DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.4/2014.41436
Proc. Intern. Geom. Center 2014 **7**(4) 23–33 *dω*

Про розв'язки матричного рівняння $XA_0 = A_1$ із заданими характеристичними многочленами

В. М. Прокіп

Анотація Досліджується структура розв'язків матричного рівняння $XA_0 = A_1$, де A_0 і A_1 – $(n \times m)$-матриці над полем $\mathbb{F}$, X – невідома $(n \times n)$-матриця. Нехай $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_{n-1}\lambda + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$ – унітальний многочлен степеня n. В статті встановлено умови, за яких для рівняння $XA_0 = A_1$ існує розв'язок із характеристичним многочленом $d(\lambda)$.

Ключові слова Матричне лінійне рівняння, характеристичний многочлен

УДК 512.643.4

Вступ

Нехай $\mathbb{F}$ – поле. Введемо наступні позначення: $M_{n,m}(\mathbb{F})$ та $M_{n,m}(\mathbb{F}[\lambda])$ – множини $(n \times m)$ матриць над полем $\mathbb{F}$ та кільцем многочленів $\mathbb{F}[\lambda]$ відповідно; I_n – одинична $(n \times n)$-матриця; $0_{n,k}$ – нульова $(n \times k)$-матриця. Надалі через $d_A^{(k)}(\lambda)$ позначатимемо найбільший спільний дільник (н.с.д.) мінорів k-го порядку матриці $A(\lambda) \in M_{n,m}(\mathbb{F}[\lambda])$, де $k = 1, 2, \ldots, \min\{n, m\}$. Якщо $B(\lambda) \in M_{n,n}(\mathbb{F}[\lambda])$ – неособлива матриця, то через $B^*(\lambda)$ позначатимемо (класичну) приєднану до неї матрицю, тобто $B^*(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)B^*(\lambda) = I_n \det B(\lambda)$.

Розглянемо матричне рівняння

$$XA_0 = A_1, \tag{1}$$

де $A_0, A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ і X невідома $(n \times n)$-матриця. Відомо [1], що рівняння (1) над полем $\mathbb{F}$ розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{rank} A_0 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Незважаючи на те, що умова (2) розв'язності рівняння (1) є досить простою, багато авторів досліджували задачу про існування розв'язків цього рівняння, які належать до певних класів. Так в роботах [2]—[4] досліджувались умови, за яких для рівняння (1) над полем дійсних чисел існують симетричні розв'язки. Дальніші дослідження пошуку умов, за яких для рівняння (1) над полем дійсних або комплексних чисел існують додатньо (або від'ємно) визначені, кососиметричні, унітарні, ермітові, рефлексивні та *конгруентні розв'язки, наведені в роботах [5]—[10].

З огляду на сказане вище, закономірно виникає наступна задача. Нехай рівняння $XA_0 = A_1$, де $A_0, A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{F})$, сумісне. Нехай, далі, $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_{n-1}\lambda + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$ – унітальний многочлен степеня n. Вказати умови, за яких для рівняння $XA_0 = A_1$ існує розв'язок $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ із заданим характеристичним многочленом $d(\lambda)$, тобто $\det(I_n\lambda - D) = d(\lambda)$. Якщо ж такий розв'язок існує, то запропонувати метод його знаходження. В даній статті встановлено умови, за яких для сумісного рівняння $XA_0 = A_1$ існує розв'язок $X_0 = D$ із заданим характеристичним многочленом $d(\lambda)$. Крім цього, вказано клас сумісних матричних рівнянь над полем $\mathbb{F}$, які мають розв'язок із кожним унітальним многочленом $d(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ степеня n.

