DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.4/2014.42079
Proc. Intern. Geom. Center 2014 **7**(4) 83–92

Інваріантні міри на системах багатогранників

Герасін Олексій Іванович

Анотація В статье автор рассматривает многогранные обобщенно выпуклые множества. Свойства обобщенно выпуклых множеств используются при вычислении инвариантных мер на совокупности многогранников. Предлагаемый метод и полученные результаты вычислений дают возможность находить инвариантные меры при решении прямой и обратной задачи томографии.

Ключові слова Инвариантная мера, многогранники, обобщенно выпуклые множества, теорема Крофтона, мера гиперплоскостей, задача томографии.

УДК 519.6

1 Вступ

Більшість мінералів має кристалічну будову у вигляді різних багатогранників. Дуже плідним методом вивчення геометричної будови природних об'єктів, кристалів органічних та неорганічних речовин є метод рентгеноструктурного аналізу. Він заснований на тому, що всяка речовина володіє здатністю розсіювати падаюче на нього випромінювання, зокрема рентгенівське. При цьому розсіяння рентгенівських променів кристалами знаходиться в певній відповідності з розташуванням атомів в кристалі. Останній час розвивалась область математики, що займається розробкою математичних методів і алгоритмів відновлення внутрішньої структури об'єкту за проекційними даними. Зокрема, рішеннями прямої і зворотної задачі томографії. Цим проблемам і присвячена дана робота.

1.1 Аналіз останніх досліджень і публікацій

В класичній задачі Бюффона про голку вже неявно була присутня ідея введення мір в просторі прямих на площині. Пізніше "природним розподілом" прямої g визначили міру, відносно якої конгруентні між собою геометричні події отримують рівні міри.

Потім було показано єдність диференціальних елементів, які інваріантні відносно групи всіх трансляцій і поворотів на площині (Пуанкаре,1912 р.) і просторі (Пойа,1917 р.).

Задачу про інваріантні міри на системах опуклих множин на площині поставив, але не вирішив англійський математик Сільвестр [11]. Повністю задача була розв‘язана Амбарцумяном [1], але для множин, що не знаходяться на площині у загальному положенні (тобто жодні три вершини голки не належать до одної прямої). Пізніше ця умова була знята і зроблено узагальнення теореми Крофтона на багатовимірний випадок [4,5].

В процесі досліджень, пов‘язаних з даною роботою виявилось, що природним апаратом для рішення задач пов‘язаних з інваріантними мірами, є $(n-1)$-опуклі множини, які запропонував у 1987 році Зелінський [8]. Властивості $(n-1)$-опуклих множин досить досліджені [2,3].

1.2 Мета статі

Вимога "множини, що не знаходяться у просторі у загальному положенні" передбачає, таке розташування багатогранників в тривимірному просторі, що не існує жодній прямій, в просторі, яка перетинала б межі трьох і більш багатогранників. Т. е. апріорі, методика, що використається [1] та [9], не придатна для модулювання кристалічних решіток. Дослідити методику обчислень 2-мір за допомогою узагальнення теореми Крофтона на системі двох багатогранників, використав властивості 2-опуклих багатогранників і спеціальних F-множин. Це дає змогу, отримані результати узагальнити на множину, що складається с багатьох компонент-багатогранників, довільно розташованих.

2 Виклад основного матеріалу

Визначення основних понять, що використовуються в роботі, можна знайти в [2 - 5]. Нам знадобиться поняття $(n-1)$-*опуклої множини* [8] та *опуклої оболонки* [9].

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.4/2014.42079

Означення 1 *Множина $A \subset R^n$ має назву $(n-1)$-опукла, якщо через будь-яку точку $x \in R^n \setminus A$, можна провести гіперплощину H, що не перетинає A.*

Означення 2 *Опуклий перетин усіх опуклих множин, що містять задану множину $A \subset R^n$, називають опуклою оболонкою множини A і означають*

$$\widehat{A} = conv(A) = \bigcap_{K \supset A} K,$$

де K є опукла множина.

