DOI 10.15673/2072-9812.2/2014.29621
Proc. Intern. Geom. Center 2014 **7**(2) 36–50 $d\omega$

Бесконечно малые конформные преобразования в римановом пространстве второго приближения

Сергей Михайлович Покась

Аннотация Рассматриваются аналитические конформные преобразования, вводятся и исследуются конформные преобразования второй степени в римановом пространстве второго приближения. Установлена связь между конформными преобразованиями и приближенными конформными преобразованиями.

Ключевые слова риманово пространство, конформные преобразования, обобщенные уравнения Киллинга.

УДК 514.7

1 Аналитические конформные преобразования

Рассмотрим риманово пространство V_n, отнесенное к произвольной системе координат $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$. В окрестности любой его фиксированной точки $M_0(x_0^n)$ построим пространство второго приближения $\widetilde{V}_n^2(y^n; \widetilde{g}_{ij}(y))$, определив его метрический тензор $\widetilde{g}_{ij}(y)$ следующим образом:

$$\widetilde{g}_{ij}(y) = \underset{\circ}{g_{ij}} + \frac{1}{3} \underset{\circ}{R_{il_1l_2j}}\, y^{l_1} y^{l_2}, \tag{1.1}$$

где $\underset{\circ}{g_{ij}} = g_{ij}(M_0)$, $\quad \underset{\circ}{R_{il_1l_2j}} = R_{il_1l_2j}(M_0)$.

Подобно тому как в ([3]) изучались аналитические движения в пространстве $\widetilde{V}_n^2$ будем исследовать аналитические бесконечно малые конформные преобразования:

$$y'^h = y^h + t\widetilde{\xi}^h(y), \tag{1.2}$$

где $\widetilde{\xi}^h(y)$ удовлетворяет обобщенным уравнениям Киллинга ([1],[2])

$$L_{\widetilde{\xi}}\widetilde{g}_{ij} = \frac{\partial\widetilde{\xi}^\alpha}{\partial y^i}\widetilde{g}_{\alpha j} + \frac{\partial\widetilde{\xi}^\alpha}{\partial y^j}\widetilde{g}_{\alpha i} + \widetilde{\xi}^\alpha\frac{\partial\widetilde{g}_{ij}}{\partial y^\alpha} = \psi(y)\widetilde{g}_{ij} \tag{1.3}$$

Компоненты вектора смещения $\widetilde{\xi}^h(y)$ ищем в виде аналитических функций

$$\widetilde{\xi}^h(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{k}{a^h_{\cdot}}, \tag{1.4}$$

где введено обозначение

$$\underset{k}{a^h_{\cdot}} = a^h_{\cdot l_1\ldots l_k} y^{l_1}\ldots y^{l_k} \quad (k=0,1,\ldots) \quad \underset{0}{a^h} = a^h \tag{1.5}$$

В соотношениях (1.5) $a^h_{\cdot}, a^h_{\cdot l_1}, a^h_{\cdot l_1\ldots l_k}$- некоторые постоянные, причем $a^h_{\cdot l_1\ldots l_k}$ $(k\geq 2)$ симметричны по любой паре нижних индексов.

В пространстве $\widetilde{V}_n^2$ рассмотрим аналитическую функцию n действительных переменных:

$$\psi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{k}{b} \tag{1.6}$$

В (1.6) введены обозначения

$$\underset{k}{b} = b_{l_1\ldots l_k} y^{l_1}\ldots y^{l_k} \tag{1.6'}$$

$$\underset{k}{b^h} = \frac{1}{k+1}\frac{\partial \underset{k+1}{b}}{\partial y^\alpha}\underset{0}{g^{\alpha h}} \quad (k=1,2,\ldots) \tag{1.6''}$$

Имеет место утверждение.

Лемма 1 *Для того чтобы ряды (1.4) определяли компоненты вектора смещения бесконечно малых конформных преобразований в римановом пространстве второго приближения $\widetilde{V}_n^2$, необходимо, чтобы члены этих рядов определялись из уравнений и рекуррентных соотношений:*

$$a_{(ij)} = \underset{0}{b}\, g_{ij} \tag{1.7}$$

$$\underset{p}{a}{}^{h}_{\cdot} = -\frac{p-3}{p-1} \underset{p-2}{a}{}^{\alpha}_{\cdot}\, t^h_\alpha + \frac{1}{p}\left(\underset{p-1}{b}\, y^h - \frac{1}{2}\underset{p-2}{b}{}^{h}\, \underset{0}{g}_{l_1 l_2}\, y^{l_1} y^{l_2}\right) \quad (p = 2, 3, \ldots) \tag{1.8}$$

$$t^h_k = \frac{1}{3} \underset{\circ}{R}{}^h_{\cdot l_1 l_2 k}\, y^{l_1} y^{l_2} \tag{1.9}$$

Доказательство. Подставим соотношения (1.1), (1.4)-(1.6) в обобщенные уравнения Киллинга (1.3) и приведем подобные члены

$$\begin{gathered}\left(a_{(ij)} - b g_{ij}\right) + \left[2\underset{1}{a}_{(ij)} + \frac{1}{3} a^{\alpha}_{\cdot} \underset{\circ}{R}_{\alpha(ij)l}\, y^l - \underset{1}{b}\, \underset{\circ}{g}_{ij}\right] + \\ + \left\{3\underset{2}{a}_{ij} + \frac{1}{3}\left[\left(a^{\alpha}_{(i} \underset{\circ}{R}_{j)l_1 l_2 \alpha} - b \underset{\circ}{R}_{il_1 l_2 j}\right) y^{l_1} y^{l_2} + \underset{1}{a}{}^{\alpha}_{\cdot} \underset{\circ}{R}_{\alpha(ij)l}\, y^l\right] - \underset{2}{b}\, \underset{\circ}{g}_{ij}\right\} + \\ + \sum_{k=3}^{\infty}\left\{(k+1)\underset{k}{a}_{(ij)} + \frac{1}{3}\left[(k-1)\left(a^{\alpha}_{\cdot(i} \underset{\circ}{R}_{j)l_1 l_2 \alpha} - \frac{1}{k-1} \underset{k-2}{b}\, \underset{\circ}{R}_{il_1 l_2 j}\right) y^{l_1} y^{l_2} + \right.\right. \\ \left.\left. + \underset{k-2}{a}{}^{\alpha}\, \underset{\circ}{R}_{il_1 l_2 j}\right) y^{l_1} y^{l_2} + \underset{k-2}{a}{}^{\alpha}\, \underset{\circ}{R}_{\alpha(ij)l}\, y^l\right] - \underset{k}{b}\, \underset{\circ}{g}_{ij}\right\} = 0\end{gathered} \tag{1.10}$$

