# Геометрическая структура совместно порожденная метрикой и кручением

**Н.И. Яременко**

**Аннотация** В данной статье рассматривается геометрия, которая порождена совместно и согласовано метрическим тензором и тензором кручения. Изучены свойства пространства описанного при помощи задания метрики и кручения; при этом исследован тензор кривизны, получены аналоги тождества Риччи – Якоби, уравнения геодезических линий.

**Ключевые слова** метрический тензор,тензор кручения, связность, геодезические линии, кривизна, кручение, аффинное пространство

**УДК** 514.1

## Введение

В данной работе исследуются свойства пространств с аффинной связностью при наличии метрического тензора, получены результаты о структуре тензора кривизны, рассмотрено построение геодезических линий и получена оценка зазора который возникает при обходе контура параллелограмма в этих пространствах.

Исследование свойств метрических и пространств аффинной связности началось, приблизительно, в начале 20-го века [6, 7] и продолжается и развивается до настоящего времени [1-5, 7-16].

Важность подобного рода исследований обуславливается с одной стороны внутренней логикой оснований математической науки [6, 7, 9, 13], с другой приложениями к задачам аналитической механике [1, 12], теории относительности [5, 14-16], механики сплошных сред, космологии [10].

Достаточно хорошо исследованы Римановы пространства [9], ввиду богатства геометрических свойств, менее изучены пространства аффинной связности [3] и не достаточно рассмотрена наиболее интересная геометрия, которая получается при объединении геометрий аффинной связности и порожденной метрическим тензором, именно этому и посвящена данная работа.

Основная цель данной работы – исследование тех геометрических свойств пространства аффинной связности, которые возникают при его погружении в метрическое пространство, то есть построить геометрию исходя из двух тензоров – метрики и кручения. В этом случаи с одной стороны сохраняются все свойства геометрии аффинного пространства, с другой появляются многие важные особенности, связанные с наличием метрики, при этом структура тензора кривизны имеет характерные особенности, а также появляется возможность оценить зазор, который возникает при переходе от оригинала к изображению и, наоборот, в случаи бесконечно малых контуров.

Основное естественное предположение, которое используется ниже для сохранения метрических свойств изучаемого пространства: скалярное произведение двух векторов при параллельном переносе вдоль произвольного пути не меняется.

## Основные результаты и их доказательства

Можно по-разному представлять физическое четырехмерное пространство, в котором происходят события реальной действительности, с математической точки зрения возможны две принципиальные схемы построения геометрии пространства, которое можно бы было отождествить с наблюдаемым физическим пространством.

Первая схема это обобщение геометрии Эвклида – геометрия римановой метрики, то есть многообразие, в котором задано поле два раза ковариантного симметрического и невырожденного тензора $g_{ik}(M)$, где $Det|g_{ik}| \neq 0$ и $g_{ik} = g_{ki}$.

Заметим, что метрический тензор выбирается произвольно, кроме условий положенных выше и многообразие считается достаточно гладким.

Важным есть тот факт, что это определение можно переписать в виде: инвариантная дифференциальная квадратичная форма $g_{ik}\, dx^i dx^k$ удовлетворяющая условию $Det|g_{ik}| \neq 0$, $g_{ik} = g_{ki}$ определяем геометрию Римана.

Как следствие инвариантности формы:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k \tag{1}$$

получим, что коэффициенты $g_{ik}$образуют тензорное поле.

В этой модели за длину дуги кривой можно принять интеграл:

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ik}\, dx^i dx^k.} \tag{2}$$

Вторая схема представляем обобщение аффинной геометрии – геометрия аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(M)$, построенная на базе $n$- мерного многообразия.

Система чисел $\Gamma^i_{jk}(M)$ подчинена закону преобразования от одной координатной системы $x^i$ к другой $x^{i'}$ в виде:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \tag{3}$$

причем функции $\Gamma^i_{jk}$ достаточно гладкие.

