

Канонические квази-геодезические отображения параболически келеровых пространств

Ирина Николаевна Курбатова

Аннотация Мы исследуем специальный тип отображений между римановыми пространствами с параболически келеровой структурой.

Ключевые слова Риманово пространство, параболически келерова структура.

УДК 517.764

1 Введение.

В последние десятилетия интенсивно изучаются многочисленные обобщения теории геодезических отображений аффинносвязных и римановых пространств и голоморфно-проективных отображений почти комплексных многообразий.

Геодезическое отображение одного риманова пространства V_n на другое \bar{V}_n определяется как взаимно однозначное соответствие между их точками, при котором каждая геодезическая линия V_n переходит в геодезическую линию \bar{V}_n .

Если на римановом пространстве определена абсолютно параллельная почти комплексная структура, согласованная с метрикой [1], его называют келеровым. Известно [2], что геодезическое отображение келерова пространства на келероно с сохранением комплексной структуры является тривиальным. Поэтому для келеровых пространств изучаются более общие, так называемые голоморфно проективные отображения, введенные Т.Оцуки и Я.Тасиро [3] и явившиеся предметом исследования многих отечественных

и зарубежных математиков. Обстоятельное изложение результатов, полученных в теории геодезических и голоморфно проективных отображений, можно найти в [2], [4].

Одним из направлений современной дифференциальной геометрии является теория дифференцируемых многообразий, снабженных различными геометрическими структурами, в частности, алгебраическими, то есть изоморфно представляющими некоторую алгебру [5], [6]. В соответствии с этим развивается теория диффеоморфизмов многообразий с различными аффинорными структурами, таких, например, как почти геодезические, p -геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств.

В [7] Н.С. Синюковым и Й. Микешем было предложено весьма широкое обобщение геодезических и голоморфно-проективных отображений пространств аффинной связности без кручения с произвольной аффинорной структурой - квазипланарные отображения.

В 1968 году академик А.З. Петров, исследуя проблему моделирования физических полей (в смысле поведения пробных частиц), пришел к задаче квази-геодезического отображения 4-мерных римановых пространств сигнатуры Минковского [8]. При этом движение свободной частицы в одном поле (при одном энергетическом режиме) моделируется движением в другом поле (при другом энергетическом режиме) под действием некоторой внешней силы, то есть геодезические линии одного риманова пространства V_4 переходят в так называемые квазигеодезические линии другого пространства \bar{V}_4 , в результате чего, как выражался А.З. Петров, "происходит перекачка энергии в силу". А.З. Петровым были получены и в некоторой мере исследованы основные уравнения квази-геодезических отображений в общей по отображению системе координат:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h(x) + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x)$$

$$\bar{F}_{(ij)}(x) = 0, \quad \bar{F}_{ij}^\alpha(x) = F_j^\alpha(x)\bar{g}_{\alpha i}(x),$$

где $\bar{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ компоненты объектов связности пространств \bar{V}_4 и V_4 с метрическими тензорами \bar{g}_{ij} и g_{ij} , соответственно; ψ_i, φ_i - ковекторы; F_i^h - аффинор; круглыми скобками обозначено симметрирование.

В [8] отмечается, что рассматриваемый случай соответствует весьма широкой ситуации, отвечающей общей точке зрения теории наблюдаемых величин в физике.

Тензорный характер основных уравнений квази-геодезических отображений позволяет рассматривать отображения римановых пространств \bar{V}_n и

V_n произвольной сигнатуры и размерности, характеризующиеся такими же соотношениями. Будем называть их также квази-геодезическими (КГО).

Класс КГО, как видно, достаточно широк. Например, он включает в себя геодезические отображения римановых пространств и голоморфно-проективные отображения келеровых пространств с сохранением комплексной структуры. Однако вследствие широты класса КГО трудно получить конкретные результаты при изучении его во всей общности. Поэтому в [9] из определенных геометрических соображений выделены и обстоятельно исследованы частные случаи КГО. В частности, там налагается требование, чтобы рассматриваемое КГО $f : V_n \rightarrow \bar{V}_n$ удовлетворяло условию взаимности, то есть чтобы обратное отображение $f^{-1} : \bar{V}_n \rightarrow V_n$ также было квази-геодезическим, соответствующим тому же аффинору F_i^h . Кроме того, аффинор F_i^h полагается невырожденным.