Так как приведенные коэффициенты при $y^{l_1}, y^{l_2}, \ldots, y^{l_n}$ должны обращаться в нуль, то из (1.10) получаем (1.7), а также

$$2! a_{(ij)l_1} + \frac{1}{3} a^{\alpha}_{\cdot} \underset{\circ}{R}_{\alpha(ij)l_1} - b_{l_1} \underset{0}{g}_{ij} = 0 \tag{1.11}$$

$$3! a_{(ij)l_1 l_2} + \frac{1}{3}\left[a^{\alpha}_{\cdot(i} \underset{\circ}{R}_{j)(l_1 l_2)\alpha} + a^{\alpha}_{\cdot(l_1} \underset{\circ}{R}_{l_2)(ij)\alpha} - b \underset{\circ}{R}_{i(l_1 l_2)j}\right] = 0 \tag{1.11'}$$

$$\begin{gathered} p! a_{(ij)l_1 \ldots l_{p-1}} + \frac{1}{3} \underset{l_1 \ldots l_{p-1}}{S}\left[a^{\alpha}_{\cdot l_1 \ldots l_{p-3}(i} \underset{\circ}{R}_{j)(l_{p-2} l_{p-1}\alpha)} + a^{\alpha}_{\cdot l_1 \ldots l_{p-2}} \underset{\circ}{R}_{\alpha(ij)l_{p-1}} + \right. \\ \left. + b_{l_1 \ldots l_{p-3}} \underset{\circ}{R}_{il_{p-2} l_{p-1} j}\right] - (p-1)! b_{l_1 \ldots l_{p-1}} \underset{\circ}{g}_{ij} = 0 \\ (p = 4, 5, \ldots) \end{gathered} \tag{1.11''}$$

($\underset{l_1 \ldots l_{p-1}}{S}$ означает операцию симметрирования по индексам $l_1 \ldots l_{p-1}$).

Уравнения (1.11) проальтернируем по индексам j и l_1, результат просимметрируем по индексам i и j, приняв во внимание уравнения (1.11), результат свернем с $y^i y^j \underset{\circ}{g}{}^{l_1 h}$:

$$\underset{2}{a}{}^{h}_{\cdot} = a^{\alpha} t^h_\alpha + \frac{1}{2}\left(\underset{1}{b}\, y^h - \frac{1}{2} b^h\, \underset{\circ}{g}_{l_1 l_2}\, y^{l_1} y^{l_2}\right) \tag{1.12}$$

Поступая аналогичным образом с уравнениями (1.11′), получаем

$$\underset{3}{a}^h_{\cdot} = \frac{1}{3}\left(\underset{2}{b}\, y^h - \frac{1}{2}\underset{1}{b}^h \underset{\circ}{g}_{l_1 l_2}\, y^{l_1} y^{l_2}\right) \tag{1.13}$$

Уравнения (1.11″) свернем с $y^{l_2} y^{l_3} \dots y^{l_{p-1}}$ и воспользуемся обозначениями (1.5), (1.6) и (1.9):

$$\begin{gathered}(p-1)\left(p\,\underset{p-2}{a}_{(ij)l_1} - \underset{p-2}{b}_{l_1}\,\underset{\circ}{g}_{ij}\right) + \frac{1}{3}\Bigg\{(p-2)\Bigg[3(p-3)\left(\underset{p-2}{a}^{\alpha}_{(i}\, t_{j)\alpha} - \frac{1}{p-2}\underset{p-2}{b}_{l_1}\, t_{ij}\right) + \\ + \left(\underset{p-3}{a}^{\alpha}_{(i}\,\underset{\circ}{R}_{j)(l_1 m)\alpha} - \frac{1}{p-2}\underset{p-3}{b}\,\underset{\circ}{R}_{i(l_1 m)j} + \underset{p-2}{a}^{\alpha}_{\cdot}\,\underset{\circ}{R}_{\alpha(ij)l_1}\, y^m\right)\Bigg] + \\ \underset{\circ}{a}^{\alpha}_{\cdot l_1 \dots l_{p-2}}\, \underset{\circ}{R}_{\alpha(ij)l_{p-1}}\Bigg\} = 0\end{gathered} \tag{1.14}$$

Проальтернируем (1.14) по индексам j и l_1, результат просимметрируем по индексам i и j приняв во внимание уравнения (1.14), получаем:

$$\begin{gathered}2p(p-1)\,\underset{p-2}{a}_{l_1(ij)} = \frac{1}{3}\Bigg\{(p-2)\Bigg[3(p-3)\left(-2\,\underset{p-2}{a}^{\alpha}_{ij}\, t_{\alpha l_1} - \frac{1}{p-2}\left(\underset{p-2}{b}_{l_1}\, t_{ij} - \underset{p-2}{b}_{(i}\, t_{j)l_1}\right)\right) + \\ + \Bigg(\underset{p-3}{a}^{\alpha}_{(i}\,\underset{\circ}{R}_{j)(l_1 m)\alpha} - \underset{p-3}{a}^{\alpha}_{(i}\,\underset{\circ}{R}_{l_1)(jm)\alpha} - \underset{p-3}{a}^{\alpha}_{(j}\,\underset{\circ}{R}_{l_1)(im)\alpha} + \underset{p-3}{a}^{\alpha}_{l_1}\,\underset{\circ}{R}_{\alpha(ij)m} - \underset{p-3}{a}^{\alpha}_{(i}\,\underset{\circ}{R}_{j)(\alpha m)l_1} - \\ - \frac{2}{p-2}\underset{p-3}{b}\,\underset{\circ}{R}_{i(l_1 m)j}\Bigg) y^m\Bigg] + \underset{p-2}{a}^{\alpha}_{\cdot}\,\underset{\circ}{R}_{\alpha(ij)l_1}\Bigg\} + (p-1)\left(\underset{p-2}{b}_{(i}\,\underset{\circ}{g}_{j)l_1} - \underset{p-2}{b}_{l_1}\,\underset{\circ}{g}_{ij}\right)\end{gathered}$$

Свернув последнее соотношение с $y^i y^j \underset{\circ}{g}^{l_1 h}$ и приняв во внимание (1.5), (1.6), (1.9) и алгебраические свойства тензора Римана, получаем (1.8).