Пусть вдоль кривой $x^i = x^i(t)$, $t \in [a, b] \subset R$ задано поле тензора $A^i = A^i(t)$, если при каждом бесконечно малом смещении по $t$ координаты тензора $A^i(t)$ меняются по закону:

$$dA^i = -\Gamma^i_{jk} A^j dx^k, \tag{4}$$

тогда говорят, что тензор $A^i$ переносится параллельно относительно кривой $t$.

В зависимости от поставленных целей выбирается та или иная геометрическая модель, но как внутренняя логика, так и здравый смысл требует, чтобы в физическом мире эти две модели сосуществовали совместно и дополняли друг друга, хорошо известный результат, что в произвольном римановом пространстве всегда можно построить связность $\Gamma^i_{jk}(M)$. Интересен вопрос единственности такого построения. В общем случае такое построение $\Gamma^i_{jk}$не единственно, но абсолютно естественным (с точки зрения математики и в большей мере физики), есть требования того, что всякий раз, когда вдоль какого-либо пути одновременно переносятся параллельно два вектора $A^i$ и $B^i$ (в силу наличия связности такое перенесение определено), их скалярное произведение не меняется (скалярное произведение определяется метрикой). Математически это записывается в виде равенства нулю дифференциала:

$$d(g_{ik} A^i B^k) = 0. \tag{5}$$

Если же потребовать симметричность коэффициентов $\Gamma^i_{jk}$, а именно, $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ тогда связность определена, при помощи метрики, единственным образом.

Всегда ниже мы не будем требовать симметричности связности. И так если определена метрика $g_{ik}$, то на геометрический объект $\Gamma^i_{jk}$ наложены определенные связи, но еще существует некоторый произвол в выборе связности пространства, а именно необходимо задать еще тензор кручения:

$$S^i_{jk} \equiv \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}, \tag{6}$$

тогда геометрический объект $\Gamma^i_{jk}$, что порождает связность, определен однозначно.

**Теорема 1 (о построении связности при помощи метрики кручения)** *Пусть задано Риманово пространство с метрикой $g_{ik}$ и в этом пространстве задан тензор кручения $S^i_{jk}$ - кососимметрический, тогда связность пространства (геометрический объект, определяющий ее) $\Gamma^i_{jk}$ задана однозначно. Если требовать $d(g_{ik}A^iB^k) = 0$ для произвольных $A^i$ и $B^k$.*

*Доказательство* Показать истинность этого утверждения само по себе довольно просто, для дальнейшего более важно те обозначения и значения, что касаются природы введенных величин.

Для произвольных $A^i$ и $B^k$, перепишем равенство $d(g_{ik}A^iB^k) = 0$, в следующем виде $(g_{ik,l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl})\, A^iB^kdx^l = 0$, в силу того, что $dA^i = -\Gamma^i_{pl}A^pdx^l$, где $\Gamma^m_{il}$ - коэффициенты искомой связности – геометрический объект; $dx^l$ - дифференциалы координат точки при бесконечно малом смещении пути; $g_{ik,l} \equiv \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ik}$.

Так как $A^i$, $B^k$, $dx^l$ - произвольны, то равенства должны представлять собой тождества относительно $A^i$, $B^k$, $dx^l$. Круговой подстановкой получаем систему равенств:

$$g_{ik,l} = g_{mk}\Gamma^m_{il} + g_{im}\Gamma^m_{kl}$$

$$g_{li,k} = g_{mi}\Gamma^m_{lk} + g_{lm}\Gamma^m_{ik}$$

$$g_{kl,i} = g_{ml}\Gamma^m_{ki} + g_{km}\Gamma^m_{li}.$$

Поскольку техника аналогична классической, дальше мы приводим формулы без обоснований:

$$g_{ik,l} + g_{li,k} - g_{kl,i} = g_{mk}S^m_{il} + g_{ml}S^m_{ik} + g_{im}\Gamma^m_{kl} + g_{mi}\Gamma^m_{lk}, \text{ где}$$

$$S^m_{il} = \Gamma^m_{il} - \Gamma^m_{li}$$

- тензор кручения,

$$g_{im}\left(\varGamma^m_{kl}+\varGamma^m_{lk}\right)=g_{ik,l}+g_{li,k}-g_{kl,i}+g_{km}S^m_{li}+g_{lm}S^m_{ki},$$

$$\varGamma^p_{kl}+\varGamma^p_{lk}=g^{pi}\left(g_{ik,l}+g_{li,k}-g_{kl,i}+g_{km}S^m_{li}+g_{lm}S^m_{ki}\right),$$

