = \overline{2,k}$. Тогда $\tilde{\xi} = -\{\rho^1, \ldots, \rho^{n+1}, 0, \ldots, 0\} = \xi_1$ и параметризация погружения имеет вид (18).

В теореме 1 свойства омбилического погружения сформулированы для базиса трансверсального погружения (14). Базис (19) соответствует преобразованию (9) базиса (14) с $Z_\alpha \equiv 0$ и матрицей

$$\Phi_{k\times k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ F^2 & 1 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ F^k & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

При таком преобразовании h^1 не меняется (10), вид операторов Вейнгартена (15) также не меняется (12), а значит, не меняются и свойства тензора кривизны. Трансверсальная связность остается плоской, но из (13) следует, что $\tau_1^\beta(X) = X(F^\beta)$, остальные компоненты нулевые.

Очевидно, что если не все λ_α нулевые, но не существует α, при котором λ_α не обращается в нуль во всей области определения, то параметризация (18) может быть выбрана локально.

Если для собственного аффинного омбилического погружения выбран трансверсальный базис (19), то свойства погружения определяются компонентой аффинной фундаментальной формы относительно ξ_1, то есть $h^1(X,Y)$. Назовем собственное аффинное омбилическое погружение с базисом трансверсального распределения (19) *невырожденным*, если форма h^1 невырождена, и *вырожденным* в противном случае.

Следствием предыдущей леммы является следующее

Предложение 1 *Образ собственного аффинного омбилического погружения $f : (M^n,\ \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k},\ D)$ лежит на аффинном гиперцилиндре с $(k-1)$-мерной образующей, базой которого является n-мерная центро-аффинная гиперповерхность.*

Лемма 2 *Пусть даны два собственных аффинных омбилических погружения $f : (M^n,\ \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k},\ D)$ и $\tilde{f} : (M^n,\ \tilde{\nabla}) \to (\mathbb{R}^{n+k},\ D)$. Предположим $\nabla = \tilde{\nabla}$, тогда образы этих погружений лежат на аффинно эквивалентных цилиндрах.*

Доказательство Выберем для каждого из данных погружений трансверсальный базис (19). Погружения лежат на аффинных цилиндрах с базами, которые задаются радиусами-векторами ρ и $\tilde{\rho}$ соответственно.

Для центро-аффинных гиперповерхностей ρ и $\tilde{\rho}$ имеем следующие характеристики: $(\nabla,\ h = h^1,\ S = S_1 = I,\ \tau = \tau_1^1 = 0)$, $(\tilde{\nabla},\ \tilde{h} = \tilde{h}^1,\ \tilde{S} = \tilde{S}_1 = I,\ \tilde{\tau} = \tilde{\tau}_1^1 = 0)$. Поскольку $\nabla = \tilde{\nabla}$, то $R = \tilde{R}$, на основании формулы (16) делаем вывод, что $h^1 = \tilde{h}^1$, то есть $h = \tilde{h}$. Следовательно, все характеристики для гиперповерхностей совпадают, и на основании известных теорем о единственности, делаем вывод, что ρ и $\tilde{\rho}$ аффинно эквивалентны. А следовательно, эквивалентны аффинные цилиндры, на которых лежат образы f и $\tilde{f}$.

2 Аффинные омбилические погружения с плоской связностью

Рассмотрим сначала несобственное аффинное омбилическое погружение. Такое погружение аффинно эквивалентно [7] погружению графика некоторого гладкого отображения $F : M^n \to \mathbb{R}^k$, индуцированная связность в данном случае плоская.

Рассмотрим теперь собственное аффинное омбилическое погружение.

Лемма 3 *Образ собственного аффинного омбилического погружения $f : (M^n,\ \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k},\ D)$ с плоской связностью ∇ лежит в аффинной гиперплоскости в $\mathbb{R}^{n+k}$, не проходящей через начало координат.*

Доказательство Выберем для для собственного аффинного омбилического погружения трансверсальный базис (19). Поскольку связность плоская, то

$$R(X,\ Y)Z = h^1(Y,\ Z)X - h^1(X,\ Z)Y = 0\ \forall X, Y, Z\ \Rightarrow\ h^1 = 0.$$

Следовательно, центро-аффинная гиперповерхность $\bar{\rho}$ является аффинной гиперплоскостью в $\mathbb{R}^{n+1}$, не проходящей через начало координат. Существует система координат, в которой радиус-вектор погружения задается следующим образом

$$\bar{r}(x) = \{x^1, \ldots, x^n, a_i x^i + 1, F^2(x), \ldots, F^k(x)\}.$$

Таким образом, образ погружения лежит на аффинной гиперплоскости в $\mathbb{R}^{n+k}$, не проходящей через начало координат. Погружение, рассматриваемое как отображение в этой гиперплоскости, является погружением графика гладкого отображения $F : M^n \to \mathbb{R}^{k-1}$.