Замечание 1 *Формулы (1.8) дают выражение p-х членов рядов (1.4) через их (p-1)-е члены, объекты пространства $\widetilde{V}_n^2$ в окрестности точки M_0 и члены рядов (1.6).*

Используя найденные рекуррентные представления, получим формулу общего члена рядов (1.4).

Лемма 2 *Для того чтобы ряды (1.4) определяли компоненты вектора смещения аналитических бесконечно малых конформных преобразований в пространстве $\widetilde{V}_n^2$, необходимо, чтобы a^h удовлетворяли уравнениям (1.7),* *а все последующие члены рядов имели вид:*

$$
\begin{gathered}
\underset{2}{a^{h}_{\cdot}} = a^{\alpha} t^{h}_{\alpha} + \frac{1}{2}\left(\underset{1}{b}\, y^{h} - \frac{1}{2} b^{h} \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2}\right) \\
\underset{2p}{a^{h}_{\cdot}} = \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} a^{\alpha} t^{(p)h}_{\alpha} + \frac{1}{2p}\left(\underset{2p-1}{b}\, y^{h} - \frac{1}{2}\underset{2p-2}{b^{h}} \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2}\right) + \\
+\frac{(-1)^{p}}{4(2p-1)} \sum_{s=1}^{p-1} \frac{2p-2s-1}{p-s} \underset{2p-2s-1}{b^{\alpha}}\, t^{(s)h}_{\alpha} \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2} \quad (p = 2, 3, \ldots)
\end{gathered} \tag{1.15}
$$

$$
\begin{gathered}
\underset{3}{a^{h}_{\cdot}} = \frac{1}{3}\left(\underset{2}{b}\, y^{h} - \frac{1}{2}\underset{1}{b^{h}} \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2}\right) \\
\underset{5}{a^{h}_{\cdot}} = \frac{1}{12}\underset{1}{b^{\alpha}}\, t^{h}_{\alpha} \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2} + \frac{1}{5}\left(\underset{4}{b}\, y^{h} - \frac{1}{2}\underset{3}{b^{h}} \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2}\right) \\
\underset{2p+1}{a^{h}_{\cdot}} = \frac{1}{2p+1}\left(\underset{2p}{b}\, y^{h} - \frac{1}{2}\underset{2p-1}{b^{h}} \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2}\right) + \frac{1}{2p}\left[\frac{p+1}{2p+1}\underset{2p-3}{b^{\alpha}}\, t^{h}_{\alpha} + \right. \\
\left. + \sum_{s=2}^{p-1} \frac{(-1)^{s+1}(p-s)}{2p-2s+1} \underset{2p-2s+1}{b^{\alpha}}\, t^{s(h)}_{\alpha}\right] \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2} \quad (p = 3, 4, \ldots)
\end{gathered} \tag{1.16}
$$

Доказательство. Из соотношения (1.8) при $p = 2$ имеем

$$
\underset{2}{a^{h}_{\cdot}} = a^{\alpha}_{\cdot} t^{h}_{\alpha} + \frac{1}{2}\left(\underset{1}{b}\, y^{h} - \frac{1}{2} b^{h} \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2}\right) \tag{1.17}
$$

Далее из (1.8) при $p = 4$ с учетом (1.17) следует, что

$$
\underset{4}{a^{h}_{\cdot}} = -\frac{1}{3} a^{\alpha}_{\cdot} t^{(2)h}_{\alpha} + \frac{1}{3\cdot 4} b^{h} t^{h}_{\alpha} \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2} + \frac{1}{4}\left(\underset{3}{b}\, y^{h} - \frac{1}{2}\underset{2}{b^{h}} \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2}\right) \tag{1.18}
$$

Но к такому же результату мы приходим из (1.15) при $p = 2$. Таким образом, формулы (1.15) верны для $p = 2$. Пусть они имеют место для $p = m$, т.е.

$$
\begin{gathered}
\underset{2m}{a^{h}_{\cdot}} = \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} a^{\alpha} t^{(m)h}_{\alpha} + \frac{(-1)^{m}}{4(2m-1)}\left[\frac{2m-3}{m-1}\underset{2m-4}{b^{\alpha}}\, t^{h}_{\alpha} + \frac{2m-5}{m-2}\underset{2m-6}{b^{\alpha}}\, t^{(2)h}_{\alpha} + \right. \\
\left. + \frac{2m-7}{m-3}\underset{2m-5}{b^{\alpha}}\, t^{(3)h}_{\alpha} + \ldots + b^{\alpha} t^{(m-1)h}_{\alpha}\right] \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2} + \frac{1}{2m}\left(\underset{2m-1}{b}\, y^{h} - \frac{1}{2}\underset{2m-2}{b^{h}} \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2}\right)
\end{gathered}
$$

Докажем, что она имеет место и для $p = m + 1$.

