Про поведінку неперервної функції та її ліній рівня в околі ізольованого локального екстремуму

А.О. Котляр

Анотація У статті описується дослідження поведінки неперервних функцій в околі ізольованих локальних екстремумів. Для наочності розглядаються лінії рівня функції в даному околі та виводяться умови їх гомеоморфності колам. Також у статті введене нове означення - поняття точки локальної зірковості, наведено декілька теорем , що пов'зані із цим поняттям.

Ключові слова Окіл ізольваного локального екстремуму · Лінії рівня функції · Точка локальної зірковості · Регулярна сім'я кривих

УДК 517.91

1 Вступ

Одним із досить актуальних напрямків топології сьогодення є теорія критичних точок а також дослідження неперервної функції в околі ізольованої критичної точки. Лінії рівня наочно характеризують поведінку функції в деякому околі. Тому, для вивчення характеру зміни функції в околі ізольованого локального екстремуму використовуємо саме лінії рівня. Вони є способом представлення скалярної функції двох змінних на площині. Зауважимо, що у даному дослідженні розглядаються лише ізольовані локальні максимуми та мінімуми.

Дана стаття складається із трьох розділів. У першому розділі статті розглядаються деякі функції, лінії рівня яких гомеоморфні колам та наводиться приклад функції, лінії рівня якої не гомеоморфні колам. Цей приклад є причиною застосування поняття регулярної сім'ї кривих. Разом із тим, у цьому розділі доведена теорема про необхідну і достатню умову гомеоморфності ліній рівня неперервної функції колам.

У другому розділі означення точки зірковості деякої області, введене Андріюк, узагальнюється більш широким - означенням точки локальної зірковості. Доводиться теорема про розбиття області на локально зіркові під області.

У третьому розділі окрім наведення теореми про конус, побудований над замкненою жордановою кривою, яка обмежує зіркову область, також описується її узагальнення, коли умови на криву суттєво послаблені.

2 Регулярна сім'я кривих

Нехай D - деяка область в $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ - деяка неперервна функція, а x_0 - її критична точка. Розглянемо множину $\{c \in R \mid f(x, y) = c\}$. Ця множина є множиною ліній рівня функції $f(x, y)$. Наприклад, якщо $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, то її лініями рівня будуть концентичні еліпси (рис.1).

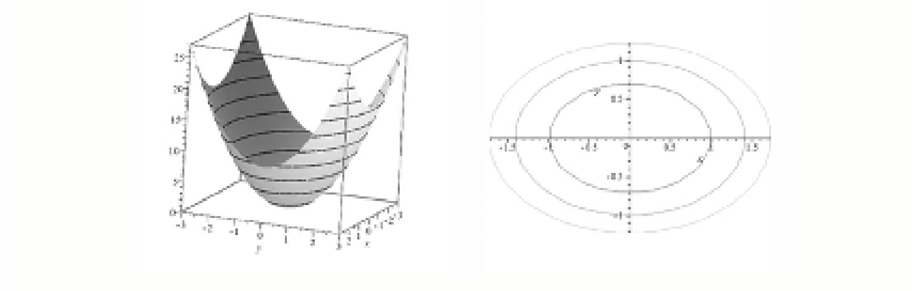

Рис. 1

На малюнку зліва видно, що точка (0;0) є екстремальною точкою (точкою мінімуму) малюнок справа це сукупність ліній рівня в околі критичної точки (0;0).

На рисунку 2 зображено графік і лінії рівня функції $f(x,y) = (x - 2y)e^{-x^2-y^2}$.

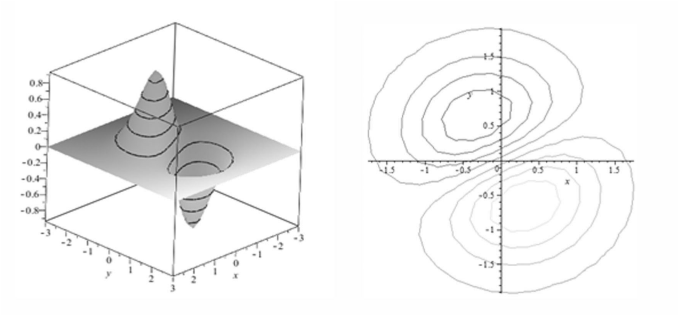

Рис. 2

У наведених прикладах лініями рівня є криві, гомеоморфні колам. Виникає питання: а чи завжди лінії рівня неперервної функції в околі критичної точки гомеоморфні колу? Розглянемо неперервну функцію двох змінних $f : D \to \mathbb{R}$ і припустимо, що для неї існують $\{c_i \mid i \in I \subset \mathbb{N}\}$ такі, що для кожного $i \in I$ лінії рівня $f^{-1}(f(c_i))$ не є гомеоморфними колам. На рисунку 3 зображено лінії рівня такої функції.