Так само можна визначити поняття $(n-1)$-опуклої оболонки.

Маємо визначення F-множин (Face of set).

Означення 3 *Нехай A, множина, що складається з двох не порожніх опуклих компонент A_1 і A_2 тоді для опуклої оболонки $\widehat{A}$ множини має місце рівність (див. в [2])*

$$\widehat{A} = conv(A_1 \cup A_2) = \bigcup_{\substack{x_1 \in A_1 \\ x_2 \in A_2}} x_1 x_2.$$

Для кожного відрізка x_1x_2 визначимо точки $f_1 \in \overline{A_1}$ і $f_2 \in \overline{A_2}$ найбільш близько розташовані до точок $x_1 \in \overline{A_1}$ і $x_2 \in \overline{A_2}$ відповідно. Визначимо множини F_i, $i = 1, 2$, як сукупність точок, побудованих для всіляких відрізків x_1x_2.

Очевидно, що $F_1 \subset \partial A_1$ та $F_2 \subset \partial A_2$. В [2,3] показані властивості множин $F_i, i = 1, 2$ для $(n-1)$-опуклих множин.

Означення 4 *Нехай μ^2, σ-скінченна міра у просторі площин, інваріантна відносно групи всіх трансляцій і поворотів у R^3. З [1] звісно, що*

$$\mu^2(K) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} l(\rho_{\vartheta\varphi} K) \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta, \tag{1}$$

де $K \subset R^3$ - компактна опукла множина, $\mu_2(K)$ - міра площин, які перетинають множину , $l(\rho_{\vartheta\varphi} K)$ - довжина ортогональної проекції K на пряму, що проходить через (0,0,0) у напрямку $(sin\theta cos\varphi, sin\theta sin\varphi, cos\varphi)$.

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.4/2014.42079

Означення 5 *Для багатогранника $M \subset R^3$ є формула міри множини всіх площин, що перетинають M.*

$$\mu^2(M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) l_i, \tag{2}$$

де l_i довжина i-го ребра, α_i – двогранний кут між гранями, які утворюють i-е ребро.

Міру площин у тривимірному просторі будемо називати 2-міра, або μ^2.

Мінковським визначена сума випуклих множин $A \oplus B$ [9].

Означення 6 *Нехай A і B – непусті опуклі множини у R^3, радіус-вектори точок $a \in A$ і $b \in B$ співвіднесені до початку координат 0. Тоді (залежну від вибору 0) множину*

$$A \oplus B = \{z \in R^n | z = a + b, a \in A, b \in B\}$$

будемо називати сумою A і B.

Позначимо через K^S множину, симетричну опуклій множині відносно центра ваги множини [5].

Означення 7 *Нехай $B \subset R^n$ - множина, яка складається з двох обмежених опуклих множин B_1 і B_2 , O_1 і O_2 – центри ваги тіл B_1 і B_2, відповідно і нехай $B_2^N = t(B_2 \oplus B_1^S)$ $(i = 1, 2)$, де t – трансляція множин $(B_2 \oplus B_1^S)$, при якій центр тяжіння його співпадає з центром тяжіння множини B_2. Позначимо через B_2^D множину $conv(0 \cup B_2^N)$, а $\mu^{n-1}(> B_1, B_2 <)$ міру гіперплощин, що розділяють множини B_i (i = 1,2) [5].*

Далі маємо узагальнення теореми Крофтона на багатовимірний простір.

Теорема 1 *Нехай $B \subset R^n$ - множина, яка складається з двох обмежених опуклих множин B_1 і B_2. Тоді міра множини всіх гіперплощин, що розділяють множини B_1 і B_2, дорівнює:*

$$\mu^{n-1}(> B_1, B_2 <) = \mu^{n-1}(B_2^D) - \mu^{n-1}(B_2^N). \tag{3}$$

Доказ надано [5].

