# Характеристичне рівняння в теорії інфінітезимальних деформацій з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду поверхонь обертання без омбілічних точок

**Ігор Володимирович Потапенко**

**Анотація** Для інфінітезимальних деформацій з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду в класі поверхонь обертання без омбілічних точок отримано характеристичне рівняння, розв'язок якого повністю характеризує деформуюче поле таких деформацій та є необхідною та достатньою умовою їх існування. Зясовано геометричний зміст цієї функції. Вона є варіацією середньої кривини з ваговою функцією.

**Ключові слова** інфінітезимальна деформація, поверхня обертання

**УДК** 514.76

## Вступ

Теорія інфінітезимальних деформацій поверхонь містить різні типи деформацій (згинання, конформні, ареальні, геодезичні, поворотні тощо), які характеризуються певною геометричною властивістю. Особливе інтерес в даній теорії займають інфінітезимальні деформації поверхонь з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду і даній тематиці присвячено робота [4].

Зокрема, у роботі [4] автор показує, що цю варіацію не можна задавати довільно, вона повинна зодовольняти певним диференціальним умовам, а також з якою степіню довільності це можна зробити.

У даній роботі, використовуючи методику академіка І.Н. Векуа [1], [2] отримано характеристичне рівняння інфінітезимальних деформацій з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду в класі поверхонь обертання без омбілічних точок. Розвязок цього рівняння повністю характеризує деформуюче поле цього типу деформацій.

Розглянемо поверхню $S$ класу $C^k$ в евклідовому просторі $E^3$ з векторно-параметричним рівнянням

$$\overline{r} = \overline{r}(x^1, x^2)$$

та її деформацію

$$\overline{r}_t = \overline{r}(x^1, x^2) + \varepsilon \overline{y}(x^1, x^2), \tag{1}$$

де

$$\overline{y}(x^1, x^2)$$

- вектор зміщення, $\varepsilon$ - нескінченно малий параметр. Всі індекси тут і надалі незалежно набувають значень $1, 2$.

**Означення 1** *Інфінітезимальну деформацію поверхні $S$ при якій варіація символів Крістоффеля друго роду буде задана наперед, виходячи з певних геометричних міркувань називатимемо інфінітезимальною деформацією з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду.*

Система основних рівнянь інінфінітезимальних деформацій має наступний вигляд [3]:

$$\delta b_{ik} b_{jl} - \delta b_{ij} b_{kl} + \delta b_{jl} b_{ik} - \delta b_{kl} b_{ij} = g_{ml} \delta R^m_{ijk} + \delta g_{ml} R^m_{ijk}, \tag{2}$$

та

$$\delta b_{ij,k} - \delta b_{ik,j} = b_{mj} \delta \Gamma^m_{ik} - b_{mk} \delta \Gamma^m_{ij}, \tag{3}$$

де $g_{ij}$, $b_{ij}$, $\Gamma^h_{ij}$, $R^h_{ijk}$ - коефіцієнти першої та другої квадратичних форм, символи Крістоффеля другого роду та тензора кривини Рімана відповідно, $\delta g_{ij}$, $\delta b_{ij}$, $\delta \Gamma^h_{ij}$, $\delta R^h_{ijk}$ - їх варіаціїї при інфінітезимальній деформації (1), $\ll, \gg$ - коваріантна похідна на базі метричного тензора $g_{ij}$ поверхні $S$.

Рівняння (2) називаються рівняннями Гаусса, а (3) Петерсона - Кодацці.

## 1 Варіації головних кривин при інфінітезимальній деформації регулянрної поверхні без омбілічних точок

У даному пункті виведемо формули варіації головних кривин при інфінітезимальній деформації (1) регулянрної поверхні без омбілічних точок.

**Теорема 1** *При інфінітезимальній деформації (1) регулярної класу $C^k$, поверхні $S$, що не містить омбілічних точок, варіації головних кривин будуть мати представлення через варіації $\delta K$, $\delta H$ гауссової та середньої кривин за формулами*

$$\begin{aligned} \delta k_1 &= \frac{1}{\sqrt{E}}(k_1 \delta H - \frac{1}{2}\delta K), \\ \delta k_2 &= \frac{1}{\sqrt{E}}(\frac{1}{2}\delta K - k_2 \delta H), \end{aligned} \tag{4}$$

*де $E$ - ейлерова різниця.*

**Доведення.** Скористаємося формулами ([1])

$$\begin{aligned} 2\delta H &= \delta k_1 + \delta k_2, \\ \delta K &= k_1 \delta k_2 + k_2 \delta k_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Внаслідок того, що поверхня не містить омбілічних точок ($E \neq 0$), не обмежуючи загальності міркувань будемо вважати $k_1 \geq k_2$, це означає, що визначник системи (5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = k_1 - k_2 = 2\sqrt{E} \neq 0.$$

Використовуючи формули Крамера отримаємо (4).

