Q-алгебры основных типов почти эрмитовых и почти контактных метрических многообразий

О. Е. Арсеньева В. Ф. Кириченко

Аннотация Роботу присвячено дослідженню узагальнених майже ермітових многовидів з приєднаними Q-алгебрами, зокрема з абелевими, K- та A-алгебрами. Досліджено зв'язок між геометричним класом многовиду та приєднаної до нього Q-алгебри. Також вивчаються Q-алгебри на майже контактних многовидах.

Ключевые слова Узагальнений майже ермітовий многовид · Q-алгебры · майже контактні многовиди

УДК 514.7

1 Вступление

Понятия обобщенного почти эрмитова (короче, $GA\mathcal{H}$-) многообразия и присоединенной к нему Q-алгебры сформировались в 80-е годы минувшего столетия и изучались в ряде работ (см., например, [1] — [5]). Теория $GA\mathcal{H}$-структур представляет интерес потому, что позволяет с единых позиций взглянуть на такие, на первый взгляд, различные предметы, как, например, эрмитова и контактная геометрии.

Напомним определения $GA\mathcal{H}$-многообразия и присоединенной Q-алгебры [4].

Определение 1 *Обобщенной почти эрмитовой структурой ранга r на гладком (класса C^∞) многообразии M называется совокупность* $\{g =$

$\langle\cdot,\cdot\rangle; J_1,\ldots,J_r; T\}$, где g – псевдориманова метрика на M, $J_1,\ldots,J_r$ – линейно независимые в каждой точке многообразия тензоры типа $(1,1)$ на M, называемые структурными эндоморфизмами, или структурными аффинорами, имеющие вещественные или чисто мнимые собственные значения, определенные в каждой точке многообразия с точностью до ненулевого числового множителя и являющиеся вместе со своими квадратами и тождественным эндоморфизмом образующими некоторого подмодуля $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}(J_1,\ldots,J_r)\subset\mathfrak{X}(M)$, являющегося подалгеброй алгебры всех эндоморфизмов касательного пучка многообразия, T – тензор типа $(2,1)$ на M, называемый композиционным тензором. При этом должны выполняться условия:

1. $\langle J_kX,Y\rangle+\langle X,J_kY\rangle=0$;
2. $T(J_kX,Y)=T(X,J_kY)=-J_kT(X,Y)$;
3. $\langle T(X,Y),Z\rangle+\langle Y,T(X,Z)\rangle=0$;
4. $\cap_{k=1}^r\ \mathit{ker}\ J_k\subset\ \mathit{ker}\ T$;
5. $J_i\circ J_j=J_j\circ J_i;\quad (i,j,k=1,\ldots,r)$.

Многообразие, на котором фиксирована $GA\mathcal{H}$-структура ранга r, называется $GA\mathcal{H}$-многообразием ранга r. Если $\mathfrak{M}=\cap_{i=1}^r\ker J_i$ – k-мерное распределение, число k называется дефектом $GA\mathcal{H}$-структуры и обозначается символом $\mathfrak{d}$.

2 Q-алгебры, присоединенные к $GA\mathcal{H}$-многообразиям

Пусть M – $GA\mathcal{H}$-многообразие. В $C^\infty(M)$-модуле $\mathfrak{X}(M)$ гладких векторных полей многообразия M вводится бинарная операция "*" по формуле

$$X*Y=T(X,Y);\qquad X,Y\in\mathfrak{X}(M).$$

Из Определения 1 легко следует, что

$$1.\ J_kX*Y=X*J_kY=-J_k(X*Y);\quad 2.\ \langle X*Y,Z\rangle+\langle Y,X*Z\rangle=0.$$