У [10] стор. 194–197 вказані інтеграли середньої кривизни $M(K)$ деяких опуклих множин. Існує наступне співвідношення між інтегралами середньої кривизни та $\mu^2(K)$ мірою множини всіх площин, що перетинають множину K.

$$\mu^2(K) = \frac{M(K)}{2\pi}.$$

Маємо наступні $\mu^2(K)$ опуклих багатогранників $K \subset R^3$.

Приклад 1.

а) Для тетраедра з довжиною ребра a та радіусом описаної сфери R:

$$\mu^2(K) \;=\; \frac{\sqrt{6}R\arccos(-\frac{1}{3})}{\pi} \;=\; \frac{3a\arccos(-\frac{1}{3})}{2\pi}.$$

б) Для куба з довжиною ребра a:

$$\mu^2(K) \;=\; \frac{3a}{2}.$$

в) Для плоскої опуклої множини K з периметром P, яку розглядаємо як опуклу множину у R^3, маємо:

$$\mu^2(K) \;=\; \frac{P}{4}.$$

Пропозиція 1 *Міра множини всіх площин, що перетинають пряму піраміду висотою $H = \lambda a$. $\lambda \geq 0$, основа якої правильний трикутник зі стороною a, дорівнює:*

$$\mu^2(P) = \frac{3}{4\pi}\left(\frac{a\sqrt{3(1+3\lambda^2)}}{3}\arccos\frac{(1-6\lambda^2)}{(1+12\lambda^2)} + a\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{1+12\lambda^2}}\right)\right)$$

де $\lambda = \frac{H}{a}$.

Доведення 1 *Позначимо висоту піраміди $H = \lambda a$, $\lambda \geq 0$, для тетраедру $\lambda_{TET} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Використавши формули аналітичної геометрії, знайдемо вершини прямої піраміди :*

$$P_0 = (0,\,0,\,0), P_1 = (\lambda a,\,0,\,\frac{\sqrt{3}}{3}),$$
$$P_2 = (\lambda a,\,-\frac{a}{2},\,-\frac{a\sqrt{3}}{6}), P_3 = (\lambda a,\,\frac{a}{2},\,-\frac{a\sqrt{3}}{6}).$$

Для обчислень кута між гранями знайдемо вектори, що виходять з вершини P_0 :

$$V_0 = (\lambda a,\,0,\,0\,), V_1 = (\lambda a,\,0,\,\frac{\sqrt{3}}{3}),$$
$$V_2 = (\lambda a,\,-\frac{a}{2},\,-\frac{a\sqrt{3}}{6}), V_3 = (\lambda a,\,\frac{a}{2},-\frac{a\sqrt{3}}{6}),\;.$$

Потім знайдемо вектор нормалі до площини, що проходить крізь точки P_0, P_1, P_2 :

$$n_{2\,1} \;= [V_2 \times V_1] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda a & -\frac{a}{2} & -\frac{a\sqrt{3}}{6} \\ \lambda a & 0 & \frac{a\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} \;=\; -\frac{a^2\sqrt{3}}{6}i \;-\; \frac{\lambda a^2\sqrt{3}}{2}j \;+\; \frac{\lambda a^2}{2}k$$

Та вектор нормалі до площини, що проходить крізь точки $P_0,\ P_1,\ P_2$ *:*

$$n_{1\,3} \;=\; [V_1 \times V_3] \;=\; -\frac{a^2\sqrt{3}}{6}i \;+\; \frac{\lambda a^2\sqrt{3}}{2}j \;+\; \frac{\lambda a^2}{2}k$$

Обчислимо косинус кута між цими векторами за допомогою формули косинуса.

