Деформації замкнених 1-форм Морса на замкнених поверхнях

С.В. Білун, А.О. Гагай, О.О. Ворончук, М.В. Лосєва

Анотація Вивчаються топологічні властивості замкнених 1-форм Морса на замкнених поверхнях, використовуючи поняття атомів та молекул функції за А.Т.Фоменком. Отримано критерій існування деформації однієї такої 1-форми у іншу при умові, що вона має не більше 3 сідлових нулів, ці нулі зв'язні траекторіями і всі рекурентні траєкторії – замкнені

Ключові слова Атоми та молекули функцій Морса · деформація 1-форми Морса

УДК 517.91

Нехай ω - зовнішня замкнена диференціальна 1-форма на замкненій двовимірній поверхні M. Інтеграл від замкненої 1-форми Морса можна розглядати як багатозначну функцію Морса. Теорія замкнених 1-форм Морса була започаткована С.П. Новіковим [1]. Було показано, що такі форми природньо виникають в фізичних задачах [1], а також при дослідженні мінімальних поверхонь, краєм яких є задана замкнена крива [2]. Серед подальших досліджень в цій теорії слід відмітити роботи Фарбера [3], Пажитного [4], Арнольда [5], Білун та Пришляка [6].

Позначимо $N(\omega)$ – множину нулів форми ω. Крива $\gamma \subset M$, що не містить нулів, називається інтегральною траєкторією форми ω, якщо локально вона є рівнем функції f такої, що $\omega = df$. Ми будемо розглядати тільки максимальні траєкторії - які не є власними підмножинами інших траєкторій,

і називати їх просто траєкторіями. Для незамкнених 1-форм інтегральна траєкторія визначаються як лінія, дотичні до якої лежать в ядрі 1-форми.

Для кожного досить малого околу U(x) точки x$\in$ M\N(ω) траєкторія, що проходить через x, розбиває U(x) на дві частин: додатну {y: f(y)-f(x)>0} і від'ємну {y: f(y)-f(x)<0}.

Деформація 1-форми це сім'я 1-форм ω_t, де $t \in [0,1]$ і координати ω_t неперервно залежать від t.

Диференціальні 1-форми ω_1 і ω_2 на M називаються *траєкторно еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм $h : M \to M$, що відображає нулі в нулі, а траєкторії на траєкторії. При цьому h називається траєкторною еквівалентністю. Якщо крім того h зберігає розбиття кожного малого околу точки $x \in M \backslash N(\omega)$ на додатну і від'ємну частини, то він називається топологічною еквівалентністю, а відповідні форми топологічно еквівалентними.

Нуль 1-форми $\omega = adu + bdv$ називається *невиродженим*, якщо матриця $\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial b} \end{pmatrix}$ невироджена, де (u, v) – деяка параметризація сфери. Форма називається *формою Морса*, якщо всі її нулі невироджені. Аналогічно функціям Морса можна показати, що в околі невиродженого нуля заміною координат форму можна звести до виду $\omega = \pm udu \pm vdv$. При цьому, якщо знаки при udu і vdv різні, то такий нуль будемо називати сідлом, а в інших випадках - центром.

Траєкторія, границя якої містить сідло, будемо називати вусом цього сідла. Таким чином, з кожного сідла виходять чотири вуса. Траєкторія, що з'єднує сідла – це та, для якої границя є одним або двома сідлами. В останньому випадку вона є вусом для двох сідел.

Поняття рекурентної траєкторії форми аналогічне до векторних полів.

В роботі [6] для класифікації замкнених 1-форм Морса на замкнених поверхнях, всі рекурентні траєкторії яких замкнені, використовуються HCC-графи.

Основна мета цієї роботи — дати топологічну класифікацію деформацій 1-форм Морса на замкнених поверхнях, у яких всі сідлові нулі зв'язні траекторіями і всі рекурентні траєкторії – замкнені, використовуючи атоми та молекули за Фоменком.

