DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.4/2014.41443
Proc. Intern. Geom. Center 2014 **7**(4) 40–49 $d\omega$

Топологическая классификация функций Морса рода 1 на S^3

А. В. Сергеюк

Аннотация В данной статье рассматривается вопрос о топологической классификация функций Морса на трехмерной сфере, все критические точки которой лежат на разных поверхностях уровня. Классификация производится по отношению к группе $\mathrm{Diff}_0(S^3)\times\mathrm{Diff}_0(\mathbb{R})$ – группе сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов областей определения и значений. Описаны соответствующие ориентированые графы (графы Кронрода-Риба). Показано, что для функций, компоненты поверхностей уровня которых не сложнее тора, они являются полными инвариантами. Более того, каждый такой граф может быть реализован функцией рода 1, поэтому для более сложных функций на сфере эти ориентированые графы уже не различают их топологический тип.

Ключевые слова функция Морса · топологическая классификация · трехмерная сфера

УДК 517.91

1 Введение

Задача о топологической классификации функций Морса является частью общей задачи о классификации дифференцируемых отображений между многообразиями. Общее определение, сформулированое Р. Томом, звучит так: два отображения $f, g \in C^k(M, N)$ называются дифференцируемо-

эквивалентными если существуют C^k-диффеоморфизмы $h\colon M \to M$ и $k\colon N \to N$ такие что $f \circ h = k \circ g$, $0 \leq k \leq \infty$. Аналогичным образом эту задачу можно сформулировать как задачу об описании орбит естественного действия группы Ли $\mathrm{Diff}^k(M) \times \mathrm{Diff}^k(N)$ на многообразии $C^k(M, N)$. В случае пространства вещественных гладких функций $C^\infty(M, \mathbb{R})$ имеется его стратификация, предложенная и описанная Ж.Серфом [6]. Стратом $\mathcal{F}_0$ коразмерности 0 является пространство функций с невырождеными критическими точками (функции Морса), причем никакие две критические точки не лежат на одном уровне. Этот страт имеет много замечательных свойств, см. [16]. Функции из этого страта мы будем называть "функциями общего положения". Естественно начинать изучать топологическую классификацию именно с них, заданных на конкретных многообразиях, причем иногда, в зависимости от заданного многообразия, разумным является ограничивать группу $\mathrm{Diff}^k(M) \times \mathrm{Diff}^k(\mathbb{R})$ до группы $\mathrm{Diff}_0(M) \times \mathrm{Diff}_0(\mathbb{R})$ – изотопных тождеству диффеоморфизмов.

В.Арнольдом была изучена топологическая классификация функий общего положения на окружности S^1 при изотопных тождеству диффеоморфизмах [1]. Эти функции классифицируются конечными последовательностями пилообразного типа, названные им "змеями". Он также подсчитал количество неэквивалентных функций с заданым количеством критических точек, выразив его через коэффициент разложения в ряд функции tan.

В.Шарко исследовал вопрос о топологической классификации в случае поверхностей [14]. Им был получен полный инвариант функций даже более широкого класса. Этим инвариантом является специальным образом ориентируемый граф ("граф Кронрода-Риба"). В дальнейшем, Арнольд, используя инвариант Шарко, занялся подсчетом числа неэквивалентных функий общего положения на двумерной сфере с заданым количеством критических точек, сформулировав гипотезу о его асимптотическом росте [2]. Эта гипотеза вскоре была доказана Николаеску, который также вывел для этого числа реккурентную формулу [10],[11]. В.Арнольд стал развивать эти исследования для случая двумерного тора, ограничиваясь специфическими классами функций, также он изучал связи этой задачи с вещественной алгебраической геометрией [4], [5]. Свойства действия группы Diff на поверхностях изучались в работе [8].

А.Пришляк исследовал общий вопрос о топологической классификации функций Морса на многообразиях размерности 3 и 4, связав её с классификациями соответственно диаграм Хегора и Кёрби [12], [13].

Целью данной статьи является развитие этого направления на конкретный случай трехмерной сферы S^3. Вопрос о строении графов функций на S^3 был также поставлен Арнольд в его лекциях [5]. Ограничиваясь функциями Морса, род компонент поверхностей уровней которых не сложнее тора (функции Морса рода 1), мы показываем что соответствующий ориентированый граф, как и в случае функций на S^2, также является полным инвариантом и описываем все такие графы. Вместе с тем оказывается, что для функций высших родов ориентированые графы уже не способны различить их топологический тип.