Скалярний добуток

$$(n_{21} \cdot n_{13}) = \frac{a^4}{12} - \frac{\lambda^2 a^4}{2}.$$

Кут між нормалями

$$\angle(n_{12}, n_{13}) \;=\; \arccos\,\frac{(n_{12} \cdot n_{13})}{|n_{21}| \cdot |n_{12}|},\; = \;\arccos\,\frac{(1\;\;-6\lambda^2)}{(1\;+\;12\lambda^2)}$$

Тепер обчислимо кут між боковою гранню та основою, для цього обчислимо косинус кута між векторами $V_0 = (\lambda a,\, 0,\, 0\,)$ *та* $n_{21} = [V_2 \times V_1]$ *:*

$$\angle(V_0, n_{21}) \;= \arccos\,\frac{(V_0 \cdot n_{21})}{|V_0| \cdot |n_{21}|} \;=\; \arccos\left(-\,\frac{1}{\sqrt{1\;+\;12\lambda^2}}\right)$$

Довжина бокової грані дорівнює $\frac{a\sqrt{3(1+3\lambda^2)}}{3}$. *В основі квадрат зі стороною . З формули для багатогранника маємо:*

$$\mu^2(P) \;=$$

$$= \frac{3}{4\pi}\left(\frac{a\sqrt{3(1+3\lambda^2)}}{3}\arccos\,\frac{(1\;\;-6\lambda^2)}{(1\;+\;12\lambda^2)} \;+\; a\,\arccos\left(-\,\frac{1}{\sqrt{1\;+\;12\lambda^2}}\right)\right)$$

Для тетраедру $\lambda_{TET} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, кут має значення $\arccos(-\frac{1}{3})$. Див. приклад 1, а.

Пропозиція 2 *Нехай* $B \subset R^3$*- множина, яка складається з двох обмежених опуклих множин* B_1 *– правильний трикутник зі стороною а і* B_2 *- трикутник перетворений з трикутника* B_1*, за допомогою центральної симетрії та паралельним зсувом по осі* OY *на відстань* $H = \lambda a$. $\lambda \geq 0$. *Тоді міра множини всіх гіперплощин, що розділяють тіла* B_1 *і* B_2 *дорівнює:*

$$\mu^2(> P_1, P_2 <) =$$

$$= \frac{3}{4\pi}\left(\frac{a\sqrt{3(1+3\lambda^2)}}{3}\arccos\frac{(1-6\lambda^2)}{(1+12\lambda^2)} + a\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{1+12\lambda^2}}\right) - \frac{a}{2}\right)$$

Доведення 2 *З пропозиції 1:*

$$\mu^2(P_2^D) =$$

$$= \frac{3}{4\pi}\left(\frac{a\sqrt{3(1+3\lambda^2)}}{3}\arccos\frac{(1\ -6\lambda^2)}{(1\ +\ 12\lambda^2)}\ +\ a\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{1\ +\ 12\lambda^2}}\right)\right)$$

Множина P_2^D правильний трикутник зі стороною $2a$, тому

$$\mu^2(P_2^N)\ =\ \frac{3a}{2}$$

З теореми 1, маємо $\mu^2(> P_1, P_2 <)$ дорівнює

$$\mu^{n-1}(P_2^D) - \mu^{n-1}(P_2^N) =$$

$$= \frac{3}{4\pi}\left(\frac{a\sqrt{3(1+3\lambda^2)}}{3}\arccos\frac{(1-6\lambda^2)}{(1+12\lambda^2)} + a\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{1+12\lambda^2}}\right) - \frac{a}{2}\right)$$

де $\lambda = \frac{H}{a}$.

Зауваження 1 *Пропозиція 2 дає змогу обчислити інваріантні міри для двох багатогранників, F-множини [4] яких складаються з правильних трикутників. Потім, можливо узагальнення результатів на сукупності кінцевого числа багатогранників.*

Пропозиція 3 *Множини B_1 і B_2 - два квадрати зі стороною a , що створені паралельним зсувом на відстань* $\mathrm{H}\ =\ \lambda a,\ \lambda\ \geq 0$:

$$B_1 = \{(x,y,z) : x = 0; -\frac{a}{2}\ \leq y \leq\ \frac{a}{2}a; -\frac{a}{2}\ \leq\ z \leq\ \frac{a}{2}\}$$

$$B_2 = \{(x,y,z) : x = H; -\frac{a}{2}\ \leq y \leq\ \frac{a}{2}a; -\frac{a}{2}\ \leq z \leq\ \frac{a}{2}\}.$$

Тоді міра множини всіх гіперплощин, що розділяють множини B_1 і B_2 дорівнює:

$$\mu^2(> B_1\,,\, B_2\ <)\ =\ \mu^2(B_2^D)\ -\ \mu^2(B_2^N)$$

$$\mu^2(B_2^D) - \mu^2(B_2^N) = \frac{1}{\pi}(\arccos(\frac{1}{1^2+,4\lambda^2})\cdot\ a\sqrt{2+\ \lambda^2} + 2a(\pi - arctg(\lambda)) - 2a$$

де $\lambda = \frac{H}{a}$.