Мы продолжаем исследования в этом направлении. Предметом изучения будут КГО $f : V_n \rightarrow \bar{V}_n$ специального типа, которые названы нами каноническими (ККГО), в предположении, что аффинор F_i^h порождает на \bar{V}_n и V_n почти келерову структуру.

2 Параболически келеровы пространства и их свойства

1°. Как известно, четномерное риманово пространство K_n с метрическим тензором $g_{(ij)}(x)$ называется *параболически келеровым* (в терминологии В.В. Вишневого ([6] - *A-пространством*), если на нем определена аффинорная структура $F_i^h(x)$ максимального ранга $m(n = 2m)$, удовлетворяющая условиям:

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad F_{(ij)} = 0, \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i}, \quad (1)$$

$$F_{i,j}^h = 0 \quad (2)$$

где \langle, \rangle - знак ковариантной производной по связности пространства K_n .

Условимся операцию свертывания с аффинором обозначать следующим образом:

$$T_{\bar{i} \dots} = T_{\alpha \dots} F_i^\alpha, \quad T_{\dots}^{\bar{i}} = T_{\dots}^{\alpha} F_\alpha^i. \quad (3)$$

В частности, ввиду (1)

$$T_{\bar{i} \dots} = 0, \quad T_{\dots}^{\bar{i}} = 0.$$

2°. Вследствие (2) в K_n выполняются дифференциальные уравнения $F_{i,jk}^h = 0$. Альтернируя их по индексам j, k и применяя тождество Риччи,

получаем свойства тензоров Римана и Риччи пространства K_n :

$$R_{ijk}^{\bar{h}} = R_{ij\bar{k}}^h, \quad R_{\bar{h}ijk} = -R_{h\bar{i}jk}, \quad (4)$$

$$R_{\bar{h}i} = -R_{h\bar{i}}. \quad (5)$$

Ввиду (2) аффинорная структура параболически келерова пространства интегрируема, поэтому в рассматриваемой окрестности можно выбрать такую систему координат, называемую адаптированной (к аффинору), в которой аффинор приводится к виду:

$$(F_i^h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$F_b^{a+m} = \delta_b^a, \quad F_{b+m}^{a+m} = F_b^a = F_{b+m}^a = 0, \quad (6)$$

$a, b = 1, 2, \dots, m = \frac{n}{2}$.

Очевидно, что в любой системе координат F_i^h имеет нулевой след:

$$F_\alpha^\alpha = 0. \quad (7)$$

В адаптированной системе координат ввиду (1), (6) приобретает специфику и матрица метрического тензора:

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ -G_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $G_1 = G_1^T$, $G_2 = -G_2^T$, то есть

$$g_{ab}(x) = g_{ba}(x); \quad g_{ab+m}(x) = -g_{a+mb}(x); \quad g_{a+mb+m}(x) = 0.$$

3°. Введем в K_n вспомогательный тензор A_i^h , такой что

$$A_\alpha^h A_i^\alpha = 0, \quad (8)$$

$$F_\alpha^h A_i^\alpha + A_\beta^h F_i^\beta = \delta_i^h. \quad (9)$$

Очевидно, при этом

$$F_\alpha^\beta A_\beta^\alpha = m.$$

Этот тензор определяется с большим произволом. В частности, нетрудно проверить, что в адаптированной к аффинору F_i^h системе координат он представляется в виде

$$(A_i^h) = \begin{pmatrix} B & E_m \\ -B^2 & -B \end{pmatrix},$$

где B - произвольная квадратная матрица порядка m .

3 Квази-геодезические отображения параболически келеровых пространств.

Рассмотрим пару римановых пространств (K_n, g_{ij}) , $(\bar{K}_n, \bar{g}_{ij})$, находящихся в квази-геодезическом отображении (КГО), соответствующем аффинору F_i^h и удовлетворяющему условию взаимности. Будем полагать, что при этом аффинор F_i^h на обоих пространствах определяет параболически келерову структуру. Тогда в общей по отображению системе координат (x^i) основные уравнения КГО представятся в виде:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h(x) + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x) \quad (10)$$

$$F_{\alpha}^h(x)F_i^{\alpha}(x) = 0, \quad \bar{F}_{(ij)}(x) = 0, \quad \bar{F}_{ij}(x) = F_j^{\alpha}(x)\bar{g}_{\alpha i}(x), \quad (11)$$

$$F_{(ij)}(x) = 0, \quad F_{ij}(x) = F_j^{\alpha}(x)g_{\alpha i}(x), \quad (12)$$

$$F_{i,j}^h = 0, \quad F_{ij}^h = 0,$$

где $\bar{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ компоненты объектов связности пространств \bar{V}_n и V_n с метрическими тензорами \bar{g}_{ij} и g_{ij} , соответственно; ψ_i, φ_i - ковекторы; F_i^h - аффинор; $\langle | \rangle, \langle, \rangle, \langle, \rangle$ - знаки ковариантной производной по связностям $\bar{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$.

