Proc. Intern. Geom. Center 2014 **7**(3)58–66 *dω*

Про комбінаторний інваріант псевдогармонічних функцій, заданих на $k-$зв'язній замкненій області

І.А. Юрчук

Анотація Нехай $f : D \to \mathbb{R}$ – псевдогармонічна функція, яка задана на $k-$зв'язній орієнтованій замкненій області $D \subset \mathbb{C}$, обмеженій жордановими кривими $\gamma_0,\ \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_k,\ 0 \leq k < \infty$. Нагадаємо, що даний клас функцій співпадає із класом неперервних функцій, що мають скінченне число сідлових критичних точок у внутрішності області та скінченне число локальних екстремумів на межі.У роботі [4], авторами повністю досліджено випадок $k = 0$, а саме, побудовано топологічний інваріант даного класу функцій, доведено його основні властивості, критерій їх топологічної еквівалентності та критерій реалізації спеціального класу графів як інваріанту функцій. В даній статті побудовано комбінаторний інваріант $\mathfrak{G}(f)$ функції f у випадку $k-$зв'язної замкненої області, який складається із графів Кронрода-Ріба звуження функції f на межу області D та зв'язних компонент тих ліній рівня критичних та напіврегулярних значень функції, які містять критичні або межові критичні точки. Згідно побудови, $\mathfrak{G}(f)$ є змішаним псевдографом (графом із кратними ребрами та петлями) зі строгим частковим порядком на вершинах, що індукується значеннями функції f. У графа $\mathfrak{G}(f)$ є два типи циклів: C-цикл (простий цикл, кожна пара суміжних вершин якого є порівняною) та L-цикл (простий цикл, кожна пара суміжних вершин якого є непорівняною). Автором доведено теорему про структуру інваріанту, а також той факт, що кількість C-циклів у комбінаторному інваріанті дорівнює кількості межових кривих, які обмежують дану $k-$зв'язну орієнтовану замкнену область.

Ключові слова псевдогармонічна функція, комбінаторний інваріант, $k-$ зв'язна область

УДК 515.173.2

1 Вступ

Псевдогармонічні функції займають важливе місце серед функцій, що описують природничі процеси. Наприклад, потенціал сил тяжіння в області, яка не містить мас, що притягуються; потенціал швидкостей безвихрового руху рідини; температура тіла за умов стабілізації розподілу тепла та ін.

У 40-60-х роках минулого століття з'явилась серія робіт, присвячених вивченню властивостей псевдогармонічних функцій на площині, авторами яких були М.Морс [2], Дж.Дженкінс [3] та В.Каплан [1]. Зокрема, було доведено рівність, що пов'язує числа критичних точок у внутрішності області з числом локальних екстремумів на межі, а також доведено теореми про локальне представлення околів критичних, межових критичних точок та локальних екстремумів на межі та інші результати.

У монографії [4] доведено критерій топологічної еквівалентності даного класу функцій на диску в термінах комбінаторних інваріантів, що побудовані за функціями і містять повну інформацію про їх поведінку, та критерії реалізації графа як інваріанта.

В даній роботі розглядаються псевдогармонічні функції, що задані на k-зв'язній орієнтованій замкненій області D, $D \subset \mathbb{C}$. Кожній функції з розглядуваного класу ставиться у відповідність комбінаторний інваріант – змішаний нсевдограф зі строгим частковим порядком на вершинах. Автором доведено ряд теорем, що описують структуру даного інваріанту.

Автор висловлює подяку старшому науковому співробітнику відділу топології Інституту математики НАНУ Полуляху Євгену за корисні обговорення та цікавість до даної тематики.

2 Попередні відомості

Позначимо через D, $D \subset \mathbb{C}$ k-зв'язну орієнтовану замкнену область, яка обмежена жордановими кривими $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$, $0 \le k < \infty$. Припустимо, що γ_i, $i = \overline{1,k}$, лежать в середині γ_0.

Нехай $f : D \to \mathbb{R}$ – деяка псевдогармонічна функція. Нагадаємо основні означення, що пов'язані з даним класом функцій [2,3,4,5].