1 . Допоміжні результати

Матричному рівнянню $XA_0 = A_1$, де $A_0, A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{F})$, поставимо у відповідність матричну в'язку $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{F}[\lambda])$. Очевидно, що рівняння $XA_0 = A_1$ розв'язне тоді і тільки тоді, коли для матричної в'язки $A(\lambda)$ існує зображення у вигляді добутку $A(\lambda) = (I_n\lambda - D)A_0$, де $D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$. Тепер матричній в'язці $A(\lambda)$ та унітальному многочлену $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_{n-1}\lambda + d_n \in \mathbb{F}[x]$ степеня n поставимо у відповідність матриці

$$M(A) = \left.\begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & 0_{n,m} & \dots & \dots & 0_{n,m} \\ 0_{n,m} & A_0 & -A_1 & 0_{n,m} & \dots & 0_{n,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{n,m} & \dots & \dots & 0_{n,m} & A_0 & -A_1 \end{bmatrix}\right\} (n-1),$$

$$N(A,d) = \begin{bmatrix} A_0d_1 + A_1 & A_0d_2 & \dots & A_0d_{n-1} & A_0d_n \end{bmatrix}.$$

Матриці $M(A)$ і $N(A,d)$ вимірності $n(n-1) \times mn$ та $n \times mn$ відповідно.

Доведемо, що із розв'язності рівняння $XA_0 = A_1$ випливає розв'язність рівняння $ZM(A) = N(A,d)$.

Лема 1 . *Нехай матриця $D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ з характеристичним многочленом $\det(I_n\lambda - D) = d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_n$ – розв'язок рівняння $XA_0 = A_1$, де $A_0, A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{F})$. Нехай, далі,*

$$B(\lambda) = I_n\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + B_2\lambda^{n-3} + \cdots + B_{n-2}\lambda + B_{n-1} \in M_{n,n}(\mathbb{F}[x])$$

– взаємна матриця для матриці $I_n\lambda - D$. Тоді матриця

$$Z_0 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_{n-2} & B_{n-1} \end{bmatrix}$$

є розв'язком рівняння $ZM(A) = N(A,d)$.

Доведення . Нехай матриця $D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ із характеристичним многочленом $\det(I_n\lambda - D) = d(\lambda)$ є розв'язком рівняння $XA_0 = A_1$, тобто $DA_0 = A_1$. Отже, матрична в'язка $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1$ допускає зображення у вигляді добутку

$$A(\lambda) = (I_n\lambda - D)A_0. \tag{3}$$

Нехай, далі, $B(\lambda) = I_n\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + \cdots + B_{n-2}\lambda + B_{n-1} \in M_{n,n}(\mathbb{F}[\lambda])$ – приєднана матриця для матриці $I_n\lambda - D$. Помноживши обидві частини рівності (3) зліва на $B(\lambda)$ здобуваємо

$$B(\lambda)A(\lambda) = d(\lambda)A_0.$$

Виконавши множення в обох частинах останньої рівності та прирівнявши коефіцієнти при одинакових степеня λ в лівій та правій частинах, отримуємо систему рівностей

$$\begin{cases} B_1A_0 & & = & d_1A_0 + A_1, \\ B_2A_0 & - B_1A_1 & = & d_2A_0, \\ \dots & \dots \quad \dots & \dots & \dots \\ B_{n-1}A_0 & - B_{n-2}A_1 & = & d_{n-1}A_0, \\ & - B_{n-1}A_1 & = & d_nA_0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що матриця $Z_0 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_{n-2} & B_{n-1} \end{bmatrix}$ задовольняє рівність $Z_0M(A) = N(A,d)$. Отже, рівняння $ZM(A) = N(A,d)$ розв'язне. Лему доведено.

Тепер встановимо зв'язок між розв'язністю рівняння $ZM(A) = N(A, d)$ та матричною в'язкою $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{F}[\lambda])$, яка поставлена у відповідність матричному рівнянню $XA_0 = A_1$.

Лема 2 . *Нехай* $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_{n-1}\lambda + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$ *і матриця*

$$Z_0 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_{n-2} & B_{n-1} \end{bmatrix},$$

де $B_j \in M_{n,n}(\mathbb{F})$; $j = 1, 2, \ldots, n-1$; *– розв'язок рівняння* $ZM(A) = N(A, d)$. *Тоді для матричної в'язки* $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1$ *та многочленної матриці*

$$B(\lambda) = I_n\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + B_2\lambda^{n-3} + \cdots + B_{n-2}\lambda + B_{n-1}$$

виконуєтьcя співвідношення $B(\lambda)A(\lambda) = d(\lambda)A_0$.