3 Омбилические погружения с локально симметрической связностью

Напомним, что связность ∇ называется *локально симметрической*, если $\nabla R = 0$. Пусть $f : (M^n,\ \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k},\ D)$ собственное аффинное омбилическое погружение. Выберем трансверсальное распределение (14), тогда тензор кривизны вычисляется по формуле (16). Вычислим ∇R:

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_W R)(X,Y)Z = \\
&= \nabla_W(R(X,Y)Z) - R(\nabla_W X,Y)Z - R(X,\nabla_W Y)Z - R(X,Y)\nabla_W Z = \\
&= \nabla_W(h^1(Y,Z)X - h^1(X,Z)Y) - h^1(Y,Z)\nabla_W X + h^1(\nabla_W X,Z)Y - \\
&- h^1(\nabla_W Y,Z)X + h^1(X,Z)\nabla_W Y - h^1(Y,\nabla_W Z)X + h^1(X,\nabla_W Z)Y = \\
&= W(h^1(Y,Z))X - h^1(\nabla_W Y,Z)X - h^1(Y,\nabla_W Z)X - W(h^1(X,Z))Y + \\
&+ h^1(X,Z)\nabla_W Y + h^1(X,\nabla_W Z)Y = (\nabla_W h^1)(Y,Z)X - (\nabla_W h^1)(X,Z)Y
\end{aligned}
$$

Следовательно, для собственных аффинных омбилических погружений с трансверсальным распределением (14)

$$\nabla R = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla h^1 = 0 \qquad (20)$$

Для того, чтобы связность была локально симметрической необходимо и достаточно, чтобы она была согласована с квадратичной формой h^1. Как известно, существует единственная связность без кручения, согласованная с невырожденной квадратичной формой. Тензор кривизны при этом имеет вид (16). В случае, когда аффинная фундаментальная форма положительно определена, мы имеем полную аналогию с римановым омбилическим погружением, или погружением постоянной положительной кривизны. Следовательно, невырожденное собственное аффинное омбилическое погружение $f : (M^n,\ \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k},\ D)$ с положительно определенной h^1 может быть параметризовано следующим образом

$$\bar{r} = \{\rho^1, \ldots, \rho^{n+1}, f^2, \ldots, f^k\},$$

где $\bar{\rho} = \{\rho^1, \ldots, \rho^{n+1}\}$ – радиус-вектор гиперсферы S^n, f^α – произвольные гладкие функции для $\alpha = \overline{2,k}$. Очевидно, что ∇ в данном случае – связность гиперсферы.

В общем случае выберем параметризацию аффинного омбилического погружения (18), где $\bar{\rho}$ – радиус-вектор центро-аффинной гиперповерхности.Вычислим для нее кубическую форму C_ρ:

$$C_\rho(X,\ Y,\ Z) = (\nabla_X h^1)(Y,\ Z) + \tau_1^1(X)h^1(Y,\ Z) = 0.$$

Итак, если индуцированная связность локально-симметрическая, то $\bar{\rho}$ – параллельная центро-аффинная гиперповерхность. Такие поверхности хорошо изучены. Невырожденными параллельными центро-аффинными гиперповерхностями являются только центральные гиперквадрики [3].

Вырожденными параллельными гиперповерхностями являются аффинные цилиндры [1], [3], [8]. Следовательно, вырожденными параллельными центро-аффинными гиперповерхностями являются цилиндры над центральными квадриками.

Предложение 2 *Образ собственного аффинного омбилического погружения* $f : (M^n,\ \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k},\ D)$ *с локально-симметрической связностью* ∇ *лежит на аффинном цилиндре над центральной квадрикой.*

4 Собственные аффинные омбилические погружения с нильпотентным оператором кривизны

Определим степени оператора кривизны $R(X,Y)$ рекуррентно следующим образом:

$$R^p(X,Y)Z = R^{p-1}(X,Y)(R(X,Y)Z),\ p>1$$

Для действительных пространственных форм $(M^n,\ g)$ для любых X и Y имеет место формула [6]

$$R^p(X,Y) = \begin{cases} (-b^2c^2)^{s-1}R(X,Y), & p=2s-1,\\ (-b^2c^2)^{s-1}R^2(X,Y), & p=2s, \end{cases} \quad s\in\mathbb{N},$$

где $b = |X\wedge Y|$ – норма бивектора $X\wedge Y$.