Если в уравнениях (10) $\psi_i = 0$ и $\varphi_i = 0$, КГО вырождается в аффинное. Этот случай будем считать тривиальным.

Если в (10) $\psi_i \neq 0$ и $\varphi_i = 0$, КГО вырождается в геодезическое отображение [4]. Нетрудно показать, что геодезическое отображение при условиях (11), (12) тривиально (значит, и КГО тривиально). Действительно, зависимость между ковариантными производными аффинора F_i^h в пространствах K_n и \bar{K}_n с учетом (10), (11), (12) запишется в форме

$$\psi_i \delta_j^h - \psi_i F_j^h = 0.$$

Отсюда свертыванием по индексам h, j находим $\psi_i = 0$ и, следовательно, $\psi_i = 0$, что и подтверждает тривиальность КГО.

При $\psi_i = 0$ и $\varphi_i \neq 0$ получим особый тип КГО, которые будем называть *каноническим квази-геодезическим отображением (ККГО)*. Этот тип отображений мы и будем изучать в данной статье.

4 Геометрические объекты, инвариантные относительно ККГО параболически келеровых пространств.

Рассмотрим ККГО параболически келеровых пространств $f : K_n \rightarrow \bar{K}_n$ с основными уравнениями

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x) \quad (13)$$

$$F_\alpha^h(x)F_i^\alpha(x) = 0,$$

$$\bar{F}_{(ij)}(x) = 0, \quad \bar{F}_{ij}(x) = F_j^\alpha(x)\bar{g}_{\alpha i}(x), \quad F_{(ij)}(x) = 0, \quad F_{ij}(x) = F_j^\alpha(x)g_{\alpha i}(x),$$

$$F_{i,j}^h = 0, \quad F_{i|j}^h = 0.$$

Отметим сначала, что из зависимости между ковариантными производными аффинора F_i^h в пространствах K_n и \bar{K}_n при ККГО ввиду (13), (11), (12) следует

$$\varphi_{\bar{i}} = 0. \quad (14)$$

С другой стороны, в результате свертывания (13) по индексам h, j с учетом (11) получим

$$\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\alpha + \varphi_{\bar{i}}.$$

Как известно, в любом римановом пространстве $\Gamma_{i\alpha}^\alpha(x) = \frac{1}{2}\partial_i \ln |g|$, где $g = \det \|g_{ij}\|$. Поэтому из последних соотношений на основании (14) имеем

$$\bar{T} = T, \quad (15)$$

где

$$T = \partial_i \ln |g|, \quad \bar{T} = \partial_i \ln |\bar{g}|.$$

2°. Произведем свертывание (13) по индексам h, j с тензором A_h^j , введенным выше:

$$\bar{\Gamma}_{i\beta}^\alpha A_\alpha^\beta = \Gamma_{i\beta}^\alpha A_\alpha^\beta + m\varphi_i + \varphi_\alpha A_{\bar{i}}^\alpha.$$

Свойства тензора A (8), (9), а также (14) позволяют выразить отсюда

$$(m+1)\varphi_i = \bar{\Gamma}_{i\beta}^\alpha A_\alpha^\beta - \Gamma_{i\beta}^\alpha A_\alpha^\beta,$$

в результате чего (13) можно представить в виде

$$\bar{T}_{ij}^h = T_{ij}^h,$$

где

$$T_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \frac{1}{m+1} \left(\Gamma_{i\beta}^\alpha A_\alpha^\beta F_j^h + \Gamma_{j\beta}^\alpha A_\alpha^\beta F_i^h \right). \quad (16)$$

Аналогичным образом представляются в \bar{K}_n компоненты \bar{T}_{ij}^h .