Доведення . Рівність $Z_0M(A) = N(A, d)$ разом з тотожністю $A_0 = A_0$ рівносильна системі рівностей

$$\begin{cases} A_0 & & = & A_0, \\ B_1A_0 & - \; A_1 & = & d_1A_0, \\ B_2A_0 & - \; B_1A_1 & = & d_2A_0, \\ \ldots & \ldots \; \ldots & & \ldots \; \ldots \\ B_{n-1}A_0 & - \; B_{n-2}A_1 & = & d_{n-1}A_0, \\ & - \; B_{n-1}A_1 & = & d_nA_0. \end{cases} \tag{4}$$

Помноживши обидві частини k-го рівняння із (4) на λ^{n-k}, $k = 0, 1, \ldots, n$; та склавши при цьому ліві та праві частини отримуємо

$$A_0\lambda^n + (B_1A_0 + A_1)\lambda^{n-1} + (B_2A_0 - B_1A_1)\lambda^{n-2} + \ldots$$
$$+ (B_{n-1}A_0 - B_{n-2}A_1)\lambda - B_{n-1}A_1 =$$
$$(\lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + d_1\lambda^{n-2} + \ldots + d_{n-1}\lambda + d_n)A_0.$$

З даної рівності здобуваємо, що для матричної в'язки $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1$ та многочленної матриці $B(\lambda) = I_n\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + \cdots + B_{n-2}\lambda + B_{n-1}$ виконуєтьcя співвідношення $B(\lambda)A(\lambda) = d(\lambda)A_0$. Лему доведено.

2 . Основні результати

Нехай матричне рівняння $XA_0 = A_1$ сумісне (X – невідома $n \times n$ матриця). Неважко переконатись в тому (див. приклад 1), що не для кожного унітального многочлена $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_n$ для цього рівняння існує розв'язок із характеристичним многочленом $d(\lambda)$. В цій частині встановимо умови, за яких для рівняння $XA_0 = A_1$ існує розв'язок $X_0 = D$ із заданим характеристичним многочленом $d(\lambda)$.

Теорема 1 . *Нехай для рівняння $XA_0 = A_1$, де $A_0, A_1 \in M_{n,n}(\mathbb{F})$,*

$$\operatorname{rank} A_0 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = n - 1. \tag{5}$$

Якщо $d_A^{(n-1)}(\lambda) = 1$, то для рівняння $XA_0 = A_1$ існує розв'язок $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ із характеристичним многочленом $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_n$ тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{rank} M(A) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} M(A) \\ N(A,d) \end{bmatrix}.$$

При цьому шуканий розв'язок $X_0 = D$ однозначно визначається заданим многочленом $d(\lambda)$.

Доведення . *Необхідність.* Так як виконується умова (5), то рівняння $XA_0 = A_1$ розв'язне. Нехай матриця $X_0 = D$ із характеристичним многочленом $d(\lambda)$ розв'язок цього рівняння. На підставі леми 1 рівняння $ZM(A) = N(A,d)$ розв'язне, що і доводить необхідність.

Достатність. Нехай матриця $Z_0 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_{n-1} \end{bmatrix}$, де $B_j \in M_{n,n}(\mathbb{F})$; $j = 1, 2, \ldots, n-1$; – розв'язок рівняння $ZM(A) = N(A,d)$. Згідно леми 2 для матричної в'язки $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1$ та многочленної матриці $B(\lambda) = I_n\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + B_2\lambda^{n-3} + \cdots + B_{n-1}$ виконується співвідношення

$$B(\lambda)A(\lambda) = d(\lambda)A_0. \tag{6}$$

Враховуючи рівність (5) отримуємо $\operatorname{rank} A(\lambda) = n - 1$. Так як $d_A^{(n-1)}(\lambda) = 1$, то для матричної в'язки $A(\lambda)$ існують матриці $U(\lambda), V(\lambda) \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$ такі, що $A(\lambda) = U(\lambda)\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0)V(\lambda)$. На підставі цього з рівності (6) отримуємо

$$B(\lambda)U(\lambda)\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0) = d(\lambda)A_0V^{-1}(\lambda).$$