и дополняя очевидным равенством – определением $\varGamma^p_{kl}-\varGamma^p_{lk}=S^p_{kl}$, получаем:

$$\varGamma^p_{kl}=\frac{1}{2}g^{pi}\left(g_{ik,l}+g_{li,k}-g_{kl,i}+g_{km}S^m_{li}+g_{lm}S^m_{ki}\right)+\frac{1}{2}S^p_{kl}. \tag{7}$$

Вводя обозначения и анализируя последнюю формулу видим, что

$$\mathrm{P}^p_{kl}=\frac{1}{2}g^{pi}\left(g_{ik,l}+g_{li,k}-g_{kl,i}\right) \tag{8}$$

есть геометрический объект.

$$L^p_{kl}\equiv\frac{1}{2}S^p_{kl}+\frac{1}{2}g^{pi}\left(g_{km}S^m_{li}+g_{lm}S^m_{ki}\right) \tag{9}$$

составляет тензор.

И так, геометрический объект $\varGamma^p_{kl}$ порождающий связность пространства полностью определяется тензорами $g_{ik}$ и $S^m_{ik}$ - имеет вид суммы геометрического объекта $\mathrm{P}^p_{kl}$ составленного из производных метрического тензора $g_{ik}$ и тензора $L^p_{kl}$, составленного как из $g_{ik}$ так и из тензора $S^m_{kl}$, а именно:

$$\varGamma^p_{kl}=\mathrm{P}^p_{kl}+L^p_{kl}. \tag{10}$$

Замечание 1. Тензор $L^p_{kl}$ представляем в виде суммы двух тензоров симметрического $\frac{1}{2}g^{pi}\left(g_{km}S^m_{li}+g_{lm}S^m_{ki}\right)$ и кососимметрического $\frac{1}{2}S^p_{kl}$.

Замечание 2. Несложно показать, что имеет место соотношение:

$$\varGamma^p_{pl}=\frac{1}{2}g_{ip,l}g^{ip}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^l},$$

где $g=\det|g_{ik}|$.

Следующим шагом построения геометрической теории есть рассмотрение параллельного переноса тензора-вектора $A^i$, который задается формулой:

$$dA^i=-\varGamma^i_{pl}A^p dx^l.$$

Коэффициенты $\varGamma^i_{pl}$ - это связность пространства.

Поскольку дальнейшие рассуждения близки к классическим , а часто и повторяют их, то изложение промежуточных результатов будет носить схематический характер.

Пусть ковариантная производная по $l$ по определению:

$$u_{i;l} \equiv u_{i,l} - \Gamma^k_{il} u_k,$$

$$u^i_{;l} \equiv u^i_{,l} + \Gamma^i_{kl} u^k,$$

тогда рассмотрим разность:

$$u_{i;l;k} - u_{i;k;l} = (u_{i,l} - \Gamma^p_{il} u_p)_{;k} - (u_{i,k} - \Gamma^p_{ik} u_p)_{;l} = u_{i,l,k} - \Gamma^p_{il,k} u_p - \Gamma^p_{il} u_{p,k} -$$

$$- \left(u_{q,l} - \Gamma^p_{ql} u_p\right) \Gamma^l_{ik} - \left(u_{i,q} - \Gamma^p_{iq} u_p\right) \Gamma^q_{lk} - u_{i,k,l} + \Gamma^p_{ik,l} u_p + \Gamma^p_{ik} u_{p,l} +$$