Функція $f(x, y)$ *гармонічна* в точці (x_0, y_0), якщо

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0.$$

Функція $f(z)$ *псевдогармонічна* в точці $z_0 = (x_0, y_0)$, якщо існує окіл $U(z_0)$ та гомеоморфізм φ околу $U(z_0)$ в себе такий, що $\varphi(z_0) = z_0$ та $f(\varphi(z))$, $z = (x, y)$, – гармонічна. Функція f псевдогармонічна в області, якщо вона псевдогармонічна в кожній її точці. Точка $z_0 \in D$ є *регулярною* точкою f, якщо існує відкритий її окіл $U \subseteq D$ і гомеоморфізм $\varphi : U \to D$ такий, що $\varphi(z_0) = 0$ і $f \circ \varphi^{-1}(z) = Rez + f(z_0)$ для всіх $z \in U$. Точка $z_0 \in \partial D$ є *регулярною межовою* точкою f, якщо існує її окіл U в D та гомеоморфізм $h : U \to D_+$ цього околу в верхній напівдиск D_+ такий, що $h(z_0) = 0$, $h(U \cap f^{-1}(f(z_0))) = \{0\} \times [0, 1)$, $h(U \cap \partial D^2) = (-1, 1) \times \{0\}$ і функція $f \circ h^{-1}$ є строго монотонна на інтервалі $(-1, 1) \times \{0\}$. Якщо точка $z_0 \in D$ не є регулярною точкою f, то вона називається *критичною*. За означенням всі критичні точки f є сідловими, тобто для кожної з них існує окіл $U \subseteq D$ і гомеоморфізм $\varphi : U \to D$ такий, що $\varphi(z_0) = 0$ і $f \circ \varphi^{-1}(z) = Rez^n + f(z_0)$ для всіх $z \in U$. Число n назвемо кратністю сідлової точки z_0. Точки межі ∂D, що не є ні межовими регулярними, ні ізольованими точками їх ліній рівня називаються *критичними межовими* точками.

Число c є *критичним* значенням f, якщо $f^{-1}(c)$ містить принаймні одну критичну точку. Число c є *регулярним* значенням f, якщо $f^{-1}(c)$ не містить критичних точок і гомеоморфне незв'язному об'єднанню інтервалів, які перетинаються з межею ∂D лише в своїх кінцях. Число c є *напіврегулярним* значенням f, якщо воно не є ні регулярним, ні критичним. Лінії рівня напіврегулярного значення містять лише межові критичні точки та локальні екстремуми $f\mid_{\partial D}$.

Нагадаємо [6], що *простим шляхом* із вершини u в вершину v називають послідовність ребер $e_1 = \{u, u_1\}$, $e_2 = \{u_1, u_2\}$, ..., $e_r = \{u_n, v\}$, що не містить повторювальних. *Простий цикл* – простий шлях, початкова та кінцева вершини якого співпадають. Вершини графу називаються *суміжними*, якщо вони є кінцями одного і того ж ребра (дуги).

Через $V(G)$ будемо позначати множину вершин графа G, а через $E(G)$ – множину його ребер (дуг).

Псевдографом G називається пара $(V(G), E(G))$, де $V(G)$ – непорожня множина, а $E(G)$ – сім'я невпорядкованих пар не обов'язково різних вершин.

DOI 10.15673/2072-9812.3/2014.40784

3 Побудова інваріанта псевдогармонічної функції

Нехай $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – критичні значення f, а $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – напіврегулярні. Позначимо через $K(c_j)$ множину зв'язних компонент ліній рівня $f^{-1}(c_j)$, що містять критичні точки, а $L(a_s)$ – множина тих зв'язних компонент ліній рівня $f^{-1}(a_s)$, що містять межові критичні точки, $j = \overline{1,n}$ $s = \overline{1,m}$.