2 Топология функций общего положения на S^3

Пусть задана функция Морса $f\colon S^3 \to \mathbb{R}$, все критические точки которой лежат на разных уровнях. Такие функции мы также будем называть *функциями общего положения.* Обозначим через m_i количество критических точек индекса i. По теореме Морса,

$$\sum_{i=0}^{3}(-1)^i m_i = \chi(S^3) = 0.$$

Обозначим через $n = 2k = m_0 + m_1 + m_2 + m_3$ количество всех критических точек функции f. Тогда $m_2 = k - m_0$ и $m_3 = k - m_1$.

Предложение 1 *Имеют место следующие неравенства*

$$1 \le m_0 \le k$$

$$m_0 - 1 \le m_1 \le k - 1,$$

причем m_0 и m_1 могут принимать любые значения из этого диапазона.

Доказательство Функция имеет не менее одного минимума, поэтому $m_0 \geq 1$. Предположим что $m_0 > k$. Тогда должно существовать как минимум k критических точек индекса 1 чтобы нулевое число Бетти равнялось нулю, поскольку в соответствующем разложении сферы на ручки каждой критической точке индекса 0 соответствует своя компонента связности. Для их соединения необходимо как минимум k ручек индекса 1. Но тогда общее количество критических точек будет превосходить $2k$. Поэтому $m_0 \le k$ и $m_1 \geq m_0 - 1$.

Равенства $m_0 = k$, $m_1 = m_0 - 1$ и $m_1 = k - 1$ возможны, поскольку тогда в соответствующем разложении на ручки будут существовать $k - 1$ ручек индекса 1, уменьшающих количество компонент связности до единицы, врезультате чего получится трехмерный диск, и также будет одна ручка индекса 3, заклеивающая этот диск до трехмерной сферы – она соответствует единственной критической точке индекса 3.

Неравенство $m_1 \leq k - 1$ следует из того что $m_3 = k - m_1 \geq 1$, поскольку функция имеет не менее одного максимума. Пусть теперь $m_0 = l$, $1 \leq l \leq k$ и $m_1 = p$, $l - 1 \leq p \leq k - 1$ – произвольные значения из диапазона неравенств. Тогда $m_2 = k - l$ и $m_3 = k - p$.

Покажем, что существует разложение трехмерной сферы на ручки, количество которых соответствует этим значениям. Тем самым будет доказано существование функции Морса на трехмерной сфере с таким числом критических точек соответствующих индексов. Мы имеем l ручек индекса 0. Соединим их между собой с помощью $l - 1$ ручек индекса 1. Получим трехмерный диск. Остальные $p - l + 1$ ручек индекса 1 приклеем к нему, получив тем самым крендель рода $p - l + 1$. Заметим, что до сих пор все приклейки осуществлялись единственно возможным, с точностью до изотопии, образом. Теперь мы можем приклеить к нашему кренделю $p - l + 1$ ручек индекса 2 таким образом, чтобы получить опять трехмерный диск. Сделать это можно, например, приклеивая вдоль стандартной системы неразбивающих поверхность кренделя системы кривых. Приклеем остальные $k - l - (p - l + 1) = k - p - 1$ ручек индекса 2 не нарушая ориентируемость. Получим сферу S^3 с вырезаными из неё трехмерными дисками в количестве $k - p$ штук. Заклеим их всеми ручками индекса 3 в соответствующем количестве. Получим сферу S^3.

Далее мы установим свойство "незаузленности"поверхностей уровня функций общего положения на S^3. Под "кренделем"мы будем понимать любое 3-мерное многообразие, образованое приклейкой к трехмерному диску ручек индекса 1. Аналогично, крендель – это регулярная окрестность любого конечного одномерного комплекса в S^3.

Определение 1 *Конечный одномерный комплекс (граф) K в S^3 называется незаузленным если в S^3 существует вложенная двумерная сфера S^2 такая, что $K \subset S^2$.*

Замкнутая ориентируемая поверхность, вложенная в S^3, разбивает её на две компоненты. Замыкание по крайней мере одной из компонент всегда

является кренделем. Будем называть его *кренделем, ограниченным данной поверхностью. Остовом* кренделя будем называть букет окружностей в S^3, регулярной окрестностью которого он является.