Нехай ω і ω' - замкнені 1-форми Морса на замкнених поверхнях M та M', всі рекурентні траєкторії яких замкнені. Для того щоб форми були траєкторно еквівалентні необхідно і достатньо, щоб існував гомеоморфізм $h : M \to M'$, обмеження якого на $G(\omega)$ задає ізоморфізм графів. Дві за-

мкнені 1-форми Морса ω і ω' на замкнених поверхнях M та M', всі рекурентні траєкторії яких замкнені, будуть топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли існує така їх траєкторна еквівалентність, яка відображає додатні області та підобласті в додатні області та підобласті, а від'ємні – у від'ємні [6].

Вкладення графів $G(\omega)$ будемо задавати за допомогою атомів.

Нехай f - функція Морса на поверхні X^2, а g – функція Морса на іншій поверхні Y^2. Функції Морса будемо називати *пошарово еквівалентними*, якщо існує дифеоморфізм $\lambda : X^2 \to Y^2$, який переводить зв'язні компоненти лінії рівня функції f в зв'язні компоненти лінії рівня функції g. Також говорять, що пара (X^2, f) пошарово еквівалентна парі (Y^2, g).

Кожна функція Морса визначає шарування з особливостями на поверхні. Його шарами вважаються компоненти зв'язності рівня функції. В області кожного регулярного шару це шарування тривіальне – прямий добуток кола на відрізок. В області критичного шару шарування може бути влаштоване достатньо складно.

Атомом назвемо область P^2 критичного рівня, яка задається нерівністю $c - \epsilon < f < +\epsilon$ для достатньо малого ϵ, розшаровану на лінії рівня функції f і розглянуту з точністю до пошарової еквівалентності. Якщо критичне значення c – локальний мінімум або локальний максимум, то атом буде називатися А-атомом. Якщо критичне значення c – сідлове, то відповідний атом буде називатися *сідловим*. Атом буде називатися простим, якщо функція Морса f в парі (P^2, f) – проста (має одну критичну точку). Інші атоми будуть називатися *складними*. Складність атома – це число критичних точок в ньому. Атом буде називатися *орієнтованим або неорієнтованим* в залежності від того, чи є поверхня P^2 орієнтованою чи неорієнтованою.

В [7] були описані всі атоми, складність яких не перевищує 3. Вони позначаються $A, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i, i = 1, 2, ...$ З урахуванням напрямку зростання функції кожному атому відповідає 2 f-атоми (які можуть бути однаковими). Ці f-атоми будемо відрізняти за допомогою верхнього індексу, що дорівнює 1 або 2. f-атоми можна розглядати як циліндри, до верхніх основ яких приклеєні декілька 1-ручок (стрічок). Нижніми циклами атома будемо називати нижні основи циліндрів, а верхніми циклами – компоненти краю, що отримані з верхніх основ циліндрів після приклеювання 1-ручок [8].

Якщо у 1-форми один критичний рівень, то, видаливши з поверхні його окіл (атом), отримаємо об'єднання циліндрів та 2-дисків. Складемо список

пар циклів так, що в одну пару потрапляють один верхній та один нижній цикл, якщо вони є основами одного з отриманих циліндрів. З проведених побудов, уведених означень та роботи [6] випливає така

Теорема 1 *Дві 1-форми Морса на замкнених поверхнях, у яких всі сідлові нулі зв'язні траекторіями і всі рекурентні траєкторії замкнені, будуть топологічно еквівалентними тоді та тільки тоді, коли у них однакові f-атоми і пари верхніх та нижніх циклів.*

З [9] випливає, що за допомогою додавання ручок можна здійснити такі переходи між f-атомами :