Действительно, из Леммы 1 следует, что

$$
\underset{2m+2}{a^{h}_{\cdot}} = \left[-\frac{2m-1}{2m+1}\underset{2m}{a^{\alpha}}\, t^{h}_{\alpha} + \frac{1}{2m+2}\left(\underset{2m+1}{b}\, y^{h} - \frac{1}{2}\underset{2m}{b^{h}} \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2}\right)\right] \tag{1.19}
$$

Учитывая (1.19), получаем, что

$$\underset{2m+2}{a^h_{\cdot}} = -\frac{2m-1}{2m+1}\left\{\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}a^\beta t^{(m)\alpha}_\beta + \frac{(-1)^{(m+1)}}{4(2m-1)}\left[\frac{2m-3}{m-1}\underset{2m-4}{b^\beta}\, t^\alpha_\beta + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{2m-5}{m-2}\underset{2m-6}{b^\beta}\, t^{(2)\alpha}_\beta + \, + \ldots + b^\beta t^{(m-1)\alpha}_\beta\right] \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2} + \frac{1}{2m}\left(\underset{2m+1}{b}\, y^h - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2}\underset{2m-2}{b^\alpha}\, \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2}\right)\right\} + \frac{1}{2m+2}\left(\underset{2m+1}{b}\, y^h - \frac{1}{2}\underset{2m}{b^h}\, \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2}\right)$$

Раскрывая скобки и принимая во внимание алгебраические свойства тензора Римана, приходим к (1.15). Аналогично доказывается справедливость формул (1.16).

Исследуем сходимость рядов, члены которых находятся из формул (1.15) и (1.16). Справедливо утверждение.

Лемма 3 *Ряды (1.4), члены которых определяются формулами (1.15) и (1.16) сходятся абсолютно и равномерно на множестве*

$$|\underset{\circ}{R^h_{\cdot l_1 l_2 k}}\, y^{l_1} y^{l_2}| \le \frac{3c}{n} \quad (c < 1)$$

Доказательство. Доказательство проведем для (1.15) (для (1.16) доказывается аналогично). Очевидно, что

$$|\underset{2p}{a^h_{\cdot}}| \le |\frac{(-1)^{(p+1)}}{2p-1} a^\alpha_{\cdot} t^{(p)h}_{\ \alpha}| + |\frac{1}{2p}\underset{2p-1}{b}\, y^h| + \frac{1}{4p}|\underset{2p-2}{b^h}\, \underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2}| +$$
$$\frac{1}{4}|\frac{(-1)^p}{2p-1}\sum_{s=1}^{p-1}\frac{2p-2s-1}{p-s}\underset{2p-2s-2}{b^\alpha}\, t^{(s)h}_\alpha| \cdot |\underset{\circ}{g_{l_1 l_2}}\, y^{l_1} y^{l_2}|$$

Оценим каждый модуль отдельно. Введем следующие обозначения:

$$max\left\{|t^h_k|\right\} = \frac{c}{n}, \quad max\left\{|a^h|\right\} = c_1.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$|t^{(2)h}_k| = |t^h_\alpha \cdot t^\alpha_k| \le |t^h_\alpha| \cdot |t^\alpha_k| \le \frac{c}{n}\cdot\frac{c}{n}\cdot n = \frac{c^2}{n}$$

$$|t^{(3)h}_k| \le \frac{c^3}{n}$$

$$\ldots$$
$$|t^{(p)h}_k| \le \frac{c^p}{n}$$

Поэтому

$$|\frac{(-1)^{(p+1)}}{2p-1} a^{\alpha} t^{(p)h}_{\alpha}| \leq c_1 \cdot \frac{c^p}{n}$$

Следовательно, ряды $\sum\limits_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p-1} a^{\alpha} t^{(p)}{}^{h}_{\alpha}$ мажорируются числовым рядом $\sum\limits_{p=2}^{\infty} c^p$, который сходится при $c < 1$. По теореме Вейерштрасса ([5]) указанные ряды сходятся абсолютно и равномерно на множестве

$$|\underset{\circ}{R}{}^{h}_{\cdot l_1 l_2 k}\, y^{l_1} y^{l_2}| \leq \frac{3c}{n},$$

где $c < 1$. Далее, ряды $\sum\limits_{p=2}^{\infty} \frac{1}{2p} \underset{2p-1}{b}$ и $\sum\limits_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p} \underset{2p-2}{b^h}$ сходятся в силу аналитичности функции $\psi(y)$ из (1.6).

Рассмотрим ряды:

$$\lambda^h = \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{s=1}^{p-1} \frac{2p-2s-1}{2p-2s-2} \underset{2p-2s-2}{b^{\alpha}}\, t^{(s)h}_{\alpha} \tag{1.20}$$

Нетрудно показать, что (1.20) можно записать в эквивалентном виде:

$$\lambda^h = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k+1} \underset{2k}{b^{\alpha}} \sum_{s=1}^{\infty} t^{(s)h}_{\alpha} \quad (\underset{\circ}{b^{\alpha}} = b^{\alpha})$$

Поэтому

$$|\sum_{p=2}^{\infty} \sum_{s=1}^{p-1} \frac{2p-2s-1}{p-s} \underset{2p-2s-2}{b^{\alpha}}\, t^{(s)}{}^{h}_{\alpha}| = |\sum_{s=1}^{\infty} t^{(s)}{}^{h}_{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k+1} \underset{2k}{b^{\alpha}}| \leq$$
$$\leq 2 \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |t^{(s)}{}^{h}_{\alpha} \underset{2k}{b^{\alpha}}|$$

Но

$$|t^{(s)}{}^{h}_{\alpha} \underset{2k}{b^{\alpha}}| \leq |t^{(s)}{}^{h}_{\alpha}| \cdot |\underset{2k}{b^{\alpha}}| = \frac{c^s}{n} \sum_{m=1}^{n} |\underset{2k}{b^m}|$$

Таким образом,

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |t^{(s)}{}^{h}_{\alpha} \underset{2k}{b^{\alpha}}| \leq \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^s}{n} \left(|\underset{2k}{b^1}| + |\underset{2k}{b^2}| + \ldots + |\underset{2k}{b^n}| \right) = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\infty} c^s \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} |\underset{2k}{b^m}| \right)$$

Числовой ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty} c^s$ сходится при $c < 1$, ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{n} |\underset{2k}{b}^m|$ сходятся в силу аналитичности функции $\psi(y)$ из (1.6). Лемма доказана.