Доведення 3 *Згідно з теоремою 1, маємо:*

$$B_2^N \;=\; \{(x,y,z) : x = H; -a \le y \le a; = -a \le z \le a\}$$

B_2^D - піраміда з вершиною у точці (0,0,0) і основою - квадратом , з стороною 2a. Бокові ребра піраміди мають довжину :

$$|L\;| = \sqrt{2a^2\;+H^2}\;\;=\;a\sqrt{2+\lambda^2}.$$

Використавши формули аналітичної геометрії, аналогічно прикладу 1, знайдемо вершини прямої піраміди. Потім обчислимо вектори нормалі до граней і відповідні двогранні кути. Маємо:

$$\mu^2(B_2^D)\;=\;\frac{1}{\pi}(\arccos(\frac{a^2}{a^2\;+\;4H^2})\;\cdot\;\sqrt{2a^2\;+\;H^2}\;+\;2a\,(\pi\;-arctg(\frac{H}{a})))$$

Тобто

$$\mu^2(B_2^D) = \frac{1}{\pi}(\arccos(\frac{1}{1^2\;+\;4\lambda^2})\;\cdot\;a\sqrt{2\;+\;\lambda^2}\;+\;2a\,(\pi\;-arctg(\lambda)))$$

Використавши формулу прикладу 1, випадок в), маємо

$$\mu^2(>K_1, K_2<) = \frac{1}{\pi}(\arccos(\frac{1}{1^2\;+\;4\lambda^2})\;\cdot\;a\sqrt{2\;+\;\lambda^2}\;+\;2a\,(\pi\;-arctg(\lambda)-2)$$

де $\lambda\;=\;\frac{H}{a}$.

Пропозиція 4 *Нехай $K \subset R^3$ - множина, яка складається з двох K_1 і K_2 кубів, що створені паралельним зсувом на відстань:*

$$K_1 = \{(x,y,z) : -a\;\le x \le\;0; -\frac{a}{2}\;\le y \le\;\frac{a}{2}a; -\frac{a}{2}\;\le\;z\le\;\frac{a}{2}\}$$

$$K_2 = \{(x,y,z) : H\;\le x \le\;H+a; -\frac{a}{2}\;\le y \le\;\frac{a}{2}a; -\frac{a}{2}\;\le z \le\;\frac{a}{2}\}.$$

Тоді міра множини всіх гіперплощин, що розділяють тіла K_1 і K_2 дорівнює:

$$\mu^2(>K_1, K_2<)\;=\frac{3a}{\pi}(\arccos(\frac{1}{1^2\;+\;4\lambda^2})\;\cdot\;a\sqrt{2\;+\;\lambda^2}+6\,(\pi-arctg(\lambda)-2)$$

Доведення 4 *Відмітимо, що для тіл K_1 і K_2 F-множини є два квадрати B_1 і B_2, відповідно (Пропозиція 3). З цього слідує формула.*

За допомогою пропозиції 4 ми маємо провести наступні обчислення.

Пропозиція 5 *Нехай $K \subset R^3$ - множина, яка складається з 8 кубів K_i, $i = \overline{1,8}$, зі стороною , що створені паралельним зсувом і центри яких, знаходяться у вершинах кубу зі стороною $a + b$, $0 < b < a$. Тоді міра множини всіх гіперплощин, що перетинають множину K і не перетинають, тобто розділяють куби K_i, $i = \overline{1,8}$. Дорівнює*

$$\mu^2(> K_i, i = \overline{1,8} <) =$$

$$= \frac{6(\lambda + a + b)}{\pi}(\arccos(\frac{1}{1 + 4\lambda^2}) \cdot \sqrt{2 + \lambda^2} + 6(\pi - arctg(\lambda) - 2)$$

де $\lambda = \frac{b}{a+b}$.