Звідси випливає

$$B(\lambda)U(\lambda) = W(\lambda)\operatorname{diag}(d(\lambda), \ldots, d(\lambda), 1). \tag{7}$$

Оскільки $\deg\det B(\lambda) = n(n-1)$ і $U(\lambda) \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$, то перейшовши до визначників в обох частинах рівності (7), здобуваємо $\det B(\lambda) = d^{n-1}(\lambda)$ і $W \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$. Отже, для матриці $G(\lambda) = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, d(\lambda))W^{-1}(\lambda)$ має місце співвідношення

$$B(\lambda)U(\lambda)G(\lambda) = I_n d(\lambda). \tag{8}$$

Так як $\deg B(\lambda) = n-1$ і $\deg b(\lambda) = n$, то з рівності (8) випливає, що

$$U(\lambda)G(\lambda) = I_n\lambda - D \in M_{n,n}(\mathbb{F}[\lambda]) \tag{9}$$

– матрична в'язка з визначником $\det(I_n\lambda - D) = d(\lambda)$. Враховуючи співвідношення (8) рівність (6) перепишемо так

$$B(\lambda)A(\lambda) = B(\lambda)U(\lambda)G(\lambda)A_0 = B(\lambda)(I_n\lambda - D)A_0.$$

Звідси здобуваємо, що для матричної в'язки $A(\lambda)$ існує зображення у вигляді добутку $A(\lambda) = (I_n\lambda - D)A_0$, де $D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ – матриця з характеристичним многочленом $d(\lambda)$. Отже, матриця D є розв'язком рівняння $XA_0 = A_1$. Крім цього, на підставі рівності (8) отримуємо $B(\lambda)(I_n\lambda - D) = I_n d(\lambda)$. Звіди здобуваємо, що $D = B_1 - I_n d_1$.

Доведемо, що шуканий розв'язок $X_0 = D$ однозначно визначений многочленом $d(\lambda)$. Враховуючи умову (5) припустимо, що для рівняння $XA_0 = A_1$ існує ще один розв'язок $\widetilde{D} \in M_n(\mathbb{F})$ із характеристичним многочленом $d(\lambda)$, який відмінний від попереднього, тобто $\widetilde{D} \neq D$. Тоді

$$A(\lambda) = (I_n\lambda - D)A_0 = (I_n\lambda - \widetilde{D})A_0.$$

Так як $A(\lambda) = U(\lambda)\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0)V(\lambda)$, де $U(\lambda), V(\lambda) \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$, то на підставі рівності (9) здобуваємо

$$I_n\lambda - \widetilde{D} = U(\lambda)\operatorname{diag}(1, ..., 1, d(\lambda))W_1(\lambda) =$$
$$U(\lambda)\operatorname{diag}(1, ..., 1, d(\lambda))W(\lambda)W^{-1}(\lambda)W_1(\lambda) =$$
$$(I_n\lambda - D)Q(\lambda),$$

де $W_1(\lambda) \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$ і $Q(\lambda) = W^{-1}(\lambda)W_1(\lambda)$. Звідси випливає, що рівність $I_n\lambda - \widetilde{D} = (I_n\lambda - D)Q(\lambda)$ можлива лише при $Q(\lambda) = I_n$.

Отже, матриця $D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$, яка є розв'язком рівняння $XA_0 = A_1$, однозначно визначена своїм характеристичним многочленом $d(\lambda)$. Одночасно здобуваємо, що рівняння $ZM(A) = N(A, d)$ має єдиний розв'язок, тобто $\operatorname{rank} M(A) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} M(A) \\ N(A, d) \end{bmatrix} = n(n-1)$. Теорему доведено.

Зауважимо, що із доведення достатності теореми 1 отримуємо метод побудови розв'язку рівняння $XA_0 = A_1$ із заданим характеристичним многочленом, який будуємо за розв'язком рівняння $ZM(A) = N(A, d)$.

