Топологія сім'ї векторних полів на поверхні

О.О. Пришляк, І.М. Іванюк

Анотація Досліджуються топологічні властивості сім'ї векторних полів загального положення на поверхнях використовуючи поняття атомів та молекул функції за А.Т.Фоменко, описано всі можливі переходи для атомів, складність яких не перевищує 3

Ключові слова Атоми та молекули функцій Морса · деформація векторного поля · f-граф · топологічна еквівалентність · топологічна класифікація

УДК 517.91

Вступ

В роботі досліджуються топологічні властивості сім'ї векторних полів. Поле на поверхні у загальному випадку є полем Морса-Смейла. Для задання цього поля використовуються атоми, уведені А.Т. Фоменком для функцій Морса. Виявляється, що вони є також повним топологічним інваріантом векторного поля Морса-Смейла без замкнених траєкторій на замкненій поверхні [1]. Різні застосування атомів і молекул містяться також у робтах А.В.Болсінова, С.В.Матвєєва, А.Т.Фоменка [2], В.В. Шарка та А.А.Ошемкова[3].

Основною метою роботи є дослідити топологічні властивості сім'ї векторних полів Морса-Смейла за допомогою атомів і молекул; показати, що деформації поля відповідають переходи між f-атомами за допомогою додавання та скорочення ручок; описати всі можливі переходи для атомів, складність яких не перевищує 3.

1 Атоми та f-графи за Фоменком

Означення 1 Атомом *називається окіл P^2 критичного шару, який задається нерівністю $c - \epsilon \leq f \leq c + \epsilon$ для достатньо малого ϵ, розшаровану на лінії рівня функції f і яка розглядається з точністю до пошарової еквівалентності $P^2 = \{x : -\epsilon \leq f(x) - c \leq \epsilon\}$. Атом називається простим, якщо функція Морса в парі - проста. Решта атомів називаються складними.*

Означення 2 *Скінченний зв'язний граф Γ називається* f-графом*, якщо він задовольняє наступні умови:*

1) Всі вершини графа Γ мають степінь 3.

2) Деякі із ребер графа Γ орієнтовані, причому до кожної вершини графа Γ прилягає рівно два орієнтованих ребра, із яких одне входить в вершину, а інше виходить з неї. Причому ця вершина може бути початком і кінцем одного і того ж орієнтованого ребра , якщо орієнтоване ребро є петлею.

Означення 3 *Два f-графи називаються* еквівалентними*, якщо один можна отримати з іншого послідовністю наступних операцій. Дозволяється замінювати орієнтації всіх ребер якогось циклу на протилежні. Класи еквівалентності f-графів називаються f-інваріантами.*

Існує взаємно однозначна відповідність між f-інваріантами і f-атомами.

Покажемо, як ідея атомів і молекул може бути застосована до траєкторної класифікації потоків Морса-Смейла на замкнених двовимірних поверхнях.

Векторні поля v_1 і v_2, задані на замкнених поверхнях M_1 і M_2, називаються *топологічно траєкторно еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм $h : M_1 \to M_2$, що переводить траєкторії векторного поля v_1 в траєкторії векторного поля v_2 зі збереженням орієнтації на траєкторіях.

Означення 4 *Векторне поле v на многовиді M називається* грубим*, якщо при малому збуренні поля v топологічна поведінка його траєкторій не змінюється, тобто після збурення поле топологічно траєкторно еквівалентне початковому.*

Згідно теореми М.Пейксото [4], [5], [6] грубими векторними на двовимірній поверхні є поля Морса-Смейла. У випадку двовимірної поверхні їх можна визначити наступним чином

Означення 5 *Векторне поле на замкненій двовимірній поверхні M^2 називається* полем Морса-Смейла*, якщо*

1) v має скінченне число особливих точок і періодичних траєкторій, причому всі вони гіперболічні;

2) не існує траєкторій, що йдуть із сідла в сідло;

3) для кожної траєкторії поля v її α-граничні і ω-граничні множини є або особливою точкою, або періодичною траєкторією, тобто граничним циклом.