Определение 2 *Замкнутая ориентируемая поверхность, вложенная в S^3, называется незаузленной если остов кренделя который она ограничивает является незаузленным.*

Предложение 2 *Всякая регулярная поверхность уровня функции общего положения на трехмерной сфере является незаузленной.*

Доказательство Построим по функции разложение трехмерной сферы на ручки. Рассмотрим объединение всех ручек индекса 0 и 1 – регулярную окрестность замыкания интегральных траекторий градиента функции f, выходящих из критических точек индекса 0 и входящих в критические точки индекса 1. Эта окрестность является кренделем. Замыкание дополнения к этому кренделю также является кренделем, поскольку его можно представить как аналогичную регулярную окрестность уже для функции $-f$. Общий край этих кренделей таким образом является поверхностью Хегора F в трехмерной сфере. По теореме Вальдхаузена, [18], любые два разбиение Хегора трехмерной сферы поверхностями одинаковых родов эквивалентны: существует диффеоморфизм трехмерной сферы, переводящий одну поверхность в другую. При этом, образ остова первой поверхности будет, очевидно, остовом для второй. Существует стандартное разбиение Хегора трехмерной сферы незаузленной поверхностью любого рода. Если бы поверхность F была заузленной, то не существовало бы диффеоморфизма трехмерной сферы, который бы перевел незаузленный остов стандартной поверхности в заузленный остов поверхности F, поскольку двумерная сфера, на которой лежит первый остов, перейдет в двумерную сферу. Таким образом поверхность F является незаузленной.

Рассмотрим теперь произвольную регулярную поверхность уровня $\tilde{F}$ функции f, отличную от S^2. Она является связной частью всей поверхности F: $F = X\#\tilde{F}\#Y$, следовательно остов кренделя который она ограничивает является подграфом остова кренделя который ограничивает поверхности F. Известно ([17]), что если граф незаузлен, то и всякий подграф также незаузлен. Отсюда следует незаузленность поверхности уровня $\tilde{F}$.

3 Теоремы о реализации и классификации

Определение 3 *Графом гладкой функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ на замкнутом компактном многообразии X назывется пространство, точками которого являются компоненты связности уровней функции f.*

Это пространство действительно является конечным графом. Детальнее об этих графах см. [15]. На графе G функции общего положения f существует каноническая ориентация: $a < b$, $a, b \in V(G)$, если $f(a) < f(b)$. Пусть $f\colon S^3 \to \mathbb{R}$ – функция общего положения и G – её ориентированный граф. В этом случае G является деревом. Концевые вершины этого дерева соответствуют локальным минимумам и максимумам функции f. Внутренные вершины имеют валентность 2 или 3.

Вершины валентности 3 соответствуют критическим точкам индекса 1 и 2, после прохождении которых число компонент уровня функции уменьшается либо увеличивается на единицу соответственно. В первом случае происходит приклейка ручки индекса 1 своими концами к разным компонентам уровня. Во втором случае приклеивается ручка индекса 2 вдоль простой замкнутой кривой, ограничивающей диск. Учитывая ориентацию, для этих вершин возможны две ситуации – либо два ребра являются входящими а третье – исходящим (соответствующая критическая точка имеет индекс 1), либо наоборот (соответствующая критическая точка имеет индекс 2). Число вершин валентности 3, соответствующих критическим точкам индекса 1, равно $m_0 - 1$, а число вершин, соответствующих критическим точкам индекса 2, равно $m_3 - 1$.

Вершины валентности 2 также соответствуют критическим точками индекса 1 и 2, но при прохождении их число компонент не меняется. В этом случае соответствующая ручка индекса 1 приклеивается обеими концами к одной компоненте связности и ручка индекса 2 приклеивается вдоль простой замкнутой кривой, не ограничивающей диск. В этих точках одно ребро является входящим, а другое – исходящим. Число вершин валентности 2, соответствующих критическим точкам индекса 1, равно $m_1 - m_0 + 1$, а соответствующих критическим точкам индекса 2 – $m_2 - m_3 + 1$. Общее число таких вершин четно, причем $m_1 - m_0 + 1 = m_2 - m_3 + 1$.

Теорема 1 *Рассмотрим конечное дерево, имеющее помимо концевых вершин однозначно определенное число вершин валентности 3 и четное число вершин валентности 2. Упорядочим его вершины таким образом, чтобы*

число входящих и исходящих ребер в вершинах валентности 3 *отличалось ровно на единицу, а в вершинах валентности* 2 *было одинаковым. Тогда любое такое ориентированое дерево является графом некоторой функции общего положения на* S^3.

Доказательство Сопоставим концевой вершине с входящим ребром ручку индекса 3, концевой вершине с исходящим ребром – ручку индекса 0, вершине валентности 3 с двумя входящими ребрами – ручку индекса 1, вершине валентности 3 с двумя исходящими ребрами – ручку индекса 2.

Количество вершин валентности 2 является четным. Разобьем их на две равномощные части. При этом, каждая вершина из первой части должна быть меньше каждой вершины из второй части. Сопоставим точкам первой части ручки индекса 1, а точкам второй части – ручки индекса 2.