Схема побудови інваріанту:

1. Побудуємо граф $G(f) = \bigcup\limits_i \Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i}) \bigcup\limits_j K(c_j) \bigcup\limits_s L(a_s)$, де $\Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i})$ – граф Кронрода-Ріба функції $f|_{\gamma_i}$.
2. У графі $\Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_0})$ замінимо ребра на орієнтовані дуги за наступним правилом. Нехай точкам x, y, $z \in \gamma_0$ відповідають елементи v_1, v_2, v_3 множини $V(\Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_0}))$. Позначимо через $e_1 = (v_1, v_2)$ та $e_2 = (v_2, v_3)$ орієнтовані дуги, кінцями яких є вершини v_i, $i = \overline{1,3}$. Дуги e_1 та e_2 належать множині $E(\Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_0}))$ тоді і лише тоді, коли точка x слідує за y, а y слідує за точкою z на кривій γ_0 вздовж заданої орієнтації.
3. Введемо частковий порядок на множині $V(G(f))$ використовуючи функцію f. Скажемо, що $v_1 > v_2$, де $v_1, v_2 \in G(f)$, тоді і лише тоді, коли $f(x) > f(y)$, де v_1 (v_2) – вершина, що відповідає точці x (y), $x \in D$ $(y \in D)$.

Позначимо через $\mathfrak{G}(f)$ комбінаторний інваріант псевдогармонічної функції f, який побудований за описаною вище схемою.

4 Структура інваріанта $\mathfrak{G}(f)$ як графа

Означення 1 *C-циклом (L-циклом) інваріанту $\mathfrak{G}(f)$ називається простий цикл у якому довільна пара суміжних вершин v_i та v_{i+1} є порівняльною (непорівняльною).*

Теорема 1 *Якщо $\mathfrak{G}(f)$ – комбінаторний інваріант деякої псевдогармонічної функції $f : D \to \mathbb{R}$, яка задана на $k-$зв'язній замкненій області D, то довільна компонента зв'язності Σ_j множини $\mathfrak{G}(f) \backslash (\bigcup\limits_{i=0}^{k} \Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i}))$ є псевдографом, кожна пара вершин якого є непорівняною.*

Доведення Нехай Σ_j – деяка зв'язна компонента множини $\mathfrak{G}(f) \backslash (\bigcup\limits_{i=0}^{k} \Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i}))$. Покажемо, що Σ_j – псевдограф. Для цього достатньо показати, що існують випадки, коли у Σ_j є петлі та кратні ребра.

Припустимо, що $V(\Sigma_j) = \{v\}$ – одноелементна множина вершин компоненти. За побудовою інваріанту, існує точка z така, що $z \in D$ та $f(z) = c$, де c – або критичне або напіврегулярне значення функції f. Покладемо $\Theta = f^{-1}(c) \cup D$ і $\Theta \ni z$. Зауважимо, що Θ – компакт. Розглянемо наступні випадки:

Випадок 1: $z \in \partial D$. Тоді, z є або регулярною, або критичною межовою точкою. Зауважимо, що z не може бути локальним ексремумом. Оскільки, в її околі значення функції f у довільних точках, що відмінні від z, або більші, або менші ніж c, то $E(\Sigma_j) = \emptyset$.

Випадок регулярної точки також виключаємо, оскільки згідно її означення, існує окіл $U(z)$ в D і гомеоморфізм $h : U(z) \to D_+$ цього околу в верхній напівдиск D_+ такий, що $h(z) = 0$ і $h(U \cap f^{-1}(c))) = \{0\} \times [0, 1)$. З іншого боку, $f(h^{-1}([0, 1))) = c$ і $h^{-1}([0, 1)) \subseteq \Theta$. Оскільки, Θ – компакт, то існує точка $z' \in D$. Згідно побудови інваріанту $\mathfrak{G}(f)$, існує вершина $v' \in V(\Sigma_j)$, $v \neq v'$, яка відповідає точці z. Отримали суперечність з припущенням.