Опишемо класифікацію потоків Морса-Смейла без періодичних траєкторій. Будемо називати їх потоками Морса.

Потоки Морса мають ще один природній опис. Це градієнтно-подібні потоки без сепаратрис, що йдуть із сідла в сідло. Тут потік називається градієнтно-подібним, якщо він топологічно-еквівалентний потоку $grad\ f$ для деякої функції Морса f і деякої рімановової метрики g_{ij} на многовиді M.

Кожному потоку Морса на двовимірній поверхні M^2 можна природнім чином можна поставити у відповідність деякий f-граф, або f-атом, таким чином, що відповідність між f-атомами і класами топологічної траєкторної еквівалентності потоків Морса буде взаємно однозначною.

Опишемо цю конструкцію.

Всі особливі точки потоку Морса можна розділити на три типи: стоки, витоки в сідла. Крім того, потік має сепаратриси, що з'єднує стоки і витоки з сідлами. Кожному сідлу при цьому відповідає дві вхідні і дві вихідні сепаратриси.

Розглядаємо граф, вершинами якого є витоки, а ребрами стійкі многовиди сідлових точок. Замінимо кожну вершину колом, що є границею регулярного околу витоку. Отримаємо кола, які з'єднані відрізками стійких многовидів сідлових точок. Це і задає атом поля Морса-Смейла

2 Атоми полів Морса-Смейла

Ми розглядаємо тільки градієнтно-подібні поля Морса-Смейла, тобто поля без замкнених траєкторій.

Нехай M- замкнена двовимірна поверхня з деякою рімановою метрикою.

Поставимо у відповідність кожній функції f, сідлові точки якої лежать на одному рівні, її градієнтний потік відносно вибраної рімановoї метрики. Це співставлення встановлює природню взаємно-однозначну відповідність між класами пошарової еквівалентності таких функцій на поверхні і класами топологічно траєкторної еквівалентності потоків Морса.

Ця взаємно-однозначна відповідність не залежить від вибору рімановoї метрики на поверхні [1].

Класи пошарової еквівалентності функцій з вказаною властивістю взаємно-однозначно відповідають f-атомам.

Клас T_i векторного поля - це всі векторні поля, у яких не більше ніж "i" сідлових точок.

Означення 6 *Дві сім'ї X_t і Y_t* топологічно еквівалентні, *якщо існує гомеоморфізм $h : [0;1] \to [0;1]$ та існує сукупність гомеоморфізмів $\varphi_t : M \to M$, $t \in [0;1]$,таких що вони є топологічними еквівалентностями між векторними полями X_t та векторними полями $Y_{h(t)}$.*

Нехай M - n-вимірний многовид з краєм M

Означення 7 *n-вимірний диск H називається* ручкою індексу λ *(або λ-*ручкою*), якщо існує гомеоморфізм $\varphi : D^\lambda \times D^{n-\lambda} \to H$ такий, що $\varphi(\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}) = H \cap M \subset \partial M$.*

Означення 8 Розкладом замкненого многовиду M на ручки *називається розклад $M = H_0 \bigcup H_1 \bigcup ... \bigcup H_m$ де H_0 - n-вимірний диск і H_i - ручка на $M_{i-1} = \bigcup_{j<i} H_j$.*

При роботі з ручками будемо використовувати операції ковзання ручок та скорочення ручок [8].

Заклеївши диском ручку на атомі B^1 ми отримаємо A.

A отримаємо з B^2 скороченням ручки.

B^1 отримаємо з D_1^1 заклеївши одну ручку диском.

B^2 отримаємо з D_1^2 застосувавши властивість скорочення ручок.

Від C_2 до D_2 можна перейти ковзанням ручки.