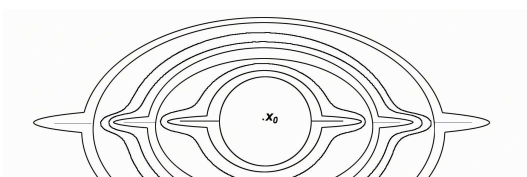

Рис. 3

Як бачимо, між двома лініями рівня $f^{-1}(f(c_1))$ і $f^{-1}(f(c_2))$ знаходяться лінії рівня, які гомеоморфні колу і нескінченно близько наближаються до даних. Аби виключити такі випадки, вводиться поняття регулярної сім'ї кривих. Нехай існує сім'я F кривих $\{C\}$ які лежать в області D.

Означення 1 *Сім'я кривих F називається регулярною в D, якщо для кожної дуги PQ кривої C і $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ таке, що якщо $\rho(P, P') < \epsilon$, де $P' \in C' \in F$, то $\sigma(P'Q', PQ) < \delta$.*

На рисунку 4 зображено регулярну (зліва) і нерегулярну (справа) сім'ї кривих.

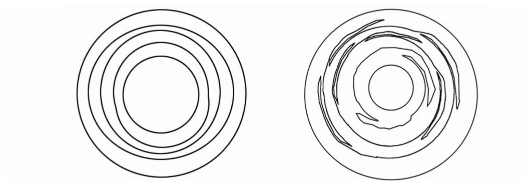

Рис. 4

Теорема 1 *Для того, щоб лінії рівня неперервної функції в околі ізольованого локального мінімума або максимума були гомеоморфні колам, необхідно і достатньо, щоб вони утворювали регулярну сім'ю кривих в околі цієї точки.*

Доведення Необхідність: Нехай $f : D \to \mathbb{R}$ - деяка неперервна функція, x_0 - її ізольований локальний мінімум (максимум), U - деякий окіл точки x_0. За умовою маємо, що лінії рівня функції f гомеоморфні колам. Отже маємо в околі точки x_0 сукупність концентричних кіл, яка, очевидно, утворює регулярну сім'ю кривих в U.

Достатність: Нехай лінії рівня функції $f : D \to \mathbb{R}$ утворюють регулярну сім'ю кривих F в околі U точки x_0.Доведемо тоді, що лінії рівня даної функції еквівалентні колам. На деякій кривій $C_1 \in F$ оберемо скінчене число точок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таких, що для деякого досить малого $\epsilon > 0$, $\rho(x_i, x_{i+1}) = 2\sigma(x_1, x_0) - \epsilon$, $i = 1, \ldots, n-2$. Візьмемо окіл точки x_i: $U_{x_i} \cap U$, що є колом радіуса $\sigma(x_1, x_0) - \epsilon$. З означення регулярної сім'ї кривих випливає, що $\forall i = 1, \ldots, n-1$ такий окіл гомеоморфний квадрату, а криві, що містяться в околі, гомеоморфні відрізкам.

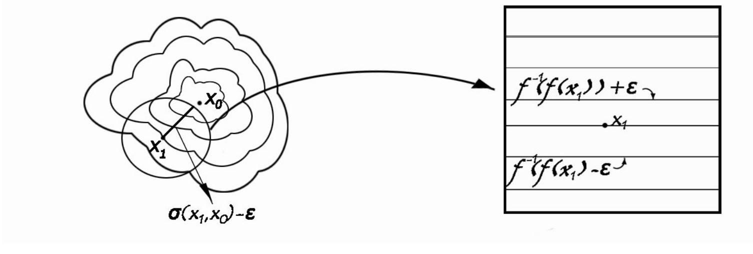

Рис. 5

Тоді $\cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ гомеоморфне концентричним n-кутникам, які в свою чергу гомеоморфні колам.