Доведення 5 *Відстань міх кубами, що знаходяться на ребрі куба дорівнює b, $0 < b < a$. Поскільки $b < a$, існує три множини A_1, A_2, A_3 площин, що розділяють куби на системи по чотири куба. Ці множини мають назву атоми [9]. Знайдемо опуклу оболонку, для кожної системи з чотирьох кубів. Це зводить доведення до випадку прикладу 2, квадрати B_1 і B_2 мають сторону, що дорівнює $a+b$, а відстань між ними b. У вираз теореми 4 підставляємо відповідні значення a та λ. Помножуючи його на кількість атомів, тобто 3, маємо формулу пропозиції 4.*

3 Висновки

В статі використано узагальнення теореми Крофтона на тривимірний випадок. Використовуючи властивості узагальнено опуклих множин, обчислені інваріантні 2-міри для двох багатогранників, F-множини яких складаються з правильних трикутників, або квадратів. Деякі інші випадки опуклих множин, F-множини яких мають у складі коло, фрагменти кулі див. [7]. Доказані теореми для двох багатогранників дозволяють узагальнити результати на сукупності кінцевого числа багатогранників. Пропонований метод та одержаний результат обчислень, дають змогу знаходити інваріантні міри сукупності багатогранників, що може бути використано при рішенні прямої і зворотної задачі томографії.

Література

1. Амбарцумян Р. И., Мекке Л., Штоян Л. *Введение в стохастическую геометрию.* – М.: Наука, 1989. – 400 с.
2. Герасин А. И. *Об (n-1)-выпуклых множествах.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии: Сб. Науч. Тр. Киев: Ин-тут математики АН УССР, 1988. – С. 8-14.

3. Герасин А. И. *Обозримость (n-1)-выпуклых множеств.* Комплексный анализ, алгебра и топология: Сб. Науч. Тр. Киев: Ин-тут математики АН УССР, 1990. – С. 20-28.
4. Герасин А. И. *О мерах на (n-1)-выпуклых множествах.*-Киев,1994,-28 с.-(Препр.АН Украины. Ин-т математики: 94.1)
5. Герасин А. И. *Об инвариантных мерах.*-1994.-6с.-(Препр. АН Украины. Ин-т математики: 94.3)
6. Герасін О. І. *Про інваріантні міри у тривімірному просторі*, Науковий вісник АМУ. Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології управління. Серія «Техника». Збірник наукових праць, С. 32–37 (2008)
7. Герасін О. І. *Про геометричні ймовірності С.* Вісник університету «Україна» Теоретичне та науково-методичне видання № 6, 2008 С. 93-96.
8. Зелинский Ю. Б. *Многозначные отображения в анализе.* – Киев: Наук. Думка, 1993.-264 с.
9. Лехтвейс К. *Выпуклые множества.* – М.: Наука 1965. – 336 с.
10. Сантало Л. *Интегральная геометрия и геометрические вероятности.*-М.:Наука,1983.-360 с.
11. Silvestr J. J. *On a funicular solution of Buffon's "Problem of the needle" in its most general form* / Acta Math.-1890. – 14 . – P. 185-205.

Герасін Олексій Іванович

ІПДО НУХТ, Київ, Украина
E-mail: agerasin@ukr.net

Alex I. Gerasin

Invariant measures on set of polyhedrons.

In this article the author consider the polyhedral generalize convex sets. Properties generalize convex sets are used for the calculation of invariant measures on set of polyhedrons. Offered method and got results of calculations, enable to find invariant measures at the decision of direct and reverse task of tomography.

Keywords: Invariant measure, generalize convex body, polyhedral sets, Crofton theorem, measure of hyperplanes, task of tomography.