D_2 отримуємо з H_2^1 заклеївши ручку диском.

f-графи складності 1
Атом А - це просто точка

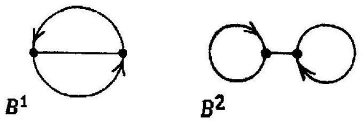

Рис. 1

f-графи складності 2

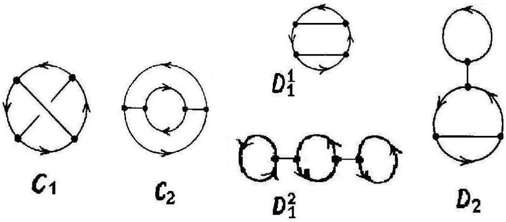

Рис. 2

Від H_2^1 переходимо до D_1^1 скоротивши ручку.

З H_2^1 отримується F_2^1 ковзанням ручки.

Аналогічно ковзанням ручки з H_2^1 ми отримуємо G_2^1.

Заклеївши диском ручку в атомі H_2^2 ми отримаємо D_1^2.

Використавши властивість скорочення ручок до H_2^2 ми отримаємо D_2.

Ковзанням ручки відбувається перехід від H_2^2 до F_2^2, а також від H_2^2 до G_2^2.

Таким чином, проводячи аналогічні міркування з рештою f-графів, отримаємо граф G, зображений на рис. 4. В ньому вершинам відповідають f-атоми, а ребрам – описані деформації атомів за допомогою ковзання або скорочення ручок.

Згідно [1] існує один атом (A), що відповідає локальному екстремуму для сідлових точок, існує два атоми складності 1, 4 атоми складності 2 і 10 атомів складності 3. Вони зображені на рис. 1-3.

3 Сім'я векторних полів

Теорема 1 *Якщо дві сім'ї топологічно еквівалентні в класі T_i, то вони задають однакові шляхи на графі G.*

Доведення. Кожному t відповідають вершини на графі G, крім скінченного числа t_k, в яких проходить зміна від однієї вершини до іншої, цим t_k

f-графи складності 3

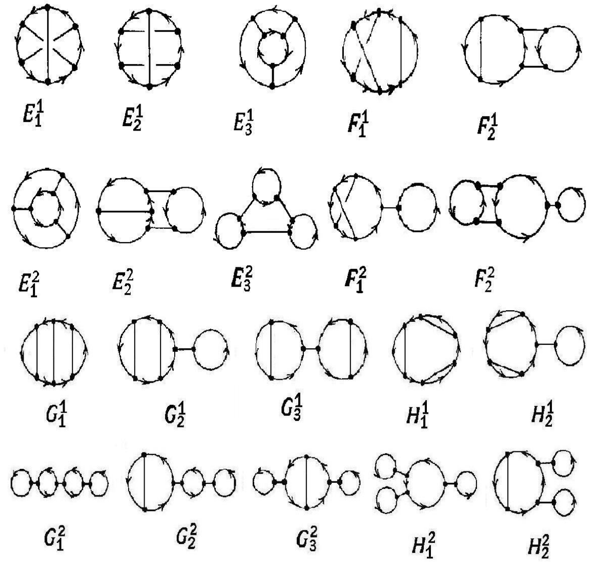

Рис. 3

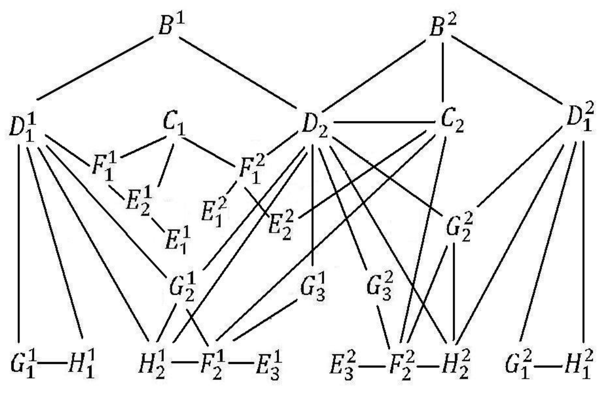

Рис. 4

відповідають ребра, що з'єднують ці вершини. Тоді оскільки $Y_{h(t)}$ топологічно еквівалентний X_t, то їм відповідають однакові вершини або ребра у випадку, коли $t = t_k$. Отже, у відповідних шляхів однакові вершини і ребра, тобто вони збігаються.