3 Зіркові та локально зіркові області

Для початку, ознайомимось із поняттям центру зірковості, що представлене у [1].

Означення 2 *Плоска замкнена жорданова крива γ обмежує зіркову область, якщо у замиканні області існує точка така, що кожен прямолінійний відрізок, який сполучає її з довільною точкою кривої повністю належить замиканню області.*

Точка з визначення2 називається *центром зірковості.*

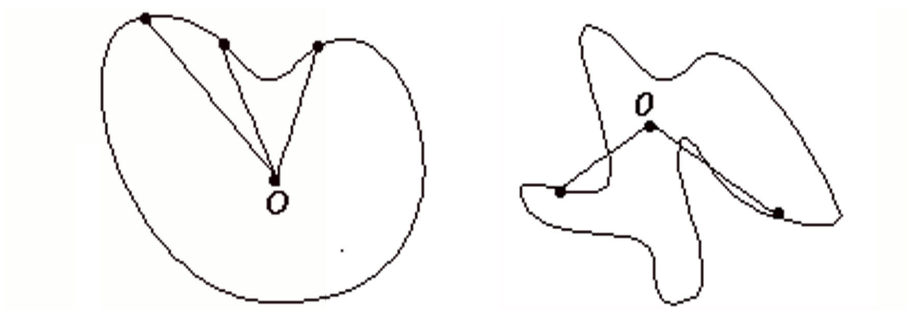

Рис. 6

На рисунку 6 зображено дві замкнені жорданові криві. Зліва крива обмежує зіркову область і точка O є центром зірковості даної області. Справа крива обмежує область, що не є зірковою, бо не існує в цій області точки, що була б центром зірковості.
Взагалі кажучи, клас кривих, що обмежують зіркову область є досить вузьким. Розширити його можна, якщо ввести поняття локальної зірковості.

Означення 3 *Точкою локальної зірковості назвемо таку точку $x_1 \in \Gamma$, для якої існує підмножина Γ_{α_1}, така, що x_1 є центром зірковості цієї області. Таку область Γ_{α_1} назвемо локально-зірковою областю.*

Очевидно, що кожна точка з області Γ є точкою локальної зірковості, бо в якості підмножини Γ_{α_1} з визначення3 може бути, наприклад ϵ-окіл даної точки (будь-яка внутрішня точка множини Γ входить туди із своїм околом). Якщо, в загальному випадку, замкнена жорданова крива обмежує область, що не є зірковою областю (тобто, не існує в цій області такої точки, що будь-який прямолінійний відрізок, який сполучає цю точку із довільною точкою кривої, перетинає цю криву), то доцільно було б розбити дану область на зіркові області.

Теорема 2 *Для області, що обмежена довільною замкненою жордановою кривою завжди існує розбиття скінченою кількістю локально-зіркових підмножин* $\{\Gamma_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Доведення Опишемо процедуру побудови такого розбиття. Розглянемо довільну замкнену жорданову криву γ, яка обмежує область Γ, що, взагалі кажучи, не є зірковою. Ця крива має опуклості всередину і опуклості назовні. На дузі кривої, що опукла назовні, оберемо довільну точку x_1. Побудуємо коло, що проходить через точку x_1 і, яке буде вписаним у фігуру, обмежену кривою γ. Із центру O_1 цього кола проведемо відрізки l_i, що лежать на дотичних до кривої γ у точки опуклості кривої всередину, але лише ті, які будуть лежати повністю всередині області Γ (не будуть мати із кривою більше 2 спільних точок - точки дотику і точки перетину). Тобто, якщо відрізок l_i спочатку перетинає криву, а потім дотикається до неї, такий відрізок не будується. Позначимо через T_i точки дотику відрізків l_i до кривої, і S_i - точки перетину відрізків l_i із кривою. Існує два варіанти: 1)була побудована лише одна дотична; 2) було побудовано більше ніж одна дотична.