Найдем степени оператора кривизны (16):

$$R^2(X,Y)Z = h^1(Y,h^1(Y,Z)X - h^1(X,Z)Y)X - h^1(X,h^1(Y,Z)X - h^1(X,Z)Y)Y =$$
$$= \{h^1(Y,X)h^1(Y,Z) - h^1(Y,Y)h^1(X,Z)\}X - \{h^1(X,X)h^1(Y,Z) - h^1(X,Y)h^1(X,Z)\}Y,$$

$$R^3(X,Y)Z = h^1(Y,\{h^1(Y,X)h^1(Y,Z) - h^1(Y,Y)h^1(X,Z)\}X -$$
$$- \{h^1(X,X)h^1(Y,Z) - h^1(X,Y)h^1(X,Z)\}Y)X - h^1(X,\{h^1(Y,X)h^1(Y,Z) -$$
$$- h^1(Y,Y)h^1(X,Z)\}X - \{h^1(X,X)h^1(Y,Z) - h^1(X,Y)h^1(X,Z)\}Y)Y =$$
$$= h^1(X,Y)h^1(X,Y)\{h^1(Y,Z)X - h^1(X,Z)Y\} - h^1(X,X)h^1(Y,Y)\{h^1(Y,Z)X -$$
$$- h^1(X,Z)\}Y\} = \{h^1(X,Y)h^1(X,Y) - h^1(X,X)h^1(Y,Y)\}R(X,Y)Z.$$

По индукции получаем

$$R^p(X,Y) = \begin{cases} \{(h^1(X,Y))^2 - h^1(X,X)h^1(Y,Y)\}^{s-1}R(X,Y) \\ \qquad \text{для } p=2s-1,\ s\in\mathbb{N}; \\ \{(h^1(X,Y))^2 - h^1(X,X)h^1(Y,Y)\}^{s-1}R^2(X,Y) \\ \qquad \text{для } p=2s,\ s\in\mathbb{N}, \end{cases} \tag{21}$$

В случае, когда погружение является невырожденной центро-аффинной гиперповерхностью, в качестве метрики можно взять аффинную фундаментальную форму и тогда мы получаем тот же результат, что и в римановом случае.

Исследуем вопрос о том, в каком случае оператор $R(X,Y)$ может быть нильпотентным (при всех X,Y).

Лемма 4 *Оператор $R(X,Y)$ собственного аффинного омбилического погружения $\bar{r}: M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ с трансверсальным распределением (14) и неплоской индуцированной связностью является нильпотентным (при всех X,Y) тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank} h^1 = 1$*, причем степень нильпотентности равна 2.*

Доказательство Из условия $R^2(X,Y)Z = 0\ \forall X,Y,Z$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} h^1(Y,X)h^1(Y,Z) - h^1(Y,Y)h^1(X,Z) = 0 \\ h^1(X,X)h^1(Y,Z) - h^1(X,Y)h^1(X,Z) = 0, \end{cases}$$

Относительно переменных $h^1(Y,Z),\ h^1(X,Z)$ – это линейная однородная система, которая имеет только тривиальное решение в случае, когда $\operatorname{rank} h^1 \geq 2$. Если же $\operatorname{rank} h^1 = 1$, то мы получаем верные равенства при любых значениях $X,\ Y,\ Z$.

Итак, $R^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} h^1 = 1$.

Равенство $R^3(X,Y)Z = 0\ \forall X,Y,Z$ в случае неплоской связности возможно лишь (21), когда $(h^1(X,Y))^2 - h^1(X,X)h^1(Y,Y) = 0\ \forall X,Y$, то есть $\operatorname{rank} h^1 = 1$.

Теорема 2 *Пусть $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ – собственное аффинное омбилическое погружение с нильпотентным оператором кривизны и неплоской индуцированной связностью ∇. Тогда существует система координат, в которой данное погружение задается радиусом-вектором*

$$\bar{r}(u^1,\ldots,u^n) = \bar{\varphi}(u^1) + \sum_{i=2}^{n} u^i \bar{c}_i + \sum_{\alpha=2}^{k} f^\alpha(u^1,\ldots,u^n)\xi_\alpha \tag{22}$$

с трансверсальным распределением $\xi_1 = -\bar{r},\ \xi_\alpha = \overrightarrow{\mathrm{const}}$ при $\alpha = \overline{2,k}$. Вектор-функция $\bar{\varphi}$ удовлетворяет уравнению $\bar{\varphi}'' = -h(u^1)\bar{\varphi} + a(u^1)\bar{\varphi}'$.