Таким образом, в модуле $\mathfrak{X}(M)$ возникает алгебраическая структура, называемая Q-алгеброй, присоединенной к $GA\mathcal{H}$-многообразию M, а также связность $\tilde\nabla=\nabla+T$, называемая *присоединенной связностью.* Кроме того, на многообразии M канонически определены r дифференциальных 2-форм

$$\Omega_i(X,Y)=\langle X,J_iY\rangle;\qquad i=1\ldots r,$$

. называемых фундаментальными формами структуры. Важнейшие примеры $GA\mathcal{H}$-структур на многообразии дает понятие метрической f-структуры Яно, т.е. пары $(f, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, где f – эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – (псевдо)риманова метрика на M, причем

$$1.\ f^3 + f = 0; \qquad 2.\ \langle fX, Y\rangle + \langle X, fY\rangle = 0; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Такая пара канонически порождает $GA\mathcal{H}$-структуру $\mathcal{S} = (g, J, T)$ ранга 1 на M, где

$$g = \langle\cdot,\cdot\rangle; \quad J = f; \quad T(X,Y) = \frac{1}{4}(f\nabla_{fX}(f)fY - f\nabla_{f^2X}(f)f^2Y), \qquad (1)$$

или, (что равносильно): $T(X,Y) - T(Y,X) = -f^2N_f(f^2X, f^2Y)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, где $N_f(X,Y) = \frac{1}{4}(f^2[X,Y] - f[fX,Y] - f[X,fY] + [fX,fY])$ – тензор Нейенхейса эндоморфизма f. В случае $\mathfrak{d} = 0$ $GA\mathcal{H}$-структура $\mathcal{S}$ отождествляется с почти эрмитовой структурой $(\langle\cdot,\cdot\rangle, J)$, а в случае $\mathfrak{d} = 1$ – с почти контактной метрической структурой $(\xi, \eta, f, \langle\cdot,\cdot\rangle,)$, где ξ – единичный вектор подпространства $\mathfrak{M} = \ker f$, η – ковектор, дуальный вектору ξ (см. [4])

Определение 2 *Q-алгебра V называется:*

– *абелевой, или коммутативной Q-алгеброй, если $X * Y = 0 \quad (X, Y \in V)$;*
– *K-алгеброй, или антикоммутативной Q-алгеброй, если $X * Y = -Y * X \quad (X, Y \in V)$;*
– *A-алгеброй, или псевдокоммутативной Q-алгеброй, если*

$$\langle X * Y, Z\rangle + \langle Y * Z, X\rangle + \langle Z * X, Y\rangle = 0, \quad (X, Y, Z \in V).$$

Почти эрмитова структура (g, J); $J^2 = -\mathrm{id}$; $g(X,Y) = g(JX, JY)$ называется:

– эрмитовой, или интегрируемой, если $\nabla_X(f)Y - \nabla_{fX}(f)(fY) = 0$;
– G_1-структурой, если $\nabla_X(f)X - \nabla_{fX}(f)(fX) = 0$;
– G_2-структурой, если $\mathfrak{S}_{XYZ}(\langle Y, \nabla_X(f)Z\rangle - \langle Y, \nabla_{fX}(f)fZ\rangle) = 0$.

Теорема 1 *Класс $GA\mathcal{H}$-многообразий ранга 1 дефекта 0 с абелевой присоединенной Q-алгеброй совпадает с классом эрмитовых многообразий.*

Доказательство Пусть M – $GA\mathcal{H}$-многообразие указанного вида. Тогда, в прежних обозначениях, с учетом (1) имеем:

$$0 = T(X,Y) = \frac{1}{4}(f\nabla_{fX}(f)fY - f\nabla_{f^2X}(f)f^2Y),$$

С учетом невырожденности эндоморфизма f имеем отсюда:$\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y = 0$. Меняя здесь fX на X, а fY на Y, получаем, что

$$\nabla_X(f)Y - \nabla_{fX}(f)(fY) = 0, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

а значит, M – эрмитово многообразие. Проводя выкладки в обратном порядке, убеждаемся, что если M – эрмитово многообразие, то Q-алгебра индуцированной на M $GA\mathcal{H}$-структуры абелева.