1) Якщо була необхідність побудувати лише одну дотичну l_1, то область, обмежена відрізком T_1S_1 цієї дотичної і меншою дугою кривої, що мітиться між точками T_1 і S_1 цієї дотичної із кривою буде першим елементом розбиття, що будується. Назвемо її Γ_{α_1}.Ця область є локально-зірковою в силу побудови.
2) Нехай було побудовано більше ніж одна дотична. Покладемо надалі, що нумерація дотичних починається завжди зліва направо. Після побудови усіх дотичних до усіх опуклостей всередину кривої γ (із вказаним вище обмеженням), утвориться область, обмежена відрізками T_iS_i та меншими дугами $S_1S_2, T_{i-1}S_i$ і T_kT_1, $i \in \{1,\dots,k\}$, де k-кількість проведених відрізків l_i. Ця область буде локально-зірковою під-областю початкової області Γ в силу побудови і тому, отримана під-область є першою компонентою Γ_{α_1} розбиття, що будується.

   Отже, в будь-якому разі, було одержано область Γ_{α_1}, яка є зірковою областю і центром зірковості є центр вписаного кола O_1, тому, що будь-який відрізок, що сполучає точку O_1 із довільною точкою, що лежить на границі області Γ_{α_1} повністю належить цій області (за побудовою).

Очевидно, що відрізок T_1S_1 повністю належить області $\mathit{\Gamma}$ і є границею області $\mathit{\Gamma}_{\alpha_1}$. Якщо $\mathit{\Gamma} \setminus \mathit{\Gamma}_{\alpha_1}$ не є зірковою областю, то оберемо будь-який із відрізків, що є межею $\mathit{\Gamma}_{\alpha_1}$ (наприклад, T_1S_1). На цьому відрізку виберемо довільну точку x_2 і проведемо аналогічну процедуру, що й для точки x_1. Зауважимо, що, аби розбиття мало менше елементів, точку x_2 необхідно обирати на найбільшому з відрізків, що є межею $\mathit{\Gamma}_{\alpha_1}$.Отримаємо область $\mathit{\Gamma}_{\alpha_2}$, яка також, виходячи з побудови, є зірковою і центром зірковості є точка O_2.

Таку процедуру побудови елементів розбиття $\mathit{\Gamma}_{\alpha_i}$ потрібно проводити доти, поки $\mathit{\Gamma} \setminus \{\cup_{i=1}^{m} \mathit{\Gamma}_{\alpha_i}\}$ не буде набором з l локально-зіркових під-областей. Тоді, назвавши ці області $\{\mathit{\Gamma}_{\alpha_{m+1}}, \mathit{\Gamma}_{\alpha_{m+2}}, \ldots, \mathit{\Gamma}_{\alpha_{m+l=n}}\}$ маємо розбиття області $\mathit{\Gamma}$ на n локально-зіркових під-областей $\{\cup_{i=1}^{n} \mathit{\Gamma}_{\alpha_i}\}$.

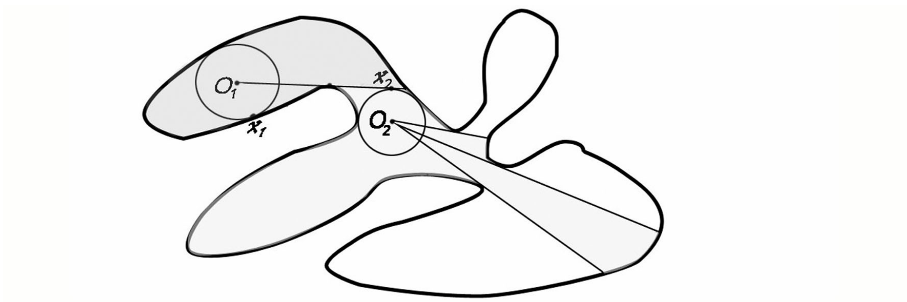

Рис. 7

На даному рисунку зображена процедура побудови розбиття області, обмеженої кривою γ, що не є зірковою, на локально-зіркові під-області.