Доказательство На основании леммы 4 заключаем, что $\operatorname{rank} h^1 = 1$. Следовательно, существует координатный базис в касательном пространстве такой, что

$$h^1 = \begin{pmatrix} h & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ h^\alpha = \begin{pmatrix} h^\alpha_{11} & h^\alpha_{12} & \dots & h^\alpha_{1n} \\ h^\alpha_{12} & h^\alpha_{22} & \dots & h^\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^\alpha_{1n} & h^\alpha_{2n} & \dots & h^\alpha_{nn} \end{pmatrix}, \ \alpha = \overline{2,k}, \tag{23}$$

$$S_1 e_i = e_i, \ i = \overline{1,n}, \ S_\alpha \equiv 0, \ \alpha = \overline{2,k}. \tag{24}$$

Рассмотрим уравнения Кодацци для h (6) при $\alpha = 1$, $i \neq 1$:

$$(\nabla_{e_i} h^1)(e_1, \ e_1) = (\nabla_{e_1} h^1)(e_i, \ e_1),$$

$$\frac{\partial h}{\partial u^i} - 2h^1(\nabla_{e_i} e_1, \ e_1) = -h^1(\nabla_{e_1} e_i, \ e_1) - h^1(e_i, \ \nabla_{e_1} e_1),$$

$$\frac{\partial h}{\partial u^i} = h\Gamma^1_{i1} \quad (i \neq 1). \tag{25}$$

А также при $\alpha = 1$, $i, k \neq 1$:

$$(\nabla_{e_i} h^1)(e_1, \ e_k) = (\nabla_{e_1} h^1)(e_i, \ e_k),$$

$$-h^1(\nabla_{e_i} e_1, \ e_k) - h^1(e_1, \ \nabla_{e_i} e_k) = -h^1(\nabla_{e_1} e_i, \ e_k) - h^1(e_i, \ \nabla_{e_1} e_k),$$

$$h\Gamma^1_{ik} = 0 \quad (i, k \neq 1). \tag{26}$$

Из уравнения Гаусса (16) и вида аффинной фундаментальной формы (23) получаем

$$\begin{aligned} &R(e_1, e_j)e_1 = -he_j, \ j \neq 1, \\ &R(e_1, e_j)e_k = 0, \qquad j, k \neq 1, \\ &R(e_i, e_j)e_k = 0, \qquad i, j, k \neq 1. \end{aligned} \tag{27}$$

Таким образом, $\ker R = \{e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Следовательно, можно выбрать параметризацию погружения $\hat{r} = \bar{r}(u(v))$, чтобы $\hat{\Gamma}^k_{ij} = 0$ при $i, j, k = \overline{2,n}$.

$$\begin{cases} u^1 = v^1 \\ u^i = \psi^i(v^2, \dots, v^n) \ i = \overline{2,n}. \end{cases}$$

Заметим, что при таком преобразовании координат вид аффинной фундаментальной формы (23) и вид операторов Вейнгартена (24) не изменятся.

$$\frac{\partial u^k}{\partial v^\gamma} \hat{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} + \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}.$$

Поскольку (26) $\Gamma^1_{ij} = 0, \ i, j \neq 1$, то в новой системе координат $\hat{\Gamma}^1_{ij} = 0, \ i, j \neq 1$. Следовательно, $\hat{\Gamma}^k_{ij} = 0, \ i, j \neq 1, \ \forall k$. Учитывая (14, 23), получаем $i, j \neq 1$

$$\frac{\partial^2 \hat{r}}{\partial v^i \partial v^j} = \sum_{\alpha=2}^{k} \hat{h}^\alpha_{ij} \xi_\alpha.$$

Интегрируя, получим:

$$\hat{r}(v^1,\ldots,v^n)=\bar\varphi_1(v^1)+\sum_{i=2}^{n}v^i\bar\varphi_i(v^1)+\sum_{\alpha=2}^{k}\hat f^\alpha(v^1,\ldots,v^n)\xi_\alpha,$$

где $\dfrac{\partial^2\hat f^\alpha}{\partial v^i\partial v^j}=\hat h^\alpha_{ij}$. Поскольку (14), для регулярности погружения необходима линейная независимость векторов $\bar\varphi_1{}'(v^1)$, $\bar\varphi_1(v^1),\ldots,\bar\varphi_n(v^1)$, $\xi_2,\ldots,\xi_k$. Следовательно, можно параметризовать данное погружение следующим образом ($v^1=u^1$)

$$\bar r(u^1,\ldots,u^n)=\bar\varphi(u^1)+\sum_{i=2}^{n}u^i\bar c_i+\sum_{\alpha=2}^{k}f^\alpha(u^1,\ldots,u^n)\xi_\alpha$$