Аналогично доказываются следующие две теоремы:

Теорема 2 *Класс $GA\mathcal{H}$-многообразий ранга 1 дефекта 0 с присоединенной K-алгеброй совпадает с классом G_1-многообразий.*

Доказательство Дословно повторяет доказательство предыдущей теоремы, если в нем положить $Y = X$.

Теорема 3 *Класс $GA\mathcal{H}$-многообразий ранга 1 дефекта 0 с присоединенной A-алгеброй совпадает с классом G_2-многообразий.*

Доказательство Пусть M – G_2-многообразие. Тогда $\mathfrak{S}_{XYZ}(\langle Y, \nabla_X(f)Z\rangle - \langle Y, \nabla_{fX}(f)fZ\rangle) = 0$. Заменив X на fX, Y на fY, а Z на fZ, после простых преобразований получим: $\mathfrak{S}_{XYZ}(\langle Y, T(X, Z)\rangle = 0$. Следовательно, присоединенная Q-алгебра псевдокоммутативна.Очевидно, верно и обратное.

Почти эрмитова структура $(f, g = \langle\,\cdot, \cdot\,\rangle)$ называется:

– квази-келеровой, если $\nabla_X(f)Y + \nabla_{fX}(f)fY = 0$;
– приближенно келеровой, если $\nabla_X(f)Y = -\nabla_Y(f)X = 0$;
– почти келеровой, если $d\Omega = 0$;
– келеровой, если $\nabla f = 0$; $\qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Теорема 4 *Квази-келерово многообразие имеет абелеву присоединенную Q-алгебру тогда и только тогда, когда оно является келеровым многообразием.*

Квази-келерово многообразие имеет антикоммутативную присоединенную Q-алгебру тогда и только тогда, когда оно является приближенно келеровым многообразием.

Квази-келерово многообразие имеет псевдокоммутативную присоединенную Q-алгебру тогда и только тогда, когда оно является почти келеровым многообразием.

Доказательство Пусть M – квази-келерово многообразие. Согласно его определению,
$$\nabla_X(f)Y = -\nabla_{fX}(f)fY = \nabla_{f^2X}(f)f^2Y.$$
Поэтому
$$(4T(X,Y) = f(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y) = -2f\nabla_X(f)Y,$$
и, значит,
$$T(X,Y) = -\frac{1}{2}f\nabla_X(f)Y. \qquad (2)$$
В частности, $T(X,Y)=0 \Leftrightarrow \nabla_X(f)Y=0; \quad X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, что и доказывает первое утверждение.

Далее, хорошо известно, что классы приближенно келеровых и почти келеровых многообразий являются подклассами класса квази-келеровых многообразий (см., например, [9]), а значит, на этих многообразиях выполняется тождество (2), откуда сразу же следует второе утверждение теоремы.

Наконец, если $d\Omega = 0$, то по Теореме 9 присоединенная Q-алгебра псевдокоммутативна. Проделывая выкладки в обратном направлении, убеждаемся в справедливости обратного.

3 Q-алгебры и почти контактные структуры

Перейдем к рассмотрению основной цели нашего исследования – изучению Q-алгебр, присоединенных к $GA\mathcal{H}$-многообразиям ранга 1 дефекта 1, порожденным почти контактными метрическими структурами.

Определение 3 *Почти контактной метрической структурой на многообразии M называется четверка $(\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$, где ξ – векторное поле на M, называемое характеристическим, η – дифференциальная 1-форма на M, называемая контактной формой, Φ – эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$, называемый структурным эндоморфизмом, g – риманова метрика на M. При этом:*
$$1.\ \eta(\xi) = 1; \quad 2.\ \eta \circ \Phi = 0; \quad 3.\ \Phi(\xi) = 0;$$
$$4.\ \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi; \quad 5.\ \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y). \qquad (3)$$
Существует в известном смысле полная классификация $\mathcal{AC}$-структур, содержащая 2048 классов этих структур. Эта классификация является контактным аналогом известной классификации Грея – Хервеллы почти эрмитовых структур, и содержащей всего 16 структур [9]. Но, несмотря на практическую необозримость классификации $\mathcal{AC}$-структур, фактическому изучению подвергаются в основном следующие 12 классов $\mathcal{AC}$-структур:

1. нормальная, если $N + \frac{1}{2} d\eta \otimes \xi = 0$;
2. контактная метрическая, если $d\eta = \Omega$;
3. K-контактная, если $(d\eta = \Omega)$ & (η – форма Киллинга);
4. квази-сасакиева, если она нормальна и имеет замкнутую форму Ω;
5. локально конформно квази-сасакиева;
6. сасакиева, если она нормальна и контактна, или, что равносильно, если $\nabla_X(f)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$;
7. приближенно сасакиева, $\nabla_X(f)X = g(X,X))\xi - \eta(X)X$;
8. структура Кенмоцу, если $\nabla_X(f)Y = g(fX,Y)\xi - \eta(Y)fX$;
9. косимплектическая, если $\nabla f = 0$;
10. почти косимплектическая, если $d\Omega = d\eta = 0$;
11. слабо косимплектическая, если $\nabla_X(f)X = 0$;
12. точнейше косимплектическая, если $\nabla_X(f)X = d\eta = 0$.

Определение 4 *$\mathcal{AC}$-структура, заданная на многообразии M, называется* локально конформно квази-сасакиевой *(короче, $LC\mathcal{QS}$-)* структурой, *если существуют открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ многообразия M и система $\Sigma = \{\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}\}_{\alpha\in A}$ гладких функций такие, что $\{J|_{U_\alpha}, \tilde{g}_\alpha = e^{2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\}$ – квази-сасакиева структура для любого $\alpha \in A$. Гладкое многообразие, на котором фиксирована $LC\mathcal{QS}$-структура, называется* $LC\mathcal{QS}$-многообразием.

Теорема 5 *Локально конформно квази-сасакиевы многообразия имеют абелеву присоединенную Q-алгебру и риманову присоединенную связность.*

Доказательство В [6] доказано, что для локально конформно квази-сасакиева многообразия

$$\nabla_X(f)Y = -\Omega(X,Y)\alpha^\sharp + \langle X,Y\rangle f(\alpha^\sharp) - \alpha(Y)fX + \alpha(fY)X + \\ + \langle CX,Y\rangle\xi - \eta(Y)CX,$$

где α – контактная форма Ли, $C(X) = \nabla_{fX}\xi - \alpha(\xi)fX$ – самосопряженный эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$, коммутирующий со структурным эндоморфизмом f, $\sharp$ – оператор дуальности. Подставляя это соотношение в (1), с учетом того, что $f^3 = -f$, $f^4 = -f^2$, $f^5 = f$, получим:

$$\begin{aligned} 4T(X,Y) = f\nabla_{fX}(f)fY - f\nabla_{f^2X}(f)f^2Y = \\ = -\Omega(fX,fY)f(\alpha^\sharp) + \langle fX,fY\rangle f(\alpha^\sharp) - \alpha(fY)f^2X + \alpha(f^2Y)fX \\ +\langle CfX,fY\rangle\xi - \eta(fY)CfX, +\Omega(f^2X,f^2Y)\alpha^\sharp - \langle f^2X,f^2Y\rangle f(\alpha^\sharp) \\ +\alpha(f^2Y)f^3X - \alpha(f^3Y)f^2X - \langle Cf^2X,f^2Y\rangle\xi + \eta(f^2Y)Cf^2X. \end{aligned} \tag{4}$$

Вычислим каждое слагаемое этой суммы, заметив, что слагаемые с номерами 5, 6, 11 и 12, в силу аксиом (3) почти контактной структуры, равны нулю:

1. $-\Omega(fX, fY)f(\alpha^\sharp) = -\langle f(X), f^2Y\rangle f(\alpha^\sharp) = -\langle X, fY\rangle f(\alpha^\sharp)$;
2. $\langle fX, fY\rangle f^2(\alpha^\sharp) = -\langle X, f^2Y\rangle f^2(\alpha^\sharp)$;
3. $-\alpha(fY)f^3X = \alpha(fY)fX$;
4. $\alpha(f^2Y)f^2X$;
7. $\Omega(f^2X, f^2Y)f(\alpha^\sharp) = \langle f^2X, f^3Y\rangle f(\alpha^\sharp) = \langle X, fY\rangle f(\alpha^\sharp)$;
8. $-\langle f^2X, f^2Y\rangle f^2(\alpha^\sharp) = \langle X, f^2Y\rangle f^2(\alpha^\sharp)$;
9. $\alpha(f^2Y)f^4X = -\alpha(f^2Y)f^2X$;
10. $-\alpha(f^3Y)f^3X = -\alpha(fY)fX$.

Складывая правые части этих соотношений, с учетом (4) получаем, что $T = 0$. Следовательно, присоединенная Q-алгебра – абелева, а присоединенная связность – риманова.

Поскольку класс квази-сасакиевых многообразий содержит класс сасакиевых и класс косимплектических многообразий и, в свою очередь, является подклассом класса $LC\mathcal{QS}$-многообразий, а, кроме того, в этот же класс $LC\mathcal{QS}$-многообразий входит класс многообразий Кенмоцу [8], справедливо

Следствие 1 *Квази-сасакиевы, в частности, сасакиевы и косимплектические многообразия, а также многообразия Кенмоцу, имеют абелеву присоединенную Q-алгебру и риманову присоединенную связность.*

Теорема 6 *Нормальная $\mathcal{AC}$-структура имеет абелеву присоединенную Q-алгебру и риманову присоединенную связность.*

Доказательство В [7] доказано, что $\mathcal{AC}$-структура (ξ, η, f, g) нормальна тогда и только тогда, когда

$$\nabla_X(f)(fY) - \nabla_{fX}(f)(f^2Y) = 0.$$

Заменяя здесь X на fX и действуя на обе части полученного тождества оператором f, с учетом (1) получаем, что $T = 0$.

Замечание 1 *Абелевость присоединенной Q-алгебры четырех типов $\mathcal{AC}$-структур, отмеченная в Следствии 1 и вытекающая из Теоремы 5, в равной мере вытекает и из Теоремы 6.*

Замечание 2 *Из пяти аксиом, определяющих $GA\mathcal{H}$-многообразие, в случае абелевости присоединенной Q-алгебры, для $GA\mathcal{H}$-многообразия ранга 1 дефекта 1 остается одна:*

$$\langle fX, Y\rangle + \langle X, fY\rangle = 0.$$

Таким образом, $GA\mathcal{H}$-геометрия каждого из шести рассмотренных классов AC-многообразий совпадает с геометрией риманова многообразия M^{2n+1}, оснащенного дифференциальной 2-формой Ω ранга $2n$.

Теорема 7 *Слабо косимплектическая, в частности, точнейше косимплектическая AC-структура имеет антикоммутативную присоединенную Q-алгебру.*

Доказательство По определению, AC-структура слабо косимплектична тогда и только тогда, когда

$$\nabla_X(f)X = 0; \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

С учетом этого, $4T(X,X) = f(\nabla_{fX}(f)fX) - f(\nabla_{f^2X}(f)f^2X) = 0$. Поляризуя это тождество, получим, что

$$T(X,Y) + T(Y,X) = 0; \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Теорема 8 *Приближенно сасакиева структура имеет антикоммутативную присоединенную Q-алгебру.*

Доказательство По определению, AC-структура приближенно сасакиева тогда и только тогда, когда

$$\nabla_X(f)X = g(X,X)\xi - \eta(X)X; \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

С учетом этого,

$$\begin{aligned} 4T(X,X) &= f(\nabla_{fX}(f)fX) - f(\nabla_{f^2X}(f)f^2X) = \\ &= g(fX,fX)f(\xi) - \eta(fX)fX - g(f^2X,f^2X)f(\xi) + \eta(f^2X)f^2X = 0. \end{aligned}$$