$$+ \left(u_{l,k} - \Gamma^p_{qk} u_p\right) \Gamma^q_{il} + \left(u_{i,q} - \Gamma^p_{iq} u_p\right) \Gamma^q_{kl} = \left(\Gamma^p_{ik,l} - \Gamma^p_{il,k}\right) u_p +$$

$$+ \left(\Gamma^p_{ql} \Gamma^q_{ik} + \Gamma^p_{iq} \Gamma^q_{lk} - \Gamma^p_{qk} \Gamma^q_{il} - \Gamma^p_{iq} \Gamma^q_{kl}\right) u_p + \left(-\Gamma^p_{lk} + \Gamma^p_{kl}\right) u_{i,p} =$$

$$= \left(\Gamma^p_{ik,l} - \Gamma^p_{il,k} + \Gamma^p_{ql} \Gamma^q_{ik} - \Gamma^p_{qk} \Gamma^q_{il}\right) u_p + \Gamma^p_{iq} S^q_{lk} u_p - S^q_{lk} u_{i,q} =$$

$$= R^p_{kli} u_p + S^q_{kl} u_{i;q},$$

а именно

$$u_{i;l;R} - u_{i;k;l} = R^p_{kli} u_p + S^q_{kl} u_{i;q} \tag{11}$$

где

$$R^p_{kli} \equiv \Gamma^p_{ik,l} - \Gamma^p_{il,k} + \Gamma^p_{ql} \Gamma^q_{ik} - \Gamma^p_{qk} \Gamma^q_{il}. \tag{12}$$

$R^p_{kli}$ - тензор кривизны, $S^q_{kl} = \Gamma^q_{kl} - \Gamma^q_{lk}$ - тензор.

Аналогично,получаем равенства:

$$u^i_{;l;k} - u^i_{;k;l} = \left(u^i_{,l} + \Gamma^i_{pl} u^p\right)_{;k} - \left(u^i_{,k} + \Gamma^i_{pk} u^p\right)_{;l} =$$

$$= u^i_{,l,k} + \Gamma^i_{pl,k} u^p + \Gamma^i_{pl,k} u^p_{,k} - \left(u^i_{,q} + \Gamma^i_{pq} u^p\right) \Gamma^q_{lk} + \left(u^q_{,l} + \Gamma^q_{pl} u^p\right) \Gamma^i_{qk} -$$

$$- u^i_{,k,l} - \Gamma^i_{pk,l} u^p - \Gamma^i_{pk} u^p_{,l} + \left(u^i_{,q} + \Gamma^i_{pq} u^p\right) \Gamma^q_{kl} - \left(u^q_{,k} + \Gamma^q_{pk} u^p\right) \Gamma^i_{ql} =$$

$$= \left(\Gamma^i_{pl,k} - \Gamma^i_{pk,l} - \Gamma^i_{pq} \Gamma^q_{lk} + \Gamma^q_{pl} \Gamma^i_{qk} + \Gamma^i_{pq} \Gamma^q_{kl} - \Gamma^q_{pk} \Gamma^i_{ql}\right) u^p + S^q_{kl} u^i_{,q} =$$

$$= - \left(\Gamma^i_{pk,l} - \Gamma^i_{pl,k} + \Gamma^i_{ql} \Gamma^q_{pk} - \Gamma^i_{qk} \Gamma^q_{pl}\right) u^p + S^q_{kl} \Gamma^i_{pq} u^p + S^q_{kl} u^i_{,q} =$$

$$= -R^i_{klp} u^p + S^q_{kl} u^i_{;q},$$

окончательно:

$$u^i_{;l;k} - u^i_{;k;l} = -R^i_{klp} + S^q_{kl} u^i_{;q} \tag{13}$$

Замечание 3. В математике, как правило, идут немного другим путем, а именно, сначала определяют абсолютный дифференциал $DA^i$ с помощью формулы

$$DA^i \equiv\sim dA^i + \Gamma^i_{jk} A^j dx^k = \left(A^i_{,k} + \Gamma^i_{jk} A^j\right) dx^k, \tag{14}$$