Теорему доведено.

Рівняння (3) отримано в результаті варіювань рівняння Гаусса містить одне суттєве рівняння, а тому його можна переписати у вигляді

$$\delta b_{11} b_{22} - 2\delta b_{12} b_{12} + \delta b_{22} b_{11} = \delta K g + K \delta g. \tag{6}$$

Запишемо (6) в системі координат ліній кривини

$$\begin{aligned} I &= g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2, \\ II &= k_1 g_{11}(dx^1)^2 + k_2 g_{22}(dx^2)^2. \end{aligned} \tag{7}$$

В цьому випадку мають місце співвідношення

$$\begin{cases} b_{11} = k_1 g_{11}, \\ b_{22} = k_2 g_{22}, \\ b_{12} = 0, \\ \quad g = g_{11} g_{22}. \end{cases} \tag{8}$$

Використовуючи властивості варіації геометричної величини ([4]) матимемо

$$\begin{aligned} \delta b_{11} &= \delta k_1 g_{11} + k_1 \delta g_{11}, \\ \delta b_{22} &= \delta k_2 g_{22} + k_2 \delta g_{22}. \end{aligned} \tag{9}$$

Підставимо (4), як результат теореми, в (9). Матимемо

$$\begin{aligned} \delta b_{11} &= \frac{1}{\sqrt{E}}(k_1\delta H - \frac{1}{2}\delta K)g_{11} + k_1\delta g_{11}, \\ \delta b_{22} &= \frac{1}{\sqrt{E}}(\frac{1}{2}\delta K - k_2\delta H)g_{22} + k_2\delta g_{22}. \end{aligned} \tag{10}$$

Неважко бачити, що представлення (10) з урахуванням (8) та

$$\delta g = \delta g_{11}g_{22} + \delta g_{22}g_{11}$$

задовольняють (6) тотожно.

## 2 Інфінітезимальні деформації з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду поверхонь обертання без омбілічних точок

Розглянемо поверхні обертання:

$$\begin{cases} x = r\cos(\alpha), \\ y = r\sin(\alpha), \\ z = f(r). \end{cases} \tag{11}$$

В системі ліній кривини коефіцієнти першої, другої основних форм поверхні, а також символи Крістоффеля другого роду набувають вигляду:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+f'^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{f''}{\sqrt{(1+f'^2)}} & 0 \\ 0 & \frac{rf'}{\sqrt{(1+f'^2)}} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma^1_{11} = \frac{f'f''}{1+f'^2}, \\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0, \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{1+f'^2}, \end{array} \right\} \tag{14}$$

а (3) містить 2 суттєві рівняння і є системою типу Коші відносно функції $\delta b_{12}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta b_{12}}{\partial x^1} = \frac{\partial \delta b_{11}}{\partial x^2} - \delta b_{11}\Gamma^1_{12} - \delta b_{12}\Gamma^2_{12} + \delta b_{12}\Gamma^1_{11} + \\ \qquad + \delta b_{22}\Gamma^2_{11} - b_{11}\delta\Gamma^1_{12} + b_{22}\delta\Gamma^2_{11}, \\ \frac{\partial \delta b_{12}}{\partial x^2} = \frac{\partial \delta b_{22}}{\partial x^1} - \delta b_{12}\Gamma^1_{12} - \delta b_{22}\Gamma^2_{12} + \delta b_{11}\Gamma^1_{22} + \\ \qquad + \delta b_{21}\Gamma^2_{22} - b_{22}\delta\Gamma^2_{12} + b_{11}\delta\Gamma^1_{22}. \end{cases} \tag{15}$$

Умова інтегрованості системи (15)має вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \delta b_{11}}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 \delta b_{22}}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial \delta b_{22}}{\partial x^1} \Gamma^1_{11} - \delta b_{22} \Gamma^1_{11} \Gamma^2_{12} + \\
&+ \delta b_{11} \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{22} + \frac{\partial \delta b_{22}}{\partial x^1} \Gamma^1_{21} + \delta b_{22} \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial \delta b_{11}}{\partial x^1} \Gamma^1_{22} - \delta b_{11} \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1} = \\
&= \Gamma^1_{11}(-b_{11}\delta\Gamma^1_{22} + b_{22}\delta\Gamma^2_{12}) + \frac{\partial(b_{11}\delta\Gamma^1_{12} - b_{22}\delta\Gamma^2_{11})}{\partial x^2} + \\
&+ \frac{\partial(-b_{22}\delta\Gamma^2_{12} + b_{11}\delta\Gamma^1_{22})}{\partial x^1}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Підставимо (10) в (16)та позначимо