Проводячи міркування в зворотньому порядку ми отримаємо теорему 2.

Теорема 2 *Два поля класу T_i можна з'єднати шляхом (сім'єю векторних полів) в класі T_i, якщо існує шлях на графі G, який з'єднує відповідні вершини.*

Нехай кількість рухів від одного атома до іншого - n. Занумеруємо можливі рухи від одного атома до іншого цілими числами. Ці числа будемо називати оснащенням. Шлях на графі, у кожного ребра якого задане оснащення, будемо називати оснащенним.

Теорема 3 *Якщо двом сім'ям відповідають однакові оснащені шляхи на графі, то вони топологічно еквівалентні.*

Доведення. Ми можемо намалювати n кратних ребер, то тоді кожному шляху на графі буде відповідати одна сім'я векторних полів.

При деформації векторного поля можливі ситуації:

1) топологічний тип векторного поля не змінюється, тоді ця сім'я задається атомом за Фоменком;

2) проходить біфуркація, тобто змінюється топологічний тип. В цьому випадку ця деформація задається парою атомів, тобто якщо атоми розглядати як вершини деякого графа, то цю деформацію будемо зображати як ребро між відповідними вершинами. Далі зображаємо всі такі можливі біфуркації. Якщо відбувається послідовно декілька біфуркацій, то ця послідовність задає послідовність ребер, тобто шлях на побудованому графі.

Висновок

В роботі досліджені топологічні властивості сім'ї векторних полів, описано всі можливі переходи для атомів, складність яких не перевищує 3. Отримані результати можуть бути застосовані при вивченні контактних структур на 3-вимірних многовидах, а саме, якщо на такому многовиді задана функція Морса, то якщо між двома регулярними рівнями такої функції немає критичних рівнів, то виникає сім'я векторних полів на поверхні, що в загальному випадку є полями Морса-Смейла.

Література

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. - Ижевск: "Удмуртский университет 1999. - 444с.

2. Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности. // УМН 1990, т. 45, №2. - с.49-77.
3. Ошемков А. А., Шарко В.В., О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях, Матем. сб., 1998, Т. 189, №8. - с. 93-140.
4. Peixoto M.M. On the classification of flows of 2-manifolds. // In: Dynamical System. Proc. Symp. Univ. of Bahia, New York-London: Acad. Press., 1973. - pp. 389-419.
5. Peixoto M.M. Structural stability on two-dimensional manifolds. I, II. // Topology, 1962, v.1, №2; Topology, 1963, v.2, №2. - pp. 179-180.
6. Peixoto M.C. Peixoto M.M. Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions. // Anais Acad. Brasil. Ciencias, 1959, v.31, №2. - pp. 135-160.
7. Meyer K.R. Energy functions for Morse-Smale systems // Amer. J. Math., 1968, v. 90, №4. - pp. 1031-1040.
8. Пришляк О.О. Теорія Морса. Київ, 2002. - 65с.

О.О. Пришляк, І.М. Іванюк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.

E-mail: prishlyak@yahoo.com, ivong07@yandex.ru

Aleksandr Prishlyak, Ivanna Ivanyuk

Kyiv Taras Shevchenko National University, Kyiv, Ukraine

Topology of set of vector fields on surface

The topological properties of a family of vector fields in the general position on the surfaces are investigated in using atoms and molecules by Fomenko. We describe all possible transformations for atoms, complexity of which is less than 4.