Теорема 2 . *Нехай для рівняння $XA_0 = A_1$, де $A_0, A_1 \in M_{n,n}(\mathbb{F})$,*

$$\operatorname{rank} A_0 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = n - 1. \tag{10}$$

Якщо для матричної в'язки $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1$ н.с.д. мінорів $(n-1)-$го порядку $d_A^{(n-1)}(\lambda) = 1$, то для кожного унітального многочлена

$$d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$$

для рівняння $XA_0 = A_1$ існує розв'язок $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ із характеристичним многочленом $d(\lambda)$. При цьому матриця D многочленом $d(\lambda)$ визначена однозначно.

Доведення . На підставі рівності (10) матричне рівняння $XA_0 = A_1$ розв'язне. Нехай матриця $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ із характеристичним многочленом $\det(I_n\lambda - D) = d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_n$ є розв'язком цього рівняння. Отже, $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1 = (I_n\lambda - D)A_0$. Так як $d_A^{(n-1)}(\lambda) = 1$, то згідно теореми 1 матриця D характеристичним многочленом $d(\lambda)$ визначена однозначно. Крім цього

$$\operatorname{rank} M(A) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} M(A) \\ N(A, d) \end{bmatrix} = n(n-1).$$

Оскільки $\operatorname{rank} A_0 = n - 1$, то для A_0 існує матриця $T \in GL(n, \mathbb{F})$ така, що $A_0T = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_0 & 0_{n,1} \end{bmatrix}$, де $\widetilde{A}_0 \in M_{n,n-1}(\mathbb{F})$. На підставі цього здобуваємо

$$A(\lambda)T = (I_n\lambda - D)A_0T = (I_n\lambda - D) \begin{bmatrix} \widetilde{A}_0 & 0_{n,1} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \widetilde{A}_0 & 0_{n,1} \end{bmatrix} \lambda - \begin{bmatrix} \widetilde{A}_1 & 0_{n,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{A}(x) & 0_{n,1} \end{bmatrix},$$

де $\widetilde{A}_1 = D\widetilde{A}_0 \in M_{n,n-1}(\mathbb{F})$. Отже, матриця $D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ – розв'язок рівняння $X\widetilde{A}_0 = \widetilde{A}_1$. Так як $d_A^{(n-1)}(\lambda) = 1$, то для матричної в'язки $\widetilde{A}(\lambda) \in M_{n,n-1}(\mathbb{F}[\lambda])$ виконується $d_{\widetilde{A}}^{(n-1)}(\lambda) = 1$. Згідно теореми 1 та наслідку 1

$$\operatorname{rank} M(\widetilde{A}) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} M(\widetilde{A}) \\ N(\widetilde{A}, d) \end{bmatrix} = n(n-1).$$

Так як $M(\widetilde{A})$ квадратна $(n-1)n \times (n-1)n$-матриця, то з останньої рівності випливає, що $M(\widetilde{A})$ – неособлива матриця.

Таким чином, рівняння $ZM(\widetilde{A}) = N(\widetilde{A}, d)$ розв'язне для довільного унітального многочлена $d(\lambda)$ степеня n. Оскільки матричні рівняння $XA_0 = A_1$ і $X\widetilde{A}_0 = \widetilde{A}_1$ рівносильні, то матричне $ZM(A) = N(A, d)$ розв'язне для довільного унітального многочлена $d(\lambda)$ степеня n. На підставі теореми 1, розв'язок $X_0 = D$ рівняння $XA_0 = A_1$ однозначно визначається характеристичним многочленом $d(\lambda) = \det(I_n\lambda - D)$. Теорему доведено.

Розглянемо матричне рівняння

$$XA_0 = A_1, \tag{11}$$

де $A_0, A_1 \in M_{n,n-1}(\mathbb{F})$. Рівняння (11) розв'язне тоді і тільки тоді, коли розв'язне рівняння $X \begin{bmatrix} A_0 & 0_{n,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{n,1} \end{bmatrix}$. Із теореми 1 отримуємо.