Абсолютной производной считают коэффициент при $dx^k$, все полученные результаты при таком подходе к построению анализа тождественны приведенным выше. Тогда более наглядно следующее утверждение: для того чтобы пространство обладало абсолютным параллелизмом, необходимо и достаточно тождественное обращение в нуль тензора кривизны (напомним, что пространство называется пространством с абсолютным параллелизмом, если результат параллельного перенесения произвольного тензора – вектора не зависит от выбора пути для любых точек пространства). Доказательство этой теоремы общеизвестно, заметим лишь, что оно следует из формулы:

$$\tilde{D}DA^i - D\tilde{D}A^i = -R^i_{klp}A^p\tilde{d}x^k dx^l, \tag{15}$$

которую мы могли бы получить, сворачивая (13) с $\tilde{d}x^k dx^l$.

Все построения, изложенные выше, носят общий характер никак не специфицируясь к заданию пространства, дальше мы исследуем структуру тензора $R^p_{ikl}$. И так, по определению из (12):

$$R^p_{ikl} = \Gamma^p_{li,k} - \Gamma^p_{lk,i} + \Gamma^p_{qk}\Gamma^q_{li} - \Gamma^p_{qi}\Gamma^q_{lk},$$

используя (10) получаем :

$$R^p_{ikl} = \mathrm{P}^p_{li,k} + L^p_{li,k} - \mathrm{P}^p_{lk,i} + L^p_{lk,i} + \left(\mathrm{P}^p_{qk} + L^p_{qk}\right)(\mathrm{P}^p_{li} + L^q_{li}) -$$
$$-\left(\mathrm{P}^p_{qi} + L^p_{qi}\right)(\mathrm{P}^p_{lk} + L^q_{lk}) = \mathrm{P}^p_{li,k} - \mathrm{P}^p_{lk,i} + \mathrm{P}^p_{qk}\mathrm{P}^q_{li} - \mathrm{P}^p_{qi}\mathrm{P}^q_{lk} +$$
$$+L^p_{li,k} - L^p_{lk,i} + \mathrm{P}^p_{qk}L^q_{li} + \mathrm{P}^q_{li}L^p_{qk} - \mathrm{P}^p_{qi}L^q_{lk} - \mathrm{P}^q_{lk}L^p_{qi} +$$
$$+L^p_{qk}L^q_{li} - L^p_{qi}L^q_{lk}.$$

Перед тем, как сделать следующий шаг проанализируем результаты, для этого введем обозначения:

$$\mathrm{P}^p_{ikl} \equiv \mathrm{P}^p_{li,k} - \mathrm{P}^p_{lk,i} + \mathrm{P}^p_{qk}\mathrm{P}^q_{li} + \mathrm{P}^p_{qi}\mathrm{P}^q_{lk} - \tag{16}$$

- тензор подобный тензору кривизны Римана, составленный из метрического тензора и его производных.

Далее обозначаем:

$$Z^p_{ikl} \equiv L^p_{qk}L^q_{li} - L^p_{qi}L^q_{lk} \tag{17}$$

- тензор,

$$\mathrm{T}^p_{ikl} \equiv L^p_{li,k} - L^p_{lk,i} + \mathrm{P}^p_{qk}L^q_{li} + \mathrm{P}^q_{li}L^p_{qk} - \mathrm{P}^p_{qi}L^q_{lk} - \mathrm{P}^q_{lk}L^p_{qi} \tag{18}$$

- тензор.