$$q = \frac{\delta H}{\sqrt{E}},$$

$$F = \Gamma^1_{11}(-b_{11}\delta\Gamma^1_{22} + b_{22}\delta\Gamma^2_{12}) + \frac{\partial(b_{11}\delta\Gamma^1_{12} - b_{22}\delta\Gamma^2_{11})}{\partial x^2} + \frac{\partial(-b_{22}\delta\Gamma^2_{12} + b_{11}\delta\Gamma^1_{22})}{\partial x^1},$$

$$p_1 = -\frac{\delta K g_{11}}{2\sqrt{E}} + k_1 \delta g_{11},$$

$$p_2 = \frac{-\delta K g_{22}}{2\sqrt{E}} - k_2 \delta g_{22}.$$

Перепишемо (16) у вигляді

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2(qb_{11}+p_1)}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2(qb_{22}+p_2)}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial(qb_{22}+p_2)}{\partial x^1}\Gamma^1_{11} + (qb_{22}+p_2)\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \\
&+ (qb_{11}+p_1)\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} + \frac{\partial(qb_{22}+p_2)}{\partial x^1}\Gamma^2_{12} - (qb_{22}+p_2)\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial x^1} - \\
&- \frac{\partial(qb_{11}+p_1)}{\partial x^1}\Gamma^1_{22} - (qb_{11}+p_1)\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial x^1} = F.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Враховуючи (8), (14), замість (17) матимемо

$$b_{22}\frac{\partial^2 q}{(\partial x^1)^2} + b_{11}\frac{\partial^2 q}{(\partial x^2)^2} + R\frac{\partial q}{\partial x^1} + Sq = G, \tag{18}$$

де

$$R = 2\frac{\partial b_{22}}{\partial x^1} - b_{22}\Gamma^1_{11} + b_{22}\Gamma^2_{12} - b_{11}\Gamma^1_{22},$$

$$
\begin{aligned}
S = \frac{\partial^2 b_{22}}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial x^1}\Gamma^1_{11} + b_{22}\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + b_{11}\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} + \\
+ \frac{\partial b_{22}}{\partial x^1}\Gamma^2_{12} - b_{22}\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial x^1}\Gamma^1_{12} - b_{11}\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial x^1},
\end{aligned}
$$

$$G = F - \frac{\partial^2 p_1}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 p2}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial p_2}{\partial x^1}\Gamma^1_{11} - p_2\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - p_1\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} - \frac{\partial p_2}{\partial x^1}\Gamma^2_{12} +$$

$$+ p_2\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial p_1}{\partial x^1}\Gamma^1_{22} + p_1\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1}.$$

Нами доведена

**Теорема 2** *Для того щоб регулярна поверхня обертання $S$ без омбілічних точок з векторно - параметричним рівнянням (11) зазнавала інфінітезимальної деформації (1) з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду $\delta\Gamma^h_{ij}$ в бінарній області регулярності необхідно і достатньо, щоб в цій області характеристичне рівняння (18) мало розв'язки відносно функції $q = \frac{\delta H}{\sqrt{E}}$ при цьому деформуюче поле, буде характеризуватися функціями (10), що задовольняють основній системі (2) - (3).*

Не важко бачити, що тип рівняння (18), ([5])повністю залежить від знаку гауссової кривини $K = \frac{b_{11}b_{22}}{g}$, $(g \neq 0)$.

Отже

– при $K > 0$ маємо рівняння (18) - еліптичного типу,

– при $K = 0$ маємо рівняння (18) - параболічного типу,

– при $K < 0$ маємо рівняння (18) - гіперболічного типу.

## Література

1. И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции // М. : Наука, (1988 ). - 509 с.
2. И. Н. Векуа. Некоторые вопросы безконечно малых изгибаний поверхностей.// Доклады АН СССР, - (1957). Т. 112, №3. - С.377 - 380
3. І. В. Потапенко. Нові рівняння інфінітезимальних деформацій поверхонь в Е3. // Український математичний журнал. (2010). Т.62, №2. - С.199 - 202.
4. І. В. Потапенко. Про відновлення варіації метричного тензора поверхні за заданою варіацією символів Крістоффеля другого роду при інфінітезимальних деформаціях поверхонь в евклідовому просторі Е3 . // Український математичний журнал. - (2011). Т.63, №4. - С.523 - 530.
5. М. М. Смирнов. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // - М. : Наука, (1964). - 208 с.

**Ігор Володимирович Потапенко**

ОНУ імені І.І.Мечникова,ІМЕМ, Одеса, Україна

E-mail: `Potapenko_igopotapenko@yandex.ru`

**Igor Potapenko**
Odessa National University by name Mechnikov, Odessa, Ukraine.

## Characteristic equation in the theory infinitesimal deformations of surfaces of rotation

For infinitesimal deformations fixed variation characters Christoffel of the second kind in the class of surfaces of rotation without not umbilical points obtained characteristic equation, the solution of which fully characterizes deformation field such deformations and is a necessary and sufficient condition for their existence. Clarified the geometric meaning of this function. It is a variation of the average curvature with weight function.