Наслідок 1 . *Нехай для матричної в'язки* $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1 \in M_{n,n-1}(\mathbb{F}[\lambda])$ *н.с.д. мінорів* $(n-1)$*−го порядку* $d_A^{(n-1)}(\lambda) = 1$. *Якщо* $\operatorname{rank} A_0 = n - 1$, *то для кожного унітального многочлена*

$$d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_{n-1}\lambda + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$$

для рівняння $XA_0 = A_1$ *існує розв'язок* $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ *із характеристичним многочленом* $d(\lambda)$. *При цьому матриця* D *многочленом* $d(\lambda)$ *визначена однозначно.*

Наслідок 2 . *Нехай для матричної в'язки* $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{F}[\lambda])$, $m > n$, *н.с.д. мінорів* $(n-1)$*−го порядку* $d_A^{(n-1)}(\lambda) = 1$. *Якщо* $\operatorname{rank} A_0 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = n - 1$, *то для кожного унітального многочлена*

$$d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_{n-1}\lambda + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$$

для рівняння $XA_0 = A_1$ *існує розв'язок* $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ *із характеристичним многочленом* $d(\lambda)$. *При цьому шуканий розв'язок* D *характеристичним многочленом* $d(\lambda)$ *визначений однозначно.*

Доведення . Так як $\operatorname{rank} A_0 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = n - 1$, то для матриць $A_0, A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ існує матриця $W \in GL(m, \mathbb{F})$ така, що

$$A_0W = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_0 & 0_{n,m-n} \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_0 & 0_{n,m-n+1} \\ \widetilde{A}_1 & 0_{n,m-n+1} \end{bmatrix},$$

де $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1 \in M_{n,n-1}(\mathbb{F})$. Очевидно, що $d_{\widetilde{A}}^{(n-1)}(\lambda) = 1$, де $\widetilde{A}(\lambda) = \widetilde{A}_0\lambda - \widetilde{A}_1 \in M_{n,n-1}(\mathbb{F}[\lambda])$. На підставі наслідку 1, для кожного унітального многочлена $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$ для рівняння $X\widetilde{A}_0 = \widetilde{A}_1$ існує розв'язок $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ із характеристичним многочленом $d(\lambda)$. При цьому матриця D многочленом $d(\lambda)$ визначена однозначно. Оскільки рівняння $X\widetilde{A}_0 = \widetilde{A}_1$ і $XA_0 = A_1$ рівносильні, то наслідок доведено.

3 . Приклади

Нехай $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ – поле раціональних чисел. Розглянемо наступні приклади.

Приклад 1 . *Нехай* $A_0 = A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{Q})$. *Очевидно, що рівняння* $XA_0 = A_1$ *розв'язне над полем* $\mathbb{Q}$. *Покажемо, що для даного рівняння не існує розв'язку з характеристичним многочленом* $d(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$. *Припустимо, що матриця* $X_0 = D \in M_{2,2}(\mathbb{Q})$ *із заданим харатеристичним многочленом* $d(\lambda)$ *є розв'язком цього рівняння. Згідно леми 1 для матричної в'язки* $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *та многочлена* $d(\lambda)$ *рівняння* $ZM(A) = N(A, d)$ *розв'язне. Очевидно, що* $\operatorname{rank} M(A) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 1$. *Проте* $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} M(A) \\ N(A, d) \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$. *Так як рівняння* $ZM(A) = N(A, d)$ *несумісне, то для рівняння* $XA_0 = A_1$ *не існує розв'язку* $X_0 = D$ *з характеристичним многочленом* $d(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$.

Приклад 2 . *Розглянемо матричне рівняння* $XA_0 = A_1$, *де* $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *і* $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. *Легко перевірити, що* $\operatorname{rank} A_0 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = 2$ *і для матричної в'язки* $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1 \in M_{3,3}(\mathbb{Q}[\lambda])$ *н.с.д. мінорів 2–го порядку* $d_A^{(2)}(\lambda) = 1$. *Отже, для кожного унітального многочлена третього степеня* $d(\lambda) \in \mathbb{Q}[\lambda]$ *для рівняння* $XA_0 = A_1$ *існує розв'язок із характеристичним многочленом* $d(\lambda)$.