Тогда граф будет задавать разложение трехмерной сферы на ручки – достаточно лишь контролировать способ приклейки ручки индекса 2, отвечающей вершине валентности 3, таким образом, чтобы в результате род компонент уровня был равен числу оставшихся вершин валетности 2, отвечающих критическим точкам индекса 2, на соответствующих ветках дерева. Это разложение на ручки будет задавать некоторую функцию общего положения на S^3.

Для функций на замкнутых компактных трехмерных многообразиях, помимо такой характеристики её топологической сложности как число критических точек, удобно ввести еще и понятие рода.

Определение 4 *Будем говорить что функция общего положения на трехмерной сфере имет род* g *если род любой её регулярной поверхности уровня не превосходит* g.

Замечание 1 *Если ориентированый граф из предыдущей теоремы не имеет вершин валентности* 2, *то он реализуеться лишь функциями рода* 0. *Если же он имеет по крайней мере* 2 *вершины валентности* 2 *то его всегда можно реализовать функцией рода* 1.

Следующая теорема дает топологическую классификацию функций рода 1 в терминах их ориентированых графов. Беря во внимание предыдущее замечание, топологический тип функций высших родов эти графы уже не различают.

Дадим определение.

Определение 5 *Две функции общего положения $f, g\colon S^3 \to \mathbb{R}$ будем называть топологически эквивалентными, если существуют сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $h \in Diff_0(S^3)$ и сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $k \in Diff_0(\mathbb{R})$ такие что $f \circ h = k \circ g$*

Теорема 2 *Две функции общего положения $f, g\colon S^3 \to \mathbb{R}$ рода 1 топологически эквиваленты тогда и только тогда, когда их ориентированые графы изоморфны с сохранением ориентации.*

Доказательство Необходимость. Пусть функции топологически эквивалентны. Тогда они задают одинаковые представления S^3 в виде композиции элементарных кобордизмов. По этому разложению однозначно, с точностью до изоморфизма с сохранением ориентации, восстанавливаются их графы.

Достаточность. Пусть графы изоморфны с сохранением ориентации. Тогда они задают одинаковые разложения S^3 в композицию элементарных кобордизмов. С помощью диффеоморфизма $k \in \mathrm{Diff}_0(\mathbb{R})$ можно добиться того что на соответствующих границах кобордизмов обоих разложений функции принимают одинаковые значения. Поскольку поверхности уровня функции на трехмерной сфере являются незаузленными и двосторонними, границы элементарных кобордизмов одного разложения можно изотопией перевести в соответствующие границы элементарных кобордизмов другого разложения. За теоремой о продлении изотопии, существует диффеоморфизм $\tilde{h} \in \mathrm{DIff}_0(S^3)$, реализующий эту изотопию.

Рассмотрим элементарный трехмерный кобордизм $(\partial_- W, W, \partial_+ W) \subset S^3$, род компонент границ которого не превышает 1. Пусть $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ – две функции Морса на нем, имеющие ровно по одной критической точки внутри него. Пусть также $f(\partial_- W) = g(\partial_- W) = \mathrm{const}_1$ и $\tilde{f}(\partial_+ W) = \tilde{g}(\partial_+ W) = \mathrm{const}_2$ Покажем, что существует диффеоморфизм s кобордизма W, изотопный дождественному и тождественный на его границах. Для этого достаточно показать что соответствующие критическим точкам характеристические диски изотопны. Таких кобордизмов существует 8 штук. Зададим их, указывая пару $(\partial_- W, \partial_+ W)$: $(\emptyset, S^2), (S^2, \emptyset), (S^2, S^2 \sqcup S^2), (S^2 \sqcup S^2, S^2), (S^2, T^2), (T^2, S^2), (T^2, S^2 \sqcup T^2), (S^2 \sqcup T^2, T^2)$. В первом случае характеристическим диском является пустое множество $\emptyset$, а во втором – трехмерный диск D^3. Любые два таких диска изотопны. В третьем случае характеристическим диском является двумерный диск D^2, пересекающий S^2 вдоль простой замкнутой кривой. Любые два таких диска изотопны. В четвертом случае характеристичкий диск представляет собой одномерный диск D^1, пересекающий каждую из компонент $S^2 \sqcup S^2$ в одной точке. Любые два