3°. На основании (13) зависимость между компонентами тензоров Римана пространств K_n и \bar{K}_n имеет вид:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + F_k^h \varphi_{i,j} - F_j^h \varphi_{i,k} + F_i^h (\varphi_{k,j} - \varphi_{j,k}). \quad (17)$$

Свернув эти соотношения по h, k , получим зависимость между компонентами тензоров Риччи K_n и \bar{K}_n :

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} - \varphi_{i,\bar{j}} - \varphi_{j,\bar{i}}. \quad (18)$$

Из (4) следует

$$R_{i\bar{j}k}^h + R_{ij\bar{k}}^h = 0, \quad \bar{R}_{i\bar{j}k}^h + \bar{R}_{ij\bar{k}}^h = 0$$

Подставляя сюда предыдущие равенства, находим

$$F_k^h \varphi_{i,\bar{j}} + F_i^h \varphi_{k,\bar{j}} - F_j^h \varphi_{i,\bar{k}} - F_i^h \varphi_{j,\bar{k}} = 0.$$

Поскольку $\varphi_{\bar{i},j} = 0$, свертывание этих соотношений с A_h^k по k и h дает нам

$$m\varphi_{i,\bar{j}} - \varphi_{j,\bar{i}} = 0,$$

что означает

$$\varphi_{i,\bar{j}} = 0 \quad (19)$$

при $m \neq 1$. Но тогда из (18) следует

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij}, \quad (20)$$

то есть тензор Риччи инвариантен относительно КГГО параболически келеровых пространств.

4°. Свернем (17) с A_h^k по k и h с учетом (19) и (9):

$$\bar{R}_{ij\beta}^\alpha A_\alpha^\beta = R_{ij\beta}^\alpha A_\alpha^\beta + m\varphi_{i,j} - \varphi_{j,i}.$$

Отсюда, соответственно,

$$(m^2 - 1)\varphi_{i,j} = m(\bar{R}_{ij\beta}^\alpha - R_{ij\beta}^\alpha)A_\alpha^\beta + (\bar{R}_{ji\beta}^\alpha - R_{ji\beta}^\alpha)A_\alpha^\beta.$$

Теперь (17) можно представить в виде

$$\bar{T}_{ijk}^h = T_{ijk}^h,$$

где

$$T_{ijk}^h = R_{ijk}^h - F_k^h \tilde{R}_{ij} + F_j^h \tilde{R}_{ik} + F_i^h \tilde{R}_{[jk]}, \quad (21)$$

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{1}{m^2 - 1}(mR_{ij\beta}^\alpha + R_{j\beta}^\alpha)A_\alpha^\beta.$$

Аналогичным образом представляются в \bar{K}_n компоненты \bar{T}_{ijk}^h .

Нами доказана теорема.

Теорема 1 *Геометрические объекты (15), (16), (21) и тензор Риччи инвариантны относительно ККГО параболически келеровых пространств.*

Объект (16) носит нетензорный характер и является аналогом известных параметров Томаса в теории геодезических отображений римановых пространств. Его сохранение необходимо и достаточно для того, чтобы отображение между параболически келеровыми пространствами было каноническим квази-геодезическим.

Объект (21) - аналог тензора Вейля в теории геодезических отображений. Сохранение объектов (15), (21) и тензора Риччи - лишь необходимое условие для того, чтобы рассматриваемое отображение было ККГО.

5 ККГО параболически келеровых пространств на плоское параболически келерово.

1°. Будем называть параболически келеровы пространства, допускающие ККГО на плоское пространство, *каноническим квазиплоскими*.

Рассмотрим ККГО параболически келерова пространства K_n на плоское параболически келерово $\bar{K}_n = E_n$. Тогда $\bar{R}_{ijk}^h = 0$ и, следовательно, (17) после опускания в K_n индекса h принимают вид:

$$R_{hijk} + F_{hk}\varphi_{i,j} - F_{hj}\varphi_{i,k} + F_{hi}(\varphi_{k,j} - \varphi_{j,k}) = 0. \quad (22)$$

В результате симметрирования по индексам i, j отсюда получим:

$$F_{hk}\varphi_{i,j} - F_{hj}\varphi_{i,k} + F_{ik}\varphi_{h,j} - F_{ij}\varphi_{h,k} = 0.$$

Поднимая здесь индекс h в K_n и свертывая с A_h^k по h и k , находим:

$$\varphi_{i,j} = CF_{ij}, \quad C = \frac{1}{m}\varphi_{\alpha,\beta}g^{\alpha\gamma}A_\gamma^\beta. \quad (23)$$

Следовательно, (22) принимают вид:

$$R_{hijk} = C(F_{hj}F_{ik} - F_{hk}F_{ij} + 2F_{hi}F_{jk}). \quad (24)$$

Свертывание с g^{hk} этого выражения по индексам i, j дает нам $R_{ij} = 0$, то есть канонически квазиплоское параболически келерово пространство является Риччи-плоским.

