DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.4/2014.41445
Proc. Intern. Geom. Center 2014 **7**(4) 50–59 *dω*

Властивості псевдогармонічної функції на замкненій області

І.А. Юрчук

Анотація Нехай $f : D \to \mathbb{R}$ – псевдогармонічна функція, яка задана на $k-$зв'язній орієнтованій замкненій області $D \subset \mathbb{C}$, обмеженій жордановими кривими γ_0, γ_1, …, γ_k, $0 \leq k < \infty$. Нагадаємо, що клас псевдогармонічних функцій співпадає з класом неперервних функцій таких, що у внутрішності області міститься скінченне число критичних точок, кожна з яких є сідловою, а звуження функції на її межу має скінченне число локальних екстремумів.

В даній статті доведено, що замикання кожної зв'язної компоненти сім'ї, яка є різницею області D та тих зв'язних компонент ліній рівня критичних та напіврегулярних значень функції f, які містять критичні та межові критичні точки, є замкненою областю одного з трьох типів (кільце, смужка чи сектор). Перший тип характеризується тим, що межа області складається з двох зв'язних компонент, які не мають спільних точок з межовими кривими γ_i, $i = \overline{0,k}$, а всі лінії рівня у її внутрішності гомеоморфні колам. Другий та третій типи областей мають одну зв'язну компоненту межі, а всі лінії рівня у їх внутрішності гомеоморфні відрізкам. Різниця між ними полягає у кількості дуг, що належать межовим кривим γ_i, $i = \overline{0,k}$. У випадку області типу смужка, її межа містить дві дуги, що належать або одній і тій же межовій кривій, або різним. Якщо ж область типу сектор, то така дуга одна. Автором також доведено ряд тверджень, які використовуються при доведенні основної теореми.

Ключові слова псевдогармонічна функція, $k-$зв'язна область

УДК 515.173.2

1 Вступ

Дослідженню псевдогармонічних функцій присвячені роботи В.Каплана [1], М.Морса [5], Ю. Токі [3], Є.Полуляха [2,6] та ін., де доведені основні топологічні характеристики даного класу функцій на диску, площині та поверхні. Зокрема, у монографії [2] досліджено властивості псевдогармонічних функцій на замкненому двовимірному диску та доведено критерій топологічної еквівалентності даного класу функцій. У роботі [6], автором вивчаються псевдогармонічні функції на площині та доведено достатню умову реалізації дерева як їх множини рівня.

В даній роботі розглядаються псевдогармонічні функції, що задані на k-зв'язній орієнтованій замкненій області D, $D \subset \mathbb{C}$. Автором доведено Теорему 2 про структуру зв'язних компонент сім'ї, яка є замиканням різниці області D та тих зв'язних компонент множин рівня критичних та напіврегулярних значень функції f, які містять критичні та межові критичні точки.

Автор висловлює подяку старшому науковому співробітнику відділу топології Інституту математики НАНУ Полуляху Євгену за корисні обговорення та цікавість до даної тематики.

2 Попередні відомості

Позначимо через D, $D \subset \mathbb{C}$, k-зв'язну орієнтовану замкнену область, яка обмежена жордановими кривими $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$, $0 \le k < \infty$.

Нехай $f : D \to \mathbb{R}$ – деяка псевдогармонічна функція. Нагадаємо основні означення, що пов'язані з даним класом функцій [5, 2, 4].

Означення 1 *Функція $f(x, y)$ гармонічна в точці (x_0, y_0), якщо*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0.$$

Означення 2 *Функція $f(z)$ псевдогармонічна в точці $z_0 = (x_0, y_0)$, якщо існує окіл $U(z_0)$ та гомеоморфізм φ околу $U(z_0)$ в себе такий, що $\varphi(z_0) = z_0$ та $f(\varphi(z))$, $z = (x, y)$, – гармонічна і $f(\varphi(z)) \neq const$.*

Функція f псевдогармонічна в замкненый області, якщо вона псевдогармонічна в кожній її точці.

Означення 3 *Точка $z_0 \in D$ є регулярною точкою f, якщо існує відкритий її окіл $U \subseteq D$ і гомеоморфізм $\varphi : U \to D$ такий, що $\varphi(z_0) = 0$ і $f \circ \varphi^{-1}(z) = Rez + f(z_0)$ для всіх $z \in U$.*

Означення 4 *Точка $z_0 \in \partial D$ є регулярною межовою точкою f, якщо існує її окіл U в D та гомеоморфізм $h : U \to D_+$ цього околу в верхній напівдиск D_+ такий, що $h(z_0) = 0$, $h(U \cap f^{-1}(f(z_0))) = \{0\} \times [0, 1)$, $h(U \cap \partial D^2) = (-1, 1)\times\{0\}$ і функція $f\circ h^{-1}$ є строго монотонна на інтервалі $(-1, 1)\times\{0\}$.*

Якщо точка $z_0 \in D$ не є регулярною точкою f, то вона називається *критичною.*

За означенням всі критичні точки f є сідловими, тобто для кожної з них існує окіл $U \subseteq D$ і гомеоморфізм $\varphi : U \to D$ такий, що $\varphi(z_0) = 0$ і $f \circ \varphi^{-1}(z) = Rez^n + f(z_0)$ для всіх $z \in U$. Число n назвемо кратністю сідлової точки z_0.