таких диска также изотопны. В пятом случае характеристическим диском является одномерный диск D^1, пересекающий сферу S^2 в двух точках. Любые два таких диска также изотопны. В шестом случае характеристическим диском является двумерный диск D^2, пересекающий тор T^2 вдоль простой замкнутой кривой γ. Пусть $D^2 \times S^1$ – полноторий, ограниченый этим тором и $D^2 \times S^1 \cap W = \emptyset$. Характеристический диск D^2 вложен в дополнении к этому полноторию: $D^2 \subset (S^3 - D^2 \times S^1)$. Единствено возможной, с точностью до изотопии, кривой $\gamma \subset T^2$ является его параллель, поскольку любая другая кривая в $S^3 - D^2 \times S^1$ не ограничивает диск. Следовательно, все такие характеристические диски также изотопны. В седьмом случае характеристическим диском является двумерный диск D^2, пересекающий поверхность тора вдоль простой замкнутой кривой, гомотопной нулю. Все такие кривые на торе изотопны, поэтому изотопны и характеристические диски. И наконец, в восьмом случае характеристическим диском является одномерный диск D^1, пересекающий каждую из компонент $S^2 \sqcup T^2$ в одной точке. Все такие диски также изотопны. Стоит отметить, что при рассмотрении этих вариантов мы неявно опять пользовались утверждением о незаузленности поверхностей уровня.

Таким образом, после применения диффеоморфизмов k и $\tilde{h}$ мы применяем еще диффеоморфизмы типа s на каждом из элементарных кобордизмов. Композиция h этих диффеоморфизмов является изотопным тождеству диффеоморфизмом. Получаем, что функции f и g топологически эквивалентны.

Замечание 2 *Графы функций рода* 0 *не имеют вершин валентности* 2, *поэтому топологические классы таких функций находятся во взаимнооднозначном соответствии с топологическими классами функций общего положения на* S^2.

Список литературы

1. V. I. Arnold, The calculus of snakes and the combinatorics of Bernoulli, Euler and Springer numbers of Coxeter groups, Russian Math. Surveys 47 (1992), 3-45
2. V. I. Arnold, Smooth functions statistics, Funct. Anal. Other Math. 1 (2006), 135-178
3. V. I. Arnold, Topological classification of Morse functions and generalization of Hilbert's 16th problem, Math. Phys. Anal. Geom. 10 (2007), 227-236
4. V. I. Arnold, Topological classification of Morse polynomials, Proc. Steklov Inst. Math. 268 (2010), 32-48
5. В. И. Арнольд, Экспериментальное наблюдение математических фактов, МЦНМО (2006), 120
6. J. Cerf, La stratification naturelle des espaces de fonctions differentiables reelles et le theoreme de la pseudo-isotopie, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math, 39 (1970), 5-173
7. M. Hirsch, Differential topology, Springer-Verlag New York, (1976), 209
8. S.I.Maksimenko, Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces, Annals of Global Analysis and Geometry, 29-3 (2006), 241-285

9. J. W. Milnor, Lectures on the h-cobordism, Princeton University Press, (1965), 121
10. L. I. Nicolaescu, Morse functions statistics, Funct. Anal. Other Math. 1 (2006), 85-91
11. L. I. Nicolaescu, Counting Morse functions on the 2-sphere, Compositio Math., 144 (2008), 1081-1106
12. A. O. Prishlyak, Equivalence of Morse function on 3-manifolds, Meth. Func. Anal. Top., 5(3) (1999), 49-53
13. A. O. Prishlyak, Conjugacy of Morse functions on 4-manifolds, Russian Math. Surveys, 56(1) (2001), 173-174
14. V. V. Sharko, Smooth and topological equivalence of functions on surfaces, Ukrainian Math. J., 55 (2003), 832-846
15. V. V. Sharko, About a Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold, Meth. Funct. Anal. Top., 12 (2006), 389-396
16. V. V. Sharko, Functions on manifolds: algebraic and topological aspects, Amer. Math. Soc., (1993), 206
17. M. Scharlemann, A. Thompson, Detecting unknotted graphs in 3-space, J. Diff. Geom., 34 (1991), 539-560
18. F. Waldhausen, Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphare, Topology 7, (1968), 195-203

А. В. Сергеюк

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев, Украина.

E-mail: serheyuk@gmail.com

Andriy V. Serheyuk

Topological classification of genus 1 Morse functions on S^3

We study the question about a topological classification of Morse functions on the 3-sphere, all critical points of which lie on a different level surfaces. The classification provides with respect to the group $\mathrm{Diff}_0(S^3) \times \mathrm{Diff}_0(\mathbb{R})$ – the group of orientation-preserving diffeomorphisms of the source and the target. We give a description of a corresponding oriented graphs (Kronrod-Reeb graphs). It is shown that these graphs completely classify genus 1 functions. These functions has a property that the genus of all the components of their level surfaces is not greater then 1. Moreover, all these graphs can be realized by a genus 1 functions, thus they can not distinguish a topological type of a more complex functions.