4 Конус над кривою

Нехай на площині $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ задано замкнену жорданову криву $\gamma \in \pi_1 \subset \mathbb{R}^2$. Згідно теореми Жордана, замкнена жорданова крива ділить площину, у якій лежить, на дві множини $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$, для кожної з яких γ є межею. В точності, одна з цих областей обмежена. Обмежену множину $\pi_1 \setminus \gamma$ позначимо через $O(\gamma) \subset \pi_1$. Розглянемо площину $\pi_1 \parallel \pi_2$ і криву $\gamma' \in \pi_2$, що є ортогональною проекцією кривої γ на площину π_2. Аналогічно до π_1, позначимо через $O(\gamma') \subset \pi_2$ замкнену множину із межею γ'. Побудуємо конус із основою $\gamma \in \pi_1$ і вершиною $A \in \pi_2$. Накладемо умову

$$A \in O(\gamma') \tag{*}$$

Теорема 3 *Конус, побудований із умовою (*) над кривою γ, яка обмежує зіркову область, є графіком деякої неперервної функції.*

Доведення Отже, нехай побудовано конус із умовою (*) над кривою γ,яка обмежує зіркову область Γ. Тоді, виберемо прямокутну декартову систему координат так, щоб вершина А цього конуса співпала із початком координат, а площина $X0Y$ була паралельна площині π_1, у якій лежить γ. Внаслідок зірковості, довільна площина, що проходить через вісь OZ перетинає γ в двох точках, для кожної з яких існує твірна, яка проходить через вершину конуса. Отже, в перерізі маємо криві, що гомеоморфні відрізкам.

Узагальнюючи цю теорему до кривої γ, яка обмежує область Γ що не є зірковою, але має розбиття $\{\Gamma_{\alpha_i}\}_{i=1}^{n}$ на локально-зіркові під-області, можна над кожною локально-зірковою під-областю побудувати конус, який буде графіком деякої неперервної функції. Тоді й об'єднання цих конусів буде графіком неперервної функції. Насамкінець, хотілося б навести приклад функції, яка має ізольований локальний мінімум у нулі, а лінії рівня цієї функції в околі нуля мають вигляд так званих "польських"кіл, тобто є множинами вигляду $Y = A \cup B \cup C$, де $A = \big\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\big\}$, $B = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$, $C = \big\{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, y = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{x}\big\}$ (мал.8)

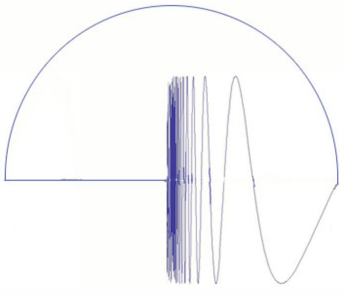

Рис. 8

Тобто, у множині С крива нескінченно наближається до нуля справа, і разом з тим ця крива у $\mathbb{R}^2$ є замкненою. Цей приклад показує, що поведінка неперервної функції в околі ізольованого локального екстремуму може бути досить непередбачуваною.

5 Висновки

У статті розглядаються ізольовані локальні мінімуми (максимуми) неперервних функцій та їх лінії рівня, для отримання топологічного інваріанту функції в околі цієї ізольованої локальної точки. В даній роботі наведено приклад неперервної функції, лінії рівня якої не гомеоморфні колам. В цьому випадку з'являється необхідність ввести поняття регулярної сім'ї кривих, яке допомагає отримати необхідну і достатню умову гомеоморфності ліній рівня неперервної функції колам. Це є одним з головних результатів статті. Іншими результатами є: введення поняття точки локальної зірковості; доведені теорема про розбиття замкненої жорданової кривої на локально-зіркові під області та теорема про конус, побудований над замкненою жордановою кривою .

Література

1. О.П.Андріюк, Функції на одновимірних многовидах: дис...канд.фіз.-мат.наук: 01.01.01 Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка. - К., 2007. - 110 с.
2. К. Куратовский, Топология. - Т2. -М.:“МИР“, 1966 - 623с.

А.О. Котляр
Київський Національний Унiверсиет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.
E-mail: _kotliar@bigmir.net

Anastasija A. Kotliar
Department of Mechanics and mathematics of Taras Shevchenko National University of Kiev, Ukraine
student of post graduate courses

About the behaviour of a continuous function and it's equiscalar lines in the neighbourhood of isolated local extrema

The investigation of the behavior of continuous functions in the neighborhood of isolated local extrema is described in this paper. For obviousness, equiscalar lines of a function in the given neighborhood are regarded, there are derived conditions of when equiscalar lines are homeomorphic to circles. There also introduced a new definition - a concept of the point of local shapedness in the paper, and, at least, theorems connected with this concept are adduced.