Из уравнений (1.8) и (1.10) имеем:

$$2p\,\underset{2p-1}{a}_{(ij)} = \left\{-\frac{2p-3}{2p-1}\left[(2p-2)\,\underset{2p-3}{a}{}^{\alpha}_{(i}\; t_{j)\alpha} - \underset{2p-2}{a_{\alpha}}\,\mu^{\alpha}_{ij}\right] + \right.$$
$$\left. +\frac{1}{p}\left[(p-1)\left(\underset{2p-2}{b}{}_{(i}\;\overset{\circ}{g}_{j)l}\,y^l - \underset{2p-3}{b}{}_{ij}\;\overset{\circ}{g}_{l_1l_2}\,y^{l_1}y^{l_2}\right) + \underset{2p-1}{b}{}_{ij}\;\overset{\circ}{g}_{ij}\right]\right\} \tag{1.21}$$

$$(2p+3)\,\underset{2p+2}{a}_{(ij)} = \left\{-\frac{p}{p+1}\left[(2p+1)\,\underset{2p}{a}{}^{\alpha}_{(i}\; t_{j)\alpha} - \underset{2p+1}{a_{\alpha}}\,\mu^{\alpha}_{ij}\right] + \right.$$
$$\left. +\frac{1}{2p+3}\left[(2p+1)\left(\underset{2p+1}{b}{}_{(i}\;\overset{\circ}{g}_{j)l}\,y^l - \underset{2p}{b}{}_{ij}\;\overset{\circ}{g}_{l_1l_2}\,y^{l_1}y^{l_2}\right) + \underset{2p+2}{b}{}_{ij}\;\overset{\circ}{g}_{ij}\right]\right\} \tag{1.22}$$

Подстановка соотношений (1.1), (1.8), (1.10), (1.7) и (1.22) в уравнения (1.8) дает

$$a_{(ij)} = b\,\underset{0}{g}_{ij}$$

$$\frac{4p}{2p+1}\left(\underset{2p-1}{a}{}^{\alpha}_{(i}\; t_{j)\alpha} + \underset{2p}{a_{\alpha}}\,\mu^{\alpha}_{ij}\right) + \frac{p}{p+1}\left(\underset{2p}{b}{}_{(i}\;\overset{\circ}{g}_{j)l}\,y^l - \underset{2p+1}{b}\;\overset{\circ}{g}_{ij} - \right.$$
$$\left. - \underset{2p-1}{b}{}_{ij}\;\overset{\circ}{g}_{l_1l_2}\,y^{l_1}y^{l_2}\right) - \underset{2p-1}{b}\,t_{ij} = 0 \quad p = 1, 2, \ldots \tag{1.23}$$

$$\frac{2m+1}{m+1}\left(\underset{2m}{a}{}^{\alpha}_{(i}\; t_{j)\alpha} + \underset{2m+1}{a_{\alpha}}\,\mu^{\alpha}_{ij}\right) + \frac{2m+1}{2m+3}\left(\underset{2m+1}{b}{}_{(i}\;\overset{\circ}{g}_{j)l}\,y^l - \underset{2m+2}{b}\;\overset{\circ}{g}_{ij} - \right.$$
$$\left. - \underset{2m}{b}{}_{ij}\;\overset{\circ}{g}_{l_1l_2}\,y^{l_1}y^{l_2}\right) - \underset{2m}{b}\,t_{ij} = 0 \quad m = 0, 1, \ldots \tag{1.24}$$

Таким образом, доказано утверждение:

Лемма 4 *Для того, чтобы ряды (1.4), члены которых находятся из рекуррентных соотношений (1.8)-(1.10), определяли компоненты вектора смещения аналитических бесконечно малых конформных преобразований в пространстве $\widetilde{V}_n^2$, необходимо выполнение уравнений (1.7), (1.23) и (1.24).*

Объединяя Леммы 1-4, получаем теорему.

Теорема 1 *Для того, чтобы ряды (1.4) определяли компоненты вектора смещения, аналитических бесконечно малых конформных преобразований в пространстве* $\widetilde{V}_n^2$, *необходимо и достаточно выполнение условий (1.7), (1.15), (1.16), (1.23) и (1.24).*

Рассмотрим уравнение (1.24) при $m=0$:

$$a^{\alpha}_{(i} \underset{\circ}{R}_{j)(l_1l_2)\alpha} + \underset{l_1l_2}{S}\left[a^{\alpha}_{\cdot l_1} \underset{\circ}{R}_{\alpha(ij)l_2} + b_{l_1(i} \underset{\circ}{g}_{j)l_2} - b_{l_1l_2} \underset{\circ}{g}_{ij} - b_{ij} \underset{\circ}{g}_{l_1l_2i} - b \underset{\circ}{R}_{il_1l_2j}\right] = 0$$

Свертывание последнего соотношения с $\underset{\circ}{g}_{l_1l_2} \underset{\circ}{g}^{ij}$ на основании (1.7) дает

$$b_{ij} \underset{\circ}{g}^{\alpha\beta} = \frac{bR}{2(n-1)}$$

Свертывая теперь (1.21) с $\underset{\circ}{g}^{l_1l_2} \underset{\circ}{g}^{ij}$ и принимая во внимание последнее равенство находим b_{ij}:

$$b_{ij} = \frac{1}{n-2}\left[a^{\alpha}_{\cdot(i} \underset{\circ}{R}_{j)\alpha} - \frac{bR}{2(n-1)} \underset{\circ}{g}_{ij}\right] \tag{1.25}$$

Аналогично поступая с уравнениями (1.23) при $p=1$, используя (1.10), получаем выражение $b_{l_1l_2l_3}$ через $b, b_{l_1}, a_{l_1}, a_{l_1l_2}$ и объекты пространства $\widetilde{V}_n^2$ в точке M_0. Далее из (1.24) при $m=1$ находим выражение $b_{l_1l_2l_3l_4}$ через те же объекты. Продолжая этот процесс, убеждаемся в том, что все члены ряда (1.6) за исключением b и $\underset{1}{b}$ выражаются через a_{l_1}, $a_{l_1l_2}$ и объекты пространства $\widetilde{V}_n^2$ в точке M_0.