Вкажемо розв'язок цього рівняння із характеристичним многочленом $d(\lambda) = \lambda^3$. Тепер побудуємо матриці

$$M(A) = \begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & A_0 & -A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,1\,0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0\,0\,0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0\,0\,1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0\,0\,0 & 1 & 1 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0\,0\,0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$N(A,d) = \begin{bmatrix} A_0d_1 + A_1 & A_0d_2 & A_0d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,3\,1\;0\,0\,0\;0\,0\,0 \\ 1\,2\,1\;0\,0\,0\;0\,0\,0 \\ 1\,2\,1\;0\,0\,0\;0\,0\,0 \end{bmatrix}.$$

Матриця $Z_0 = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$ *– розв'язок рівняння* $ZM(A) = N(A,d)$.

Так як $B_1 - D = I_3d_1$, *то* $D = B_1 - I_3d_1 = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ *– шуканий розв'язок рівняння із характеристичним многочленом* $d(\lambda) = \lambda^3$.

Надалі $\mathbb{C}$ – поле комплексних чисел. Здобуті результати можуть бути використані при розв'язуванні систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. В цьому зв'язку розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dY(t)}{dt} A_0 = Y(t)A_1, \tag{12}$$

де $A_0, A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ і $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t)\; y_2(t)\; \dots\; y_n(t) \end{bmatrix}$ – невідомий вектор-рядок від змінної t. Очевидно, якщо рівняння $XA_0 = A_1$ розв'язне, то система лінійних диференціальних рівнянь (12) теж розв'язна. Нехай матриця $D \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ – розв'язок рівняння $XA_0 = A_1$. Тепер систему лінійних диференціальних рівнянь (12) запишемо у вигдяді $\left(\frac{dY(t)}{dt} - Y(t)D\right) A_0 = 0$. Оскільки рівняння $\frac{dY(t)}{dt} = Y(t)D$ розв'язне, то розв'язки системи рівнянь (12) ми можемо шукати з наперед заданим спектром. Отже, результати попереднього розділу можуть бути застосовані до пошуку розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь (12) з наперед заданими характеристичними значення.

Література

1. Ф.Р. Гантмахер. *Теория матриц.* М.: Физматлит, 1988, 556 с.
2. F.J.H. Don. *On the symmetric solutions of a linear matrix equation* // Linear Algebra Appl., **93**(1987), p.1–7.
3. K.-W.E. Chu. *Symmetric solutions of linear matrix equations by matrix decompositions* // Linear Algebra Appl., **119** (1989), p.35–50.
4. Hua Dai. *On the symmetric solutions of linear matrix equations* // Linear Algebra Appl., **131** (1990), p.1–7.
5. L. Wu. *The Re-positive definite solution to the matrix inverse problem $AX = B$* // Linear Algebra Appl., **174** (1992), p.145–151.
6. L. Wu, B. Cain. *The Re-nonnegative definite solutions to the matrix inverse problem $AX = B$* // Linear Algebra Appl., **236** (1996), p.137–146.
7. Zhenyun Peng, Xiyan Hu. *The reflexive and anti-reflexive solutions of the matrix equation $AX = B$* // Linear Algebra Appl., **375** (2003), p.147–155.
8. Chunjun Meng, Xiyan Hu, Lei Zhang. *The skew-symmetric orthogonal solutions of the matrix equation $AX = B$* // Linear Algebra Appl., **402** (2005), p.303–318.
9. R.A. Horn, V. Sergeichuk, N. Shaked-Monderer. *Solution of linear matrix equations in a ∗congruence class* // Electron. J. Linear Algebra, **17** (2005), p.153–156.
10. Bing Zheng, Lijuan Ye, Dragana S. Cvetkovic-Ilic. *The *congruence class of the solutions of some matrix equations* // Comput. Math. Appl., **57** (2009), p.540-549.

В. М. Прокіп
ІППММ НАН України, Львів, Україна
E-mail: v.prokip@gmail.com

V.M. Prokip

On solutions of the matrix equation $XA_0 = A_1$ with prescribed characteristic polynomials

We investigate the structure of solutions of a matrix equation $XA_0 = A_1$, where A_1, A_2 are $n \times m$ matrices over a field $\mathbb{F}$ and X is unknown $n \times n$ matrix. Let $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_{n-1}\lambda + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$ be a monic polynomial of degree n. In this note we present the conditions under which for the equation $XA_0 = A_1$ there exists a solution $X_0 = D$ with the characteristic polynomial $d(\lambda)$.