2°. Продифференцируем ковариантно в K_n (24) по x^l , затем проциклируем полученные соотношения по j, k, l и применим дифференциальное тождество Бианки:

$$C_l(F_{hj}F_{ik} - F_{hk}F_{ij} + 2F_{hi}F_{jk}) + C_j(F_{hk}F_{il} - F_{hl}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kl}) + C_k(F_{hl}F_{ij} - F_{hj}F_{il} + 2F_{hi}F_{lj}) = 0.$$

Свертывание этого равенства с g^{hl} по индексам h, l и затем с $g^{i\alpha} A_\alpha^j$ по i, j дает нам $C_{\bar{k}} = 0$. Поэтому поднимая в последних соотношениях индекс i в K_n и свертывая затем с A_i^j по i и j с учетом (9), получаем:

$$m(C_l F_{hk} - C_k F_{hl}) + 2C_h F_{kl} = 0.$$

Циклируя это уравнение по h, k, l и сравнивая с исходным, наконец приходим к выводу, что $C_k = 0$, то есть $C = const$. Нами доказана теорема.

Теорема 2 *Тензор Римана канонически квазиплоского параболически келерова пространства K_n , ($n > 2$) по необходимости имеет структуру (24) при некоторой постоянной C и является Риччи-плоским.*

3°. Естественно возникает вопрос о том, существует ли для параболически келерова пространства K_n , в котором имеют место (24), нетривиальное ККГО.

Несложно проверить, что из (24) и (21) следует $T_{ijk}^h = 0$. Верно и обратное: из $T_{ijk}^h = 0$ следует, что структура тензора Римана в таком пространстве имеет вид (24).

Предположим, что канонически квазиплоское параболически келерово пространство K_n с метрическим тензором $g_{ij}(x)$ и аффинором $F_i^h(x)$ нам задано. Если существует параболически келерово относительно того же аффинора пространство \bar{K}_n с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}(x)$, на которое пространство K_n допускает ККГО, соответствующее вектору $\varphi_i(x) \neq 0$, то ввиду инвариантности T_{ijk}^h имеем $T_{ijk}^h = \bar{T}_{ijk}^h = 0$ и из (21) следует

$$\begin{aligned} \bar{C}(F_j^h \bar{F}_{ik} - F_k^h \bar{F}_{ij} + 2F_i^h \bar{F}_{jk}) &= C(F_j^h F_{ik} - F_k^h F_{ij} + \\ &+ 2F_i^h F_{jk}) + F_k^h \varphi_{i,j} - F_j^h \varphi_{i,k} + F_i^h (\varphi_{k,j} - \varphi_{j,k}). \end{aligned}$$

Отсюда после свертывания с A_h^k по h и k

$$\bar{C}\bar{F}_{ij} = CF_{ij} + \varphi_{i,j}. \quad (25)$$

Далее, ввиду (13), (11), (12) и (14)

$$\bar{g}_{ij,k} = \varphi_i \bar{F}_{jk} + \varphi_j \bar{F}_{ik}. \quad (26)$$

Совокупность уравнений (25), (26) образует систему Коши в ковариантных производных первого порядка в K_n относительно $\bar{g}_{ij}(x)$ и $\varphi_i(x)$. На основании (11) в \bar{K}_n мы также должны требовать выполнения условий

$$\bar{g}_{i\alpha} F_j^\alpha + \bar{g}_{j\alpha} F_i^\alpha = 0. \quad (27)$$

Исследуем смешанную систему (25), (26), (27) в K_n . Заметим, что при этих условиях в \bar{K}_n автоматически следует $F_{ij}^h \equiv 0$. Существование решения

$$\bar{g}_{ij}(x) \equiv \bar{g}_{ji}(x), \quad (\det \|\bar{g}_{ij}\| \neq 0), \quad \varphi_i(x) \neq 0 \quad (28)$$

системы уравнений (25), (26), (27) в канонически квазиплоском пространстве K_n необходимо и достаточно, чтобы это пространство допускало ККГО.