С трансверсальным распределением $\xi_1=-\bar r$, $\xi_2,\ldots,\xi_k$. Вектор-функция $\bar\varphi(u^1)$ при этом имеет две ненулевые координаты и удовлетворяет уравнению $\bar\varphi''=-h(u^1)\bar\varphi+a(u^1)\bar\varphi'$.

$$\frac{\partial\bar r}{\partial u^1}=\bar\varphi'(u^1)+\sum_{\alpha=2}^{k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^1}\xi_\alpha,\quad \frac{\partial\bar r}{\partial u^i}=\bar c_i+\sum_{\alpha=2}^{k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i}\xi_\alpha\quad \text{при } i\neq 1$$

Выпишем разложения Гаусса:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\bar r}{\partial u^i\partial u^j}&=\sum_{\alpha=2}^{k}\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial u^i\partial u^j}\xi_\alpha\quad\text{при } i\cdot j\neq 1\\
\frac{\partial^2\bar r}{(\partial u^1)^2}&=\bar\varphi''(u^1)+\sum_{\alpha=2}^{k}\frac{\partial^2 f^\alpha}{(\partial u^1)^2}\xi_\alpha=-h(u^1)\bar\varphi(u^1)+a(u^1)\bar\varphi'(u^1)+\\
&+\sum_{\alpha=2}^{k}\frac{\partial^2 f^\alpha}{(\partial u^1)^2}\xi_\alpha=h(u^1)\xi_1+a(u^1)\bar\varphi'(u^1)+h(u^1)\sum_{i=2}^{n}u^i\bar c_i+\\
&+\sum_{\alpha=2}^{k}\left(h(u^1)f^\alpha+\frac{\partial^2 f^\alpha}{(\partial u^1)^2}\right)\xi_\alpha=h\xi_1+a\frac{\partial\bar r}{\partial u^1}+h\sum_{i=2}^{n}u^i\frac{\partial\bar r}{\partial u^i}+\\
&+\sum_{\alpha=2}^{k}\left(hf^\alpha-a\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^1}-h\sum_{i=2}^{n}u^i\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i}+\frac{\partial^2 f^\alpha}{(\partial u^1)^2}\right)\xi_\alpha
\end{aligned}$$

Таким образом, данное погружение имеет неплоскую индуцированную связность, которая в локальных координатах задается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{e_1}e_1=a(u^1)e_1+h(u^1)\sum_{i=2}^{n}u^ie_i\\
&\nabla_{e_1}e_i=0\quad\text{для } i=\overline{2,n}\\
&\nabla_{e_i}e_j=0\quad\text{для } i,j=\overline{2,n}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Nomizu K., Opozda B. On affine hypersurfaces with parallel nullity // J. Math. Soc. Japan, – 1992. – V. 44, № 4. – p. 693-699.
2. Nomizu K., Pinkall U. On the geometry of affine immersions // Mathematisce Zeitschrift. – 1987. – № 195. – p. 165-178.
3. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. – Cambridge University Press, 1994. – 264 p.
4. Nomizu K., Sasaki T. Centroaffine immersions of codimension two and projective hypersurface theory // Nagoya Math. J. – 1993. – V. 132. – p. 63-90.
5. Opozda B. A Characterization of Affine Cylinders // Mh. Math. – 1996. – № 121. – p. 113-124.
6. Sakharova E., Yampolsky A. Powers of Curvature Operator of Space Forms and Geodesics of the Tangent Bundle// Укр. мат. журн. – 2004. – т. 56, № 9. - с. 1231-1243.
7. Shugailo O.O. On affine immersions with flat connections // Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2012. – V. 8, № 1. – p. 90-105.
8. Шугайло Е. А. Параллельные аффинные погружения с плоской связностью // Укр. мат. журн. – 2013. – т. 65, № 9. – с. 1283-1300.

Елена Алексеевна Шугайло

Механико-математический факультет, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина

E-mail: lfisdi@gmail.com

Olena O. Shugailo

Department of Mechanics and Mathematics, V.N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61077, Ukraine

E-mail: lfisdi@gmail.com

On affine umbilical immersions of higher codimension

We study the properties of multidimensional affine umbilical immersion with flat connection and locally symmetric connection. We give parametrization of affine umbilical immersion with nilpotent curvature operator.