Замечание 2 *Так как члены рядов (1.4) выражаются через* a^h, $\underset{1}{a}^h$, b, $\underset{1}{b}$ *и объекты пространства* $\widetilde{V}_n^2$ *в точке* M_0, *то учитывая уравнения (1.7), (1.23) и (1.24). приходим к известному результату ([4]) о том, что максимальный порядок* r *группы Ли аналитических бесконечно малых конформных преобразований в римановом пространстве второго приближения* $\widetilde{V}_n^2$ *удовлетворяет неравенству*

$$r \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

2 Конформные преобразования второй степени

Рассмотрим бесконечно малые конформные преобразования второй степени в пространстве второго приближения $\widetilde{V}_n^2$ для риманова пространства V_n, скалярная кривизна R которого в точке M_0 отлична от нуля. Так как в этом случае в (1.4)

$$\underset{p}{a}^{h}=0\quad (p\geq 3) \tag{2.1}$$

то из уравнений (1.7) и рекуррентных соотношений (1.8) - (1.10) следует

$$a_{(ij)}=\underset{0}{b}\,g_{ij} \tag{2.2}$$

$$\underset{2}{a}^{h}_{\cdot}=a^{\alpha}_{\cdot}t^{h}_{\alpha}+\frac{1}{2}\left(\underset{1}{b}\,y^{h}-\frac{1}{2}b^{h}_{\cdot}\,\underset{\circ}{g}_{l_1l_2}\,y^{l_1}y^{l_2}\right) \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{3}\underset{2}{a}^{\alpha}_{\cdot}\,t^{h}_{\alpha}+\frac{1}{4}\left(\underset{3}{b}\,y^{h}-\frac{1}{2}\underset{2}{b}^{h}_{\cdot}\,\underset{\circ}{g}_{l_1l_2}\,y^{l_1}y^{l_2}\right)=0 \tag{2.4}$$

$$\left[\underset{2m-1}{b}\,y^{h}-\frac{1}{2}\underset{2m-2}{b}^{h}_{\cdot}\,\underset{\circ}{g}_{l_1l_2}\,y^{l_1}y^{l_2}\right]=0\quad (m\geq 3) \tag{2.5}$$

$$\left[\underset{2k}{b}\,y^{h}-\frac{1}{2}\underset{2k-1}{b}^{h}_{\cdot}\,\underset{\circ}{g}_{l_1l_2}\,y^{l_1}y^{l_2}\right]=0\quad (k=1,2,\ldots) \tag{2.6}$$

На основании (2.1) уравнения (1.23) - (1.24) принимают вид:

$$\begin{gathered}\frac{4}{3}\left[\underset{1}{a}^{\alpha}_{(i}\,t_{j)\alpha}+\underset{2}{a}_{\alpha}\,\mu^{\alpha}_{ij}\right]+\\ +\frac{1}{2}\left[b_{(i}\,\underset{\circ}{g}_{j)l}\,y^{l}-\underset{3}{b}\,\underset{\circ}{g}_{ij}-\underset{1}{b}_{ij}\,\underset{\circ}{g}_{l_1l_2}\,y^{l_1}y^{l_2}\right]-\underset{1}{b}\,t_{ij}=0\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\frac{p}{p+1}\left[\underset{2p}{b}_{(i}\,\underset{\circ}{g}_{j)l}\,y^{l}-\underset{2p+1}{b}\,\underset{\circ}{g}_{ij}-\underset{2p-1}{b}_{ij}\,\underset{\circ}{g}_{l_1l_2}\,y^{l_1}y^{l_2}\right]-\underset{2p-1}{b}\,t_{ij}=0\\ (p=2,3,\ldots)\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}\left[a^{\alpha}_{(i}\,t_{j)\alpha}+\underset{1}{a}_{\alpha}\,\mu^{\alpha}_{ij}\right]+\\ +\frac{1}{3}\left[\underset{1}{b}_{(i}\,\underset{\circ}{g}_{j)l}\,y^{l}-\underset{2}{b}\,\underset{\circ}{g}_{ij}-b_{ij}\,\underset{\circ}{g}_{l_1l_2}\,y^{l_1}y^{l_2}\right]-b\,t_{ij}=0\end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered}\frac{2k+1}{2k+3}\left[\underset{2k+1}{b}_{(i}\,\underset{\circ}{g}_{j)l}\,y^{l}-\underset{2k+2}{b}\,\underset{\circ}{g}_{ij}-\underset{2k}{b}_{ij}\,\underset{\circ}{g}_{l_1l_2}\,y^{l_1}y^{l_2}\right]-\underset{2k}{b}\,t_{ij}=0\\ (k=1,2,\ldots)\end{gathered} \tag{2.10}$$

Рассмотрим уравнения (2.6). Свернем обе части с $\underset{\circ}{g}_{hl}\,y^{l}$:

$$\left(b_{l_1l_2\ldots l_{2k}}\,\underset{\circ}{g}_{l_{2k+1}l_{2k+2}}\right)y^{l_1}\ldots y^{l_{2k+2}}=0$$

Последнее соотношение запишем в эквивалентном виде

$$\underset{l_1 l_2 \dots l_{2k+2}}{S} \left(b_{l_1 l_2 \dots l_{2k}} \underset{\circ}{g}_{l_{2k+1} l_{2k+2}} \right) = 0 \tag{2.11}$$

Свертывание (2.11) с $\underset{\circ}{g}^{l_1 l_2} \underset{\circ}{g}^{l_3 l_4} \dots \underset{\circ}{g}^{l_{2k+1} l_{2k+2}}$ дает:

$$b_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k}} \underset{\circ}{g}^{\alpha_1 \alpha_2} \dots \underset{\circ}{g}^{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} = 0 \tag{2.12}$$

Свернем теперь (2.11) с $\underset{\circ}{g}^{l_3 l_4} \dots \underset{\circ}{g}^{l_{2k+1} l_{2k+2}}$ и примем во внимание (2.12):

$$b_{l_1 l_2 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} \underset{\circ}{g}^{\alpha_1 \alpha_2} \dots \underset{\circ}{g}^{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} = 0 \tag{2.13}$$