Последнее утверждение очевидно, если принять во внимание тензорный характер величин $R^p_{ikl}$, но интересно получить этот важный результат другим путем, а именно:

$$\mathrm{T}^p_{ikl} = L^p_{li;k} - L^p_{lk;i} - L^q_{li}\Gamma^p_{qk} + L^p_{qi}\Gamma^q_{lk} + L^p_{lq}\Gamma^q_{ik} + L^q_{lk}\Gamma^p_{qi} - L^p_{qk}\Gamma^q_{li} - L^p_{lq}\Gamma^q_{ki} +$$

$$+\mathrm{P}^p_{qk}L^q_{li} + \mathrm{P}^q_{li}L^p_{qk} - \mathrm{P}^p_{qi}L^q_{lk} - \mathrm{P}^q_{lk}L^p_{qi} =$$

$$L^p_{li;k} - L^p_{lk;i} - L^q_{li}L^p_{qk} + L^p_{qi}L^q_{lk} + L^q_{lk}L^p_{qi} - L^p_{qk}L^q_{li} + L^p_{lq}S^q_{ik},$$

а это очевидно тензор, так как абсолютные производные имеют тензорный характер.

Обозначая:

$$\mathrm{M}^p_{ikl} \equiv \mathrm{T}^p_{ikl} + Z^p_{ikl}, \tag{19}$$

получаем:

$$\mathrm{M}^p_{ikl} = L^p_{li;k} - L^p_{lk;i} + L^p_{lq}S^q_{ik} + L^p_{qi}L^q_{lk} - L^p_{qk}L^q_{li}, \tag{20}$$

у новых обозначениях:

$$R^p_{ikl} = \mathrm{P}^p_{ikl} + \mathrm{M}^p_{ikl} \tag{21}$$

Из (21) видно, что тензор кривизны, в общем, случаи может быть представлен в виде суммы двух тензоров (такое представление не случайно оно связано с физическим описанием поля, грубо говоря, в случае отсутствия не гравитационных полей тензор $\mathrm{M}^p_{ikl}$ равен нулю). Хотя формула (20) и дает качественное представление о геометрической структуре она мало удобна, так как в нее снова входят величины $\Gamma^i_{jk}$.

Далее установим тождество аналогичное тождеству Риччи-Якоби:

$$R^p_{ikl} + R^p_{kli} + R^p_{lik} = S^p_{ik,l} + S^p_{kl,i} + S^p_{li,k} + \Gamma^p_{qk}S^q_{li} + \Gamma^p_{qk}S^q_{ik} + \Gamma^p_{qi}S^q_{kl} =$$

$$= S^p_{ik;l} + \Gamma^q_{il}S^p_{qk} + \Gamma^q_{kl}S^p_{iq} + S^p_{kl;i} + \Gamma^q_{ki}S^p_{ql} + \Gamma^q_{li}S^p_{kq} + S^p_{li;k} + \Gamma^q_{lk}S^p_{qi} + \Gamma^q_{ik}S^p_{lq} =$$

$$= S^p_{ik;l} + S^p_{kl;i} + S^p_{li;k} + S^p_{lq}S^q_{ik} + S^p_{kq}S^q_{li} + S^p_{iq}S^q_{kl} =$$

$$= R^p_{ikl} + R^p_{kli} + R^p_{lik};$$

В классическом Римановом пространстве геодезические линии обладают известными экстремальными свойствами, в данном случаи аналогические свойства геодезических требуют дополнительных исследований (их нет).

Итак, для неизотропной геодезической линии длина дуги $s$ случай каноническим параметром, для геодезических отнесенных к $s$ имеют место дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}.$$

Рассмотрим задачу о вычислении вариации длины дуги. Пусть задана неизотропная кривая

$$x^i = x^i(t), \quad t \in [t_1; t_2].$$

Вычислим вариацию $\delta S$ длины кривой $S$:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right)}{2\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}}dt$$

$$\delta\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right) = g_{ij}\tilde{D}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} + g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\tilde{D}\frac{dx^j}{dt} = 2g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\tilde{D}\frac{dx^j}{dt}$$

$$\tilde{D}\frac{dx^j}{dt} = \delta\frac{dx^j}{dt} + \Gamma^j_{pk}\frac{dx^p}{dt}\delta x^k$$

$$D\frac{\delta x^j}{dt} = \frac{d}{dt}\delta x^j + \Gamma^j_{kp}\frac{dx^k}{dt}\delta x^p$$

$$\tilde{D}\frac{dx^j}{dt} = D\frac{\delta x^j}{dt} + S^j_{pk}\frac{dx^p}{dt}\delta x^k,$$