Якщо ж z є критичною межовою точкою, то існує окіл $U(z)$ в D і гомеоморфізм $h : U(z) \to D_+$ цього околу в верхній напівдиск D_+ такий, що $h(z) = 0$, $h(\dot{U}(z) \cap f^{-1}(c))) = \bigcup\limits_{l=1}^{m} \dot{I}_l$, де $\dot{I}_l = (0; 1)$, $\dot{U}(z) = U(z) \setminus \{z\}$. Далі, для кожного l знайдемо точку $z'_l \neq z$ таку, що $z'_l = \partial\overline{U(z) \cap h^{-1}(0; 1)}$. Кожна з точок $z'_l \in \mathrm{Int}D$ і є регулярною точкою функції f (в протилежному випадку, ми отримаємо суперечність з тим фактом, що $V(\Sigma_j) = \{v\}$). Використовуючи означення регулярної точки, для кожної точки z'_l можна побудувати скінченну послідовність точок $\{\tilde{z}^l_i\}_{i=1}^{s_l}$ таку, що $f(\tilde{z}^l_i) = c$ при $l = \overline{1, m}$, $i = 1, s_l$. Якщо m – непарне число, то із компактності Θ слідує, що завжди знайдеться номер l_i такий, що $\tilde{z}^l_{s_{l_i}} = z' \neq z$, де $z' \in D$. А це суперечить припущеню про одноелементність множини $V(\Sigma_j)$, оскільки за побудовою інваріанту точці z' буде відповідати деяка вершина v'. Отже, m – парне число. Тому, для кожного індексу l точки знайдуться точки $\tilde{z}^l_{s_l} = z$. А це означає, що існує R ($R = \frac{m}{2}$) число петель $u_r(t)$ таких, що $u_r(0) = u_r(1) = z$ і $f(u_r(t)) = c$ при $t \in [0; 1]$, $r = \overline{1, R}$. Відмітимо також, що кожному r відповідає дві послідовності $\{t^r_i\}_{i=1}^{s_{l_i}}$ та $\{t^r_j\}_{j=1}^{s_{l_j}}$, де $l_i, l_j \in \{1, m\}$, значень параметра $t \in (0; 1)$ таких, що $u_r(t^r_j) = \tilde{z}^{l_j}_i$ і $u_r(t^r_j) = \tilde{z}^{l_j}_i$, де $r = \overline{1, R}$. Розглянемо компоненти множини $\overline{D \setminus u_r(t)}$ та позначимо їх через D_1 та D_2. Оскільки $f|_{D_1}$ та $f|_{D_2}$ є псевдогармонічними і такими, що $f|_{u_r(t) = \partial D_1} = f|_{u_r(t) = \partial D_2} = c$, то як в $\mathrm{Ind}D_1$, так і в $\mathrm{Ind}D_2$ існують межові криві $\gamma_i \in \partial D$. Згідно побудови інваріанта $\mathfrak{G}(f)$, кожній петлі $u_r(t)$, $r = \overline{1, R}$, відповідає ребро $e_r = \{v, v\} \in E(\Sigma_j)$.

Випадок 2: $z \in \mathrm{Ind}D$. Тоді, z є критичною точкою. Із означення критичної точки та використовуючи міркування, що аналогічні до випадку межової критичноїточки, випливає, існує n, $n > 1$, петель $u_r(t)$ таких, що $u_r(0) = u_r(1) = z$ і $f(u_r(t)) = c$ при $t \in [0;1]$. А це означає, що в Σ_j ребра $e_r = \{v, v\} \in E(\Sigma_j)$ є петлями, де $r = \overline{1, n}$

Наступний крок доведення: припустимо, що $V(\Sigma_j) = \{v_1, v_2\}$. За побудовою інваріанту, існують точки z_1 і z_2 такі, що $z_1, z_2 \in D$ та $f(z_1) = f(z_2) = c$, де c – або критичне або напіврегулярне значення функції f. Позначимо через Θ ту зв'язну компоненту лінії рівня $f^{-1}(c)$, що містить дані точки. Розглянемо випадки:

Випадок 1: $z_1 \in \partial D$. Тоді, по аналогії з таким же випадком для припущення про одноелементу множину вершин, точка z_1 не є локальним екстремумом. Нехай z є регулярною. Тоді, із її означення та компактності Θ випливає, що існує точка $z' = z_2 \in \partial D$, яка є також регулярною (випадок критичної межової точки виключаємо, оскільки отримаємо суперечність з припущенням про двоелементність множини $V(\Sigma_j)$). Отже, Θ – містить лише регулярні точки, що суперечить побудові $\mathfrak{G}(f)$. Отже, z_1 є критичною межовою точкою. По аналогії з таким же випадком для попереднього припущення, побудуємо n послідовностей точок $\{\tilde{z}^i_j\}$, де $i = \overline{1, n}$ і для кожного такого індексу i існує значення s_i таке, що $j = 1, s_i$, таку, що $f(\tilde{z}^i_j) = c$. Тоді, можливо два випадки: або $\tilde{z}^i_{s_i} = z_1$, або $\tilde{z}^i_{s_i} = z_2$. У першому випадку, отримаємо скінченне число петель $u_r(t)$ таких, що $u_r(0) = u_r(1) = z_1$, $f(u_r(t)) = c$, де $t \in [0;1]$, а в другому, скінченне число шляхів $u'_r(t)$ таких, що $u'_r(0) = z_1$, $u'_r(1) = z_2$, $f(u'_r(t)) = c$, де $t \in [0;1]$. Припустимо, що існує два шляхи $u'_{r_1}(t)$ та $u'_{r_2}(t)$ такі, що сполучають точки z_1 та z_2. Розглянемо компоненти множини $\overline{D \setminus (u'_{r_1}(t) \cup u'_{r_2}(t))}$ та позначимо їх через D_1 та D_2. Оскільки $f|_{D_1}$ та $f|_{D_2}$ є псевдогармонічними і такими, що $f|_{u'_{r_1}(t) \cup u'_{r_2}(t) = \partial D_1} = f|_{u'_{r_1}(t) \cup u'_{r_2}(t) = \partial D_2} = c$, то як у $\mathrm{Ind}D_1$, так і у $\mathrm{Ind}D_1$ існують межові криві $\gamma_i \in \partial D$, а згідно побудови інваріанта $\mathfrak{G}(f)$ існує існує два ребра $e_1 = \{v_1, v_2\}$ та $e_2 = \{v_1, v_2\}$, які належать множині $E(\Sigma_j)$ і є кратними ребрами.

Випадок 2: $z_1 \in \mathrm{Ind}D$. Тоді, z_1 є критичною точкою. По аналогії з критичною межовою точкою випадку 1, використовуючи означення критичної точки, можна показати, що існують як петлі в z_1, так і шляхи, що сполучають z_1 та z_2.

Доведемо, що довільна пара вершин множини $V(\Sigma_j)$ є непорівняльною. Нехай v' та v'' – деякі вершини Σ_j. Оскільки Σ_j – зв'язний псевдограф, то існує принаймні один шлях з ребер $e_1 = \{v' = v_0, v_1\}$, $e_2 = \{v_1, v_2\}$, …, $e_n = \{v_{n-1}, v_n = v''\}$, що сполучає v' та v''. Згідно побудови інваріанта $\mathfrak{G}(f)$, кожному з ребер e_i, $i = \overline{0,n}$, відповідає шлях $u_i(t)$ такий, що $u_i(0) = z_i$, $u_i(1) = z_{i+1}$ і $f(u_i(t)) = c$ при $t \in [0;1]$, де точки $z_i \in D$ відповідають вершинам $v_i \in V(\Sigma_j)$. Звідки випливає, що $v' = v_1 = \ldots = v_{n-1} = v''$. Отже, v' та v'' є непорівняльні.

Наслідок 1 $\mathfrak{G}(f)$ – *змішаний псевдограф зі строгим частковим порядком на вершинах.*

Наслідок 2 *Якщо в Σ_j існує або петля або кратні ребра, то в $\mathfrak{G}(f)$ існує L-цикл.*

Теорема 2 *Нехай $\mathfrak{G}(f)$ – інваріант деякої псевдогармонічної функції f, заданої на k-зв'язній замкненій області D. Тоді, кількість його C-циклів рівна числу $k+1$.*

Доведення Нехай γ_i – жорданові криві, що обмежують D так, що γ_i, $i = \overline{1,k}$, лежать всередині γ_0. Зрозуміло, що $\Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i})$, $i = \overline{0,k}$ є C-циклом. Позначимо через Γ' підграф інваріанту $\mathfrak{G}(f)$, отриманий додаванням до $\Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i})$, $i = \overline{0,k}$, вершин, які відповідають точкам, що одночасно належать як множинам $K(c_j)$ та $L(a_s)$, де c_j – критичні, а a_s – напіврегулярні значення f, так і γ_0. Покажемо, що Γ' – C-цикл.