Свертывание (2.11) с $\underset{\circ}{g}^{l_5 l_6} \dots \underset{\circ}{g}^{l_{2k+1} l_{2k+2}}$ при условии (2.13) дает

$$b_{l_1 l_2 l_3 l_4 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k-5} \alpha_{2k-4}} \underset{\circ}{g}^{\alpha_1 \alpha_2} \dots \underset{\circ}{g}^{\alpha_{2k-5} \alpha_{2k-4}} = 0 \tag{2.14}$$

Продолжая этот процесс, на $(k-1)$ шаге мы имеем

$$b_{l_1 l_2 \dots l_{2k-2} \alpha \beta} \underset{\circ}{g}^{\alpha \beta} = 0 \tag{2.15}$$

И наконец, свернув с $\underset{\circ}{g}^{l_{2k+1} l_{2k+2}}$ на основании (2.15) убеждаемся в том, что

$$b_{l_1 l_2 \dots l_{2k-2}} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{2.16}$$

Аналогично из (2.5) следует

$$b_{l_1 l_2 \dots l_{2m-1}} = 0 \quad (m = 3, 4, \dots) \tag{2.17}$$

Посклько имеет место (2.16), то все уравнения системы (2.10) выполняются тождественно. Заметим, что согласно (2.17) из сковокупности (2.8) остается только одно - при $p = 2$:

$$\underset{l_1 l_2 \dots l_5}{S} \left(b_{l_1 l_2 l_3} \underset{\circ}{R}_{i l_4 l_5} \right) = 0 \tag{2.18}$$

а остальные выполняются тождественно. Из (2.9) на основании (2.16) имеем:

$$a^{\alpha}_{(i} \underset{\circ}{R}_{j)(l_1 l_2)\alpha} + a^{\alpha}_{(l_1} \underset{\circ}{R}_{l_2)(ij)\alpha} = b \underset{\circ}{R}_{i(l_1 l_2)j}$$

Сворачивая последнее уравнение с $\underset{\circ}{g}^{l_1 l_2}$, получаем:

$$a^{\alpha}_{(i}\underset{\circ}{R}_{j)\alpha} + a_{\alpha\beta}\underset{\circ}{R}^{\alpha}_{\cdot(ij)}{}^{\beta} = b\underset{\circ}{R}_{ij}$$

Но из (2.2) вытекает, что

$$a_{\alpha\beta}\underset{\circ}{R}^{\alpha}_{\cdot(ij)}{}^{\beta} = b\underset{\circ}{R}_{ij},$$

поэтому

$$a^{\alpha}_{(i}\underset{\circ}{R}_{j)\alpha} = 0 \tag{2.19}$$

Свернем (2.19) с $\underset{\circ}{g}^{ij}$, воспользовавшись (2.2) и тем, что скалярная кривизна отлична от нуля, получаем:

$$b = 0 \tag{2.20}$$

Принимая во внимание соотношения (2.16), (2.17) и (2.20), видим, что функция $\psi(y)$ в (1.6) имеет вид

$$\psi(y) = b_l y^l + b_{l_1 l_2 l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} \tag{2.21}$$

Известно ([1],[2]), решение обобщенных уравнений Киллинга (1.3) при $\psi = const$ определяет вектор смещения бесконечно малых гомотетических преобразований в римановом пространстве. Формула (2.21) свидетельствует о справедливости теоремы.

Теорема 2 *Вектор смещения бесконечно малых гомотетических преобразований второй степени в пространстве второго приближения $\widetilde{V}_n^2$ для V_n ненулевой скалярной кривизны в окрестности точки M_0 по необходимости является вектором Киллинга.*

Уравнения (2.9) в соответствии с (2.16) и (2.20) принимают вид

$$a^{\alpha}_{(i}\underset{\circ}{R}_{j)(l_1 l_2)\alpha} + a^{\alpha}_{(l_1}\underset{\circ}{R}_{l_2)(ij)\alpha} = 0 \tag{2.22}$$

Далее из уравнений (2.4) имеем

$$\left[\frac{1}{9}\left(2a^{\alpha}_{jl_1}\underset{\circ}{R}_{\alpha l_2 l_3 j} + a^{\alpha}_{l_1 l_2}\underset{\circ}{R}_{\alpha(jl_3)i}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{4}\left(3b_{jl_1 l_2}\underset{\circ}{g}_{il_3} + b_{l_1 l_2 l_3}\underset{\circ}{g}_{ij} - b_{ijl_1}\underset{\circ}{g}_{l_2 l_3} - b_{il_1 l_2}\underset{\circ}{g}_{jl_3}\right)\right]\underset{\circ}{|}\, y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} = 0$$

Просимметрировав последнее соотношение по индексам i и j, на основании (2.7) получаем

$$\begin{gathered}\Big\{ a^{\alpha}_{l_1 l_2} \underset{\circ}{R}_{\alpha(ij)l_3} - \frac{1}{2} b_{l_1} \underset{\circ}{R}_{il_2l_3j} + \\ + \frac{3}{4}\Big[3\Big(b_{l_1l_2(i}\underset{\circ}{g}_{j)l_3} - b_{ijl_1}\underset{\circ}{g}_{l_2l_3}\Big) + b_{l_1l_2l_3}\underset{\circ}{g}_{ij}\Big]\Big\}\underset{\circ}{|}\, y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3}=0\end{gathered} \qquad (2.23)$$

Уравнения (2.23) свернем с y^l и результат подставим в (2.4):

$$\left(\frac{1}{3} b_{l_1l_2l_3}\delta^h_{l_4} + \frac{1}{2} b^h_{l_1l_2}\underset{\circ}{g}_{l_3l_4}\right) y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3}y^{l_4} = 0$$

Из последнего уравнения подобно тому, как получено (2.16), получаем:

$$b_{l_1l_2l_3} = 0 \qquad (2.24)$$

На основании (2.24) уравнения (2.18) (а тогда и все уравнения системы (2.8)) выполняются тождественно.