Поляризуя это тождество, получим, что

$$T(X,Y) + T(Y,X) = 0; \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Теорема 9 *$GA\mathcal{H}$-многообразие ранга 1 дефекта (0 либо 1) с замкнутой фундаментальной формой имеет псевдокоммутативную присоединенную Q-алгебру.*

Доказательство Напомним, что $\Omega(X,Y) = \langle X, fY\rangle$, а значит,

$$\nabla_X(\Omega)(Y,Z) = \langle Y, \nabla_X(f)Z\rangle.$$

С учетом этого находим: $d\Omega(X,Y,Z) = \mathfrak{S}_{XYZ}\nabla_X(\Omega)(Y,Z) = \mathfrak{S}_{XYZ}\langle Y, \nabla_X(f)Z\rangle$. Пусть $d\Omega = 0$. Тогда $\mathfrak{S}_{XYZ}\langle Y, \nabla_X(f)Z\rangle = 0$. Подставим вместо $\{X,Y,Z\}$ сначала $\{fX, fY, fZ\}$, а потом $\{f^2X, fY, f^2Z\}$. Вычитая второй результат из первого, получим, что

$$\mathfrak{S}_{XYZ}(\langle fY, \nabla_{fX}(f)fZ\rangle - \langle fY, \nabla_{f^2X}(f)f^2Z\rangle) = 0,$$

или

$$\mathfrak{S}_{XYZ}(\langle Y, f(\nabla_{fX}(f)fZ - \nabla_{f^2X}(f)f^2Z\rangle) = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{S}_{XYZ}(\langle Y, T(X,Z)\rangle) = 0$, т.е.

$$\langle T(X,Y), Z\rangle + \langle T(Y,Z), X\rangle + \langle T(Z,X), Y\rangle = 0.$$

С учетом этой теоремы и перечня на стр. 39 получаем

Следствие 2 *Следующие АС-многообразия имеют псевдокоммутативную присоединенную Q-алгебру:*

- *Контактные метрические,*
- *К-конактные,*
- *Почти косимплектичекие.*

Список литературы

1. Кириченко В.Ф. Об однородных римановых пространствах с инвариантной тензорной структурой // Докл. АН СССР, т. 252, No 2, 1980, с.291-293.
2. Кириченко В.Ф. Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры // Изв. АН СССР. Сер. матем., т. 47, No 6, 1983, с. 1208 - 1223.
3. Кириченко В.Ф. Аксиома Ф-голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии // Изв. АН СССР. Сер. матем., т. 48, No 4, 1984, с. 711-734.
4. Кириченко В.Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники ВИНИТИ СССР. Проблемы геометрии. Т. 18. 1986. С. 25-71.
5. Kiritchenko V.F. Sur le geometrie des varietes approximativement cosimplectiques // C.R. Acad.Sci., Paris, t.295, No 1, p. 673-676.
6. Кириченко В.Ф., Баклашова Н.С.Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты // Матем. заметки, т. 82, No 3, с. 347-365.
7. Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Матем. сб., т.8, No 193, 2002, с. 1173-1201.
8. Кириченко В.Ф. О геометрии мноогобразий Кенмоцу // Докл. РАН, т.380, No 5, 2001, с. 585-587.
9. Gray A., Hervella L. The sixteen classes of Almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Math. pure ed appl., v.123, No 4, 1980, p. 35-58.

О. Е. Арсеньева
Московский Педагогический Государственный университет, Москва,Россия.
E-mail: highgeom@yandex.ru

В. Ф. Кириченко
Московский Педагогический Государственный университет, Москва,Россия.
E-mail: highgeom@yandex.ru

Olga Arsenyeva & Vadim Kirichenko

Conformal Kahler spaces and conformal transformations preserving the stress-energy tensor

This paper is devoted to so called Generalized Almost Hermitian ($GA\mathcal{H}$-) manifolds with adjoint Q-algebras. We consider links between manifold's geometric class and adjoint Q-algebra. Particularly, we also explore Almost Contact ($A\mathcal{C}$-) manifolds with adjoint Q-algebras.