Нехай v' та v'' довільна пара суміжних вершини в Γ'. Дані вершини відповідають точкам z' та z'', де $z', z'' \in \partial D$. Причому, точці z' відповідає вершина v', а точці z'' – v''. Припустимо, що $v' = v''$. Це означає, що $f|_{\gamma_i}(v') = f|_{\gamma_i}(v'')$. Оскільки $f|_{\gamma_i}$ задовольняє умовам теореми Ролля, то існує локальний екстремум z, $z \in (z'; z'') \subset \gamma_i$. Оскільки $\Gamma' \supset \Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i})$, то існує вершина $\widetilde{v}$, що відповідає точці z, та ребра $(\widetilde{v}, v')$ і $(v'', \widetilde{v})$, які відповідають $f|_{[z';z]}$ та $f|_{[z;z'']}$. А це суперечить тому, що вершини v' та v'' суміжні.

Якщо припусти, що кількість C-циклів більша $k+1$, то існує C-цикл, прообрази всіх вершин (точок області D) якого лежать у $\mathrm{Int}D$. Згідно побудови інваріанту, такі вершини є непорівняльні, що суперечить визначенню C-циклу.

5 Висновки

В даній роботі побудовано комбінаторний інваріант $\mathfrak{G}(f)$ деякої псевдогармонічної функції f, що задана на k-зв'язній орієнтованій замкненій області

D, який є змішаним псевдографом зі строгим частковим порядком на вершинах, і має певні структурні особливості, що індукуються властивостями псевдогармонічної функції. Зокрема, доведено, що кожна із зв'язних компонент множини $\mathfrak{G}(f)\backslash(\bigcup\limits_{i=0}^{k} \Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i}))$, де $\Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i})$ – граф Кронрода-Ріба функції $f|_{\gamma_i}$, є псевдографом, кожна пара вершин якого є непорівняною.

Література

1. W. Kaplan, Topology of level curves of harmonic functions // Transactions of Amer.Math.Society., **63** (1948), 514-522.
2. M. Morse, The topology of pseudo-harmonic functions// Duke Math.J., **13** (1946), 21-42.
3. M. Morse, J. Jenkins, The existence of pseudoconjugates on Riemann surfaces //Fund.Math., **39** (1952), 269-287.
4. E. Polulyakh, I. Yurchuk, On the pseudo-harmonic functions defined on a disk. Pracy Inst.Math.Ukr.,Volume 80. - Kyiv: Inst.Math.Ukr., 2009. - 151 pp.
5. М. Морс, Топологические методы теории фукций комплексного переменного/ под. ред. Маркушевич А.И. - М, 1951.
6. Ф. Харари, Теория графов. - М.:Наука, 1973.

І.А. Юрчук
Національний авіаційний унівеситет, Київ, Україна.
E-mail: iyurch@ukr.net

Iryna Iurchuk

On combinatorial invariant of pseudo-harmonic functions defined on $k-$connected closed domain

Let $f : D \to \mathbb{R}$ be a pseudo-harmonic function defined on $k-$connected oriented closed domain $D \subset \mathbb{C}$ whose boundary consists of closed Jordan curves γ_0, γ_1, ..., γ_k, $0 \le k < \infty$. We remind that this class of functions coincides with continuous functions which have finitely many number of critical points at interior and on boundary of domain.

In [4] authors researched a case of $k = 0$: for such functions a topological invariant is constructed, its main properties, the criterion of their topological equivalence and conditions of realization of some type of graphs as given invariant are proved.

In this paper, for case $k > 0$ the combinatorial invariant $\mathfrak{G}(f)$ of pseudo-harmonic function f is constructed that consists of the Reeb graphs of restriction of f on boundary of D and connected components such critical and semiregular levels which contain critical and boundary critical points. According to a

construction of $\mathfrak{G}(f)$, it's a mixed pseudograph (graph with multiple edges and loops) with strict partial order on vertices which induced by values of f. There are two types of cycles in $\mathfrak{G}(f)$. In particular, C-cycle (a simple cycle whose any pair of adjacent vertices are comparable) and L-cycle (a simple cycle whose any pair of adjacent vertices are noncomparable). Theorem of an invariant structure and a fact that a quantity of C-cycles of combinatorial invariant is same as a number of boundary curves of k-connected closed oriented domain are proved.

Keywords. Pseudo-harmonic function, combinatorial invariant, $k-$connected domain