Условия интегрируемости (25) и (26) имеют вид:

$$\bar{C}(F_j^\alpha \bar{g}_{\alpha i, k} - F_k^\alpha \bar{g}_{\alpha i, j}) = \varphi_\alpha R_{ijk}^\alpha,$$

$$\bar{g}_{\alpha j} R_{ikl}^\alpha + \bar{g}_{i\alpha} R_{jkl}^\alpha = \varphi_{i,l} \bar{F}_{jk} + \varphi_i F_k^\alpha \bar{g}_{\alpha j, l} - \varphi_{i,k} \bar{F}_{jl} + \varphi_i F_l^\alpha \bar{g}_{\alpha j, k}.$$

Ввиду (25), (26), (24), (14) эти условия интегрируемости выполняются тождественно. Наконец, дифференцируя ковариантно в K_n (27) и используя (26), убеждаемся, что первое дифференциальное продолжение условий (27) выполняется.

В соответствии с вышесказанным и из теории дифференциальных уравнений следует, что смешанная система уравнений (25), (26), (27) имеет в канонически квазиплоском пространстве K_n решение для любых начальных значениях искомых функций (28), удовлетворяющих в точке M_0 условиям (27).

Итак, нами доказана теорема.

Теорема 3 Если канонически квазиплоское параболически келерово пространство K_n ($n \neq 2$) допускает ККГО на параболически келерово пространство \bar{K}_n , то \bar{K}_n также является канонически квазиплоским. Между любыми канонически квазиплоскими параболически келеровыми пространствами можно установить нетривиальное ККГО.

Эта теорема представляет собой аналог теоремы Бельтрами в теории геодезических отображений римановых пространств.

6 Метрики канонически квазиплоских параболически келеровых пространств.

Ввиду $C = const$ из (24) следует, что канонически квазиплоское параболически келерово пространство является симметрическим:

$$R_{ijk,l}^h = 0.$$

Для симметрических римановых пространств П.А. Широков [10] получил формулу, позволяющую восстановить метрический тензор в окрестности некоторой точки $M(x_0)$ в V_n :

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s 2^s}{(2s+2)!} m_{ij}^s$$

где

$$\begin{aligned} m_{ij}^1 &= m_{ij}, \\ m_{ij}^{k+1} &= m_{\alpha i}^k m_{\beta j}^{\circ\alpha\beta} \\ m_{ij} &= \overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta} y^\alpha y^\beta, \end{aligned}$$

где $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{g}^{\alpha\beta}$, $\overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta} y^\alpha y^\beta$ - значения компонент метрического, обратного ему тензоров и тензора Римана в точке x_0 , (y^h) - римановы координаты с началом в точке x_0 .

Учитывая (24), (11) и используя эту формулу, получим $m_{ij}^k = 0$ при $k > 1$, так что компоненты метрического тензора канонически квазиплоского параболически келерова пространства K_n ($n = 2m > 2$) представляются в виде

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{C}{4} y^\alpha \overset{\circ}{F}_{\alpha i} y^\beta \overset{\circ}{F}_{\beta j},$$

где $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{F}_{ij}$ - компоненты тензоров g_{ij} , F_{ij} в точке x_0 , y^h - римановы координаты с началом в точке x_0 .

Список литературы

1. Д. В. Беклемишев. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой // Итоги науки. Геометрия. М., ВИНТИ АН СССР, 1963 165–212.
2. J. Mikes, A. Vanzurova, I. Hinterleitner. Geodesic Mappings and Some Generalizations // Palacky University, Olomouc, Faculty of Science. Olomouc, 2009.
3. T. Otsuki, Y. Tashiro. On curves in Kaehlerian spaces // J.Okayama Univ. №4, 1954 57–78.
4. Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств // М.: Наука, Москва, 1979. 256 с.
5. А. П. Широков. Пространства над алгебрами и их применения // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения ВИНТИ. М., Т.73, 2002 135–161.
6. В. В. Вишневикий. Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения ВИНТИ. М., Т.73, 2002 5–64.
7. Й. Микеш, Н. С. Синюков. О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности // Известия ВУЗов. Математика. №1, 1983 55–61.
8. Петров А.З. Моделирование физических полей // Гравитация и теория относительности, 1968, вып.4-5. Изд. Казанск. ун-та. С. 7–21.
9. И. Н. Курбатова. Квази-геодезические отображения римановых пространств // Дисс. на соиск. учен. степ. к. ф.-м. н. Одес. ОГУ, 1979 99 с.

10. П. А. Широков. Избранные работы по геометрии // Казань: Изд-во Казан.ун-та, 1966 432 с.

Ирина Николаевна Курбатова

ОНУ, Одесса, Украина

E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

Irina N. Kurbatova

Canonical quasigeodesic mappings of parabolic *Kähler* spaces

We investigate special type of mappings between Riemannian spaces with parabolic *Kähler* structure.