где через $\tilde{D}$ обозначен абсолютный дифференциал по параметру кривых семейства при постоянном значении $t$, а $D$ - абсолютный дифференциал отвечающий малому смещению $dt$ по кривой при постоянном параметре семейства, тогда

$$\delta\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right) = 2g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\left(D\frac{\delta x^j}{dt} + S^j_{pk}\frac{dx^p}{dt}\delta x^k\right),$$

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}\frac{dx^i}{ds}D\delta x^j + \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}S^j_{pk}\frac{dx^i}{ds}dx^p\delta x^k =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} D\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right) - \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}D\frac{dx^i}{ds}\delta x^j + \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}S^j_{pk}\frac{dx^i}{ds}dx^p\delta x^k,$$

если концы варьируемой кривой закреплены, тогда

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2} \left(g_{ij}S^j_{pk}\ \frac{dx^i}{dt}dx^p\delta x^k - g_{ij}D\frac{dx^i}{dt}\delta\ x^j\right),$$

если, рассматриваемая кривая имеет стационарную длину (аналитически $\delta s = 0$), тогда получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} (g_{ij}\ S^j_{pk}\frac{dx^i}{ds}dx^p\delta x^k - g_{ij}D\frac{dx^i}{ds}\delta\ x^j) = 0.$$

Использую основную лемму вариационного исчисления, отсюда следует:

$$g_{ik}S^k_{pj}\frac{dx^i}{ds}dx^p - g_{ij}D\frac{dx^i}{ds} = 0.$$

Это равенство означает, что касательный вектор $\xi^q$ к нашей кривой переносится по закону $D\xi^q g^{jq} g_{ik} S^k_{pj} \xi^i dx^p$, то есть кривая $s$ не есть геодезической. Обратно, вариация длины геодезической линии с концами, равна:

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2} g_{ij} S^j_{pk} \frac{dx^i}{dt} dx^p \delta x^k$$

.

Свойства геодезических в новой геометрии задаваемой с помощью двух тензоров $g_{ik}$ и $S^j_{ik}$ существенно отличаются от аналогичных свойств в геометрии Римана. Доказана теорема.

**Теорема 2 (критерий геодезичности)** *Для того чтобы не изотропная линия в пространстве заданном при помощи $g_{ik}$ и $S^j_{ik}$ была геодезической, необходимо и достаточно чтобы она имела вариацию дуги $\delta s$ равную $\int_{t_1}^{t_2} g_{ij} S^j_{pk} \frac{dx^i}{dt} dx^p \delta x^k$.*

**Замечание 1** *В случае пространства с аффинной связностью известно, что существует нарушение замкнутости при переходе от оригинала к изображению и, наоборот, в случаи бесконечно малых контуров определяется (с точностью 2 – го порядка относительно $\tau$). Если задан тензором кручения $S^k_{ij}$ в соответствующей точке, тогда если этот зазор обозначить через $\Psi^k$, то $\Psi^k = S^k_{ij} A^i B^j \tau^2$, где параллелограмм $A^i \tau$ и $B^j \tau$ стягивается в точку при $\tau \to 0$. В данном случаи можно не просто утверждать, что такой зазор существует, а подсчитать его квадрат длины (поскольку существует метрика):*

$$|\Psi|^2 = g_{pq} S^p_{ij} A^i B^j S^q_{kl} A^k B^l \tau^4.$$

## Заключение

В работе исследуются свойства пространств аффинной связностью при наличии метрического тензора. Получены разложение связности в виде суму геометрического объекта и некоторого тензора, что позволило исследовать природу тензора кривизны, установить аналоги тождества Риччи – Якоби и рассмотреть построение геодезических линий.