$A - A$, $B_1 - B_1$, $B_2 - B_2$, $C_1 - C_1$, $C_2 - C_2$, $D_1^1 - D_1^1$, $D_1^2 - D_1^2$, $D_1^1 - D_1^1$, $D_2 - D_2$, $E_1^1 - E_1^1$, $E_1^2 - F_2^1$, $E_2^1 - G_1^1$, $E_2^2 - F_1^2$, $E_3^1 - E_2^2$, $E_3^2 - F_2^2$, $F_1^1 - F_1^1$, $F_1^2 - E_2^2 - E_2^1$, $F_2^1 - G_2^1$, $F_2^2 - G_2^2 - G_3^2$, $G_1^1 - G_1^1 - H_1^1$, $G_1^2 - H_1^2$, $G_2^1 - F_2^1 - H_2^1$, $G_2^2 - F_2^2 - G_3^2 - H_2^2$, $G_3^1 - E_2^2 - F_2^1$, $G_3^2 - F_2^2$, $H_1^1 - G_1^1$, $H_1^2 - G_1^2$, $D_1^1 - D_1^1$, $H_2^1 - F_2^1 - G_2^1$, $H_2^2 - G_2^2$

Описані переходи будемо називати *допустимими*. Розглянемо деформацію 1-форми, що не змінює числа нулів форми і критичних рівнів. Тоді при такій деформації з атомами можливе лише перетворення, що відповідає додаванню ручок. Скорочення ручок неможливе, оскільки воно змінює число нулів 1-форми. Отже справедлива така

Теорема 2 *Дві 1-форми Морса на замкнених поверхнях, у яких сідлових нулів не більше 3, вони зв'язні траекторіями і всі рекурентні траєкторії замкнені, можна з'єднати шляхом у просторі таких форм тоді та тільки тоді, коли від f-атома однієї 1-форми можна перейти до f-атома іншої за допомогою допустимих переході, що зберігають пари верхніх та нижніх циклів.*

Висновок

В роботі досліджені топологічні властивості диференціальних 1-форм Морса на замкнених поверхнях, у яких всі сідлові нулі зв'язні траекторіями і всі рекурентні траєкторії замкнені, описано всі можливі деформації 1-форм з не більш ніж 3 нулями з використанням атомів за А.Т.Фоменком.

Література

1. Новиков С.П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса// УМН, 1982, т. 37, №5, 3-49.
2. Фоменко А.Т. Топологические вариационные задачи. - М. 1984.
3. Farber M. Exactness of the Novikov inequalities, Functional Anal. Appl. 19 (1985), 40-48.
4. Pazhitnov A.V. Morse theory of closed 1-form, Lecture Notes in Math. 1474, 1991, Springer.
5. Арнольд В.И. Топологические иэргодические свойства замкнутых 1-форм с несоизмеримыми периодами// Функ.ан. и прил., 1991, т. 25, №2, 81-90.
6. Білун С.В., Пришляк О.О. Замкнені 1-форми Морса на замкнених поверхнях// Вісник Київського університету. Матем.Мех. No.8, 2002, с.77-81.
7. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. - Ижевск: "Удмуртский университет 1999. 444 с.
8. Кузаконь В.М., Кириченко В.Ф., Пришляк О.О. Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти. Праці Ін-ту математики НАН Укпаїни. - 2013. - Т.97. 500с.
9. Пришляк О.О., Іванюк І.М. Топологія сім'ї векторних полів на поверхні//Proc. Intern. Geom. Center, No.4, 2013

С.В. Білун, А.О. Гагай, О.О. Ворончук, М.В. Лосєва

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.

E-mail: balerynka@bigmir.net, mv.loseva@gmail.com

Svetlana Bilun, Anna Gagay, Alexandra Voronchuk, Maria Loseva

Taras Shevchenko national university of Kyiv

balerynka@bigmir.net, mv.loseva@gmail.com

Deformations of closed Morse 1-forms on closed surfeces

We study the topological properties of closed Morse 1-forms on closed surfaces using the concept of atoms and molecules of functions by A.T.Fomenko. The criterion of the existence of a deformation of one form to another, provided that they have no more then 3 saddle zeros, these zeros conneted by trajectory and recurrent trajectories are closed, is given.