Подставляя (2.24) в (2.23), получаем:

$$\left(a^{\alpha}_{l_1 l_2} \underset{\circ}{R}_{\alpha(ij)l_3} - \frac{1}{2} b_{l_1} \underset{\circ}{R}_{il_2l_3j}\right) y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} = 0 \qquad (2.25)$$

$$\left(a^{\alpha}_{l_1 l_2} \underset{\circ}{R}^{h}_{\cdot l_3l_4\alpha}\right) y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3}y^{l_4} = 0 \qquad (2.26)$$

Легко видеть, что уравнения (2.26) (а тогда и уравнения (2.4)) выполняются тождественно вследствие (2.25).

Продифференцировав (2.26) по y^i, опустив h с помощью $\underset{\circ}{g}_{hi}$, результат просимметрируем по индексам i и j и учтем (2.25):

$$\left(a^{\alpha}_{l_1 (i} \underset{\circ}{R}_{j)l_2l_3\alpha} - \frac{1}{4} b_{l_1} \underset{\circ}{R}_{il_2l_3j}\right) y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} = 0 \qquad (2.27)$$

Тогда очевидно, что уравнения (2.7) есть не что иное, как сумма уравнений (2.25) и (2.27) при условии (2.24).

Подстановка (2.3) в (2.25) и (2.24) в (2.21) дает соответственно

$$\underset{l_1l_2l_3}{C}\left[a^{\alpha}_{\cdot} \underset{\circ}{R}_{\alpha(l_1l_2)\beta} \underset{\circ}{R}^{\beta}_{\cdot(ij)l_3} - \frac{3}{2}\left(b_{\alpha}\underset{\circ}{R}^{\alpha}_{\cdot(ij)l_1}\underset{\circ}{g}_{l_2l_3} - b_{l_1}\underset{\circ}{R}_{i(l_2l_3)j}\right)\right] = 0 \qquad (2.28)$$

$$\psi(y) = b_l y^l \qquad (2.29)$$

В результате проведенных рассуждений приходим к теореме

Теорема 3 *В пространстве второго приближения $\widetilde{V}_n^2$ для риманова пространства V_n ненулевой скалярной кривизны в точке M_0 существуют бесконечно малое конформное преобразование второй степени вида*

$$\widetilde{\xi}^h = a^h_{\cdot} + a^h_{\cdot l} y^l + a^h_{\cdot l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2},$$

отличное от движения тогда и только тогда, когда

$$a_{(ij)} = 0$$

$$a^{\alpha}_{\cdot(i} \underset{\circ}{R}_{j)(l_1 l_2)\alpha} + a^{\alpha}_{\cdot(l_1} \underset{\circ}{R}_{l_2)(ij)\alpha} = 0$$

$$\underset{2}{a}{}^h_{\cdot} = a^{\alpha}_{\cdot} t^h_{\alpha} + \frac{1}{2}\left(\underset{1}{b}\, y^h - \frac{1}{2} b^h \underset{\circ}{g}_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2}\right)$$

$$\underset{l_1 l_2 l_3}{C}\left[a^{\alpha}_{\cdot} \underset{\circ}{R}_{\alpha(l_1 l_2)\beta} \underset{\circ}{R}{}^{\beta}_{\cdot(ij)l_3} - \frac{3}{2}\left(b_{\alpha} \underset{\circ}{R}{}^{\alpha}_{\cdot(ij)l_1} \underset{\circ}{g}_{l_2 l_3} - b_{l_1} \underset{\circ}{R}_{i(l_2 l_3)j}\right)\right] = 0$$

$$\psi(y) = b_l y^l \quad (b_l \neq 0)$$

3 Приближенные конформные преобразования

Подобно тому, как вводилось понятие приближенного вектора Киллинга ([3]) определяется приближенный обобщенный вектор Киллинга.

Определение *Вектор $\xi^h(x)$ называется приближенным конформным вектором Киллинга второго порядка в окрестности точки M_0 риманова пространства V_n, если для него в этой точке выполняются обобщенные уравнения Киллинга и их ковариантные дифференцированное продолжение первого порядка.*

Бесконечно малое преобразование риманова пространства V_n, которое порождается приближенным конформным вектором Киллинга второго порядка, называется приближенным бесконечно малым конформным преобразованием второго порядка.

То аналогично с Теоремой 8 ([3]) доказываются утверждения.

Теорема 4 *Приближенный конформный вектор Киллинга $\xi^h(x)$ риманова пространства V_n ненулевой скалярной кривизны R в точке M_0 определяется в пространстве второго приближения $\widetilde{V}_n^2$ вектора второй степени $\widetilde{\xi}^h(y)$, который является приближенным обобщенным вектором Киллинга второго порядка в окрестности точки M_0.*

Теорема 5 *Бесконечно малое конформное преобразование второй степени в пространстве второго приближения* $\widetilde{V}_n^2$ *для риманова пространства* V_n *ненулевой скалярной кривизны* R *в точке* M_0 *реализует приближенные бесконечно малое конформное преобразование второго порядка в окрестности точки* M_0 *исходного* V_n, *отнесенного к римановой системе координат с началом в этой точке.*

Список литературы

1. Эйзенхарт Л.П.: Риманова геометрия. М, ИЛ, 1948, 316 стр.
2. Эйзенхарт Л.П.: Непрерывные группы преобразований. М, ИЛ, 1947, 287 стр.
3. Покась С.М.: Группы Ли движений в римановом пространстве второго приближения. Известия Пензенского государственного университета имени В.Г. Белинского, физико-математические науки, №26, 2011, стр. 173-183
4. Петров А.З.: Новые методы в теории относительности. М, Наука, 1966, 495 стр.
5. Будак Б.М., Фомин С.В.: Краткие интегралы и ряды. М, Наука, 1967, 607 стр.

Сергей Михайлович Покась

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, кафедра геометрии и топологии, Одесса, Украина

E-mail: pokas@onu.edu.ua

Sergey M. Pokas

Infinitesimal conformal transformations in a Riemannian space of the second approximation

We discuss analytic conformal transformations, introduce and examine second degree conformal movements in a Riemannian space of the second approximation. Established a connection between conformal movements and approximate conformal movements in spaces V_n and $\widetilde{V}_n^2$.