Дальнейшее исследования возможны в направлении построение теории гиперплоскостей, гиперповерхностей и рассмотрения вложенных объектов низших размерностей.

## Список литературы


1. Agricola I. Connections on naturally reductive spaces, their Dirac operator and homogeneous models in string theory / I. Agricola // Communications in Mathematical Physics. – 2003. – V. 232. – P.535–563.
2. Agricola I. On the holonomy of connections with skew - symmetric torsion / I. Agricola, T.Friedrich // Mathematische Annalen. – 2004. – V. 328. – P.711–748.
3. Agricola I. A note on flat metric connections with antisymmetric torsion / I. Agricola, T. Friedrich // Differential Geometry and its Applications. – 2010. – V. 28. – P.480–487.
4. Alexandrov B. Vanishing theorems on Hermitian manifolds / B.Alexandrov, S.Ivanov // Differential Geometry and Applications. – 2001. V. 14(3). – P.251–265.
5. Bonneau G. Compact Einstein-Weyl four-dimensional manifolds / G. Bonneau // Classical and Quantum Gravity. – 1999. – V. 16. – P.1057–1068.
6. Cartan E. On Riemannian geometries admitting an absolute parallelism / E. Cartan, J. Schouten // Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Proceedings. Series A. – 1926. – V.29. – P.933–946.
7. Cartan E. On the geometry of the group manifold of simple and semisimple groups / E. Cartan, J. Schouten // Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Proceedings. Series A. – 1926. – V. 29. – P.803–815.
8. Cavalcanti G. Reduction of metric structures on Courant algebroids / G. Cavalcanti // Journal of Symplectic Geometry. – 2006. – V.4 (3). – P.317–343.
9. Jost J. Geometry and Geometric Analysis / J. Jost // Springer-Verlag, Berlin, 4th edition. – 2005.
10. Pedersen H. Riemannian submersions, four-manifolds and Einstein-Weyl geometry / H. Pedersen, A. Swann // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1993. – V. 66. – P.381–399.
11. Sean Dineen. Multivariate calculus and geometry. 3rd ed. Springer Undergraduate Mathematics Series. Berlin. – 2014.– Springer (ISBN 978-1-4471-6418-0/pbk; 978-1-4471-6419-7/ebook). xi, 259 p.
12. Vargas Josй G. Differential geometry for physicists and mathematicians. Moving frames and differential forms: From Euclid past Riemann (to appear). – 2014. – Zbl 06272954 Hackensack, NJ: World Scientific (ISBN 978-981-4566-39-1/ hbk; 978-981-4566-41-4/ebook).
13. Bredies Kristian. Symmetric tensor fields of bounded deformation. – 2013. – Zbl 06226689 Ann. Mat. Pura Appl. (4) 192, N. 5. - P.815-851.
14. Dereli T. An Einstein-Hilbert action for axi-dilaton gravity in four dimensions / T. Dereli, Tucker W. Robin // Class. Quantum Grav. – 1995. – 12 L31.
15. Alberto S. A geometrical action for dilaton gravity / S. Alberto // 1995 Class. Quantum Grav. 12 L85.
16. Manoff S. Frames of reference in spaces with affine connections and metrics / S. Manoff // 2001 Class. Quantum Grav. 18 1111.



**Н.И. Яременко**

ММЦ НАНУ

Киев, Украина

E-mail: math.kiev@gmail.com,tga_56@mail.ru

**N.I. Yaremenko**

Kyiv MMC NANU, Ukraine.

**Geometric structure together generated by metric and torsion**

This article discusses the geometry generated jointly and agreed by the metric tensor and the torsion tensor. The properties of the space described by means of the metric and torsion. The study of the curvature tensor has been made. Ricci – Jacobi identity analogs have been obtained. We have also researched the geodesic lines equation.
Metric tensor, torsion tensor, curvature tensor, Ricci – Jacobi identity, geodesic lines equation.