Означення 5 *Точки межі ∂D, що не є ні межовими регулярними, ні ізольованими точками їх ліній рівня називаються критичними межовими точками.*

Означення 6 *Число c є критичним значенням f, якщо $f^{-1}(c)$ містить принаймні одну критичну точку.*

Означення 7 *Число c є регулярним значенням f, якщо $f^{-1}(c)$ не містить критичних точок і гомеоморфне незв'язному об'єднанню інтервалів, які перетинаються з межею ∂D лише в своїх кінцях.*

Означення 8 *Число c є напіврегулярним значенням f, якщо воно не є ні регулярним, ні критичним.*

Лінії рівня напіврегулярного значення містять лише межові критичні точки та локальні екстремуми $f\mid_{\partial D}$.

3 Властивості псевдогармонічних функцій

Нехай z_0 – деяка точка замкненої області D, а f – псевдогармонічна функція, що задана на ній. Позначимо через $\Theta(z_0)$ ту зв'язну компоненту ліній рівня $D \cap f^{-1}(f(z_0))$, яка містить точку z_0. Зауважимо, що деколи в тексті ми будемо спрощувати запис до виразу Θ.

Якщо $z_0 \in \partial D$ є ізольованою критичною точкою $f|_{\partial D}$, то $\Theta(z_0) = \{z_0\}$. В усіх інших випадках, $\Theta(z_0)$ є компактною лінійно-зв'язною множиною.

Означення 9 *Дугою α деякої замкненої жорданової кривої γ називається образ неперервного відображення $s(t) : [0; 1] \to \gamma_i$ такий, що $s(0) \neq s(1)$ або $s(0) = s(1)$.*

Межею дуги $\partial\alpha$ будуть точки $s(0)$ та $s(1)$. Скажемо, що дуги α та β *різні*, якщо $\mathrm{Int}\alpha \cap \mathrm{Int}\beta = \emptyset$.

Якщо z_0 – регулярна точка функції f, так само як і довільна точка z, $z \neq z_0$ така, що $z \in \Theta(z_0)$, то $\Theta(z_0)$ гомеоморфна колу або відрізку. У першому випадку $\Theta(z_0) \cap \partial D = \emptyset$ і скажемо, що $\Theta(z_0)$ є множиною *I типу*, а в другому $\Theta(z_0) \cap \partial D = \{z_1, z_2\}$, де z_1 та z_2 – різні точки ∂D. Якщо z_1 та z_2 належать одній дузі α деякої межової кривої $\gamma_i \subset \partial D$, то $\Theta(z_0)$ назвемо множиною *II типу*. У випадку, коли z_1 та z_2 належать різним дугам, то $\Theta(z_0)$ – множина *III типу*. Зауважимо, що тут можливо два випадки: дуги належать одній і тій самій межовій кривій або різним.

Позначимо через $\mathfrak{L}(f)$ множину тих зв'язних компонент ліній рівня критичних та напіврегулярних значень функції f, що містять критичні або межові критичні точки. Розглянемо зв'язні компоненти D_i сім'ї $\overline{D \setminus \mathfrak{L}(f)}$. Зрозуміло, що їх скінченна кількість, кожена з яких є відкритою областю. Позначимо через Λ сім'ю, що складається із $\overline{D_i}$.

Нехай D' – замкнена область з Λ. Згідно побудови D', довільна точка $z \in \mathrm{Int}D'$ є регулярною точкою функції f.

Теорема 1 *Нехай $z_0 \in \mathrm{Int}D'$, $D' \in \Lambda$. Тоді, для довільної $z \in U(z_0)$, $z_0 \neq z$, множини $\Theta(z)$ та $\Theta(z_0)$ мають той самий тип, де $U(z_0)$ – канонічний окіл точки z_0.*

Доведення Якщо $z \in \Theta(z_0)$, то теорема справедлива.

Нехай $z \notin \Theta(z_0)$. Зрозуміло, що $\Theta(z_0) \cap \Theta(z) = \emptyset$, бо в протилежному випадку існує точка $z \in \Theta(z_0) \cap \Theta(z)$, яка є критичною точкою функції f, а це суперечить побудові D'.

Не обмежуючи загальності, припустимо, що $f(z) > f(z_0)$.

Доведемо методом від супротивного, що $\Theta(z_0)$ та $\Theta(z)$ мають той самий тип. Припустимо, що в канонічному околі точки z_0 знайдеться точка z така, що $\Theta(z_0)$ та $\Theta(z)$ мають різний тип. Розглянемо можливі випадки:

Випадок 1: $\Theta(z_0)$ має тип I, а $\Theta(z)$ – тип II. Нехай z_1 та z_2 – точки, що належать деякій дузі $\alpha \subset \gamma_i$ і $\{z_1, z_2\} = \partial\Theta(z)$. Оскільки $f|_{D'}$ є неперервною, до для довільного значення c такого, що $f(z_0) < c < f(z)$ існує компонента Θ' така, що $\Theta' \cap U(z_0) \neq \emptyset$ і $f_{\Theta'} = c$. Згідно припущення Θ' є множиною I або II типу.

Якщо всі Θ' є множинами I типу, то z_1 та z_2 належать межі дуги α. Звідки, $z_1, z_2 \in \partial D$ і $z_1, z_2 \in \mathfrak{L}(f)$. Тоді, значення c є критичним чи напіврегулярним значенням функції f. Отримали суперечність.

Якщо серед всіх Θ' є множини II типу, то знайдеться множина Θ'' така, що $\partial\Theta'' \subseteq \partial\alpha$. Звідки випливає існування критичного чи напіврегулярного значення c', $c' < c$, такого, що $f_{\Theta''} = c'$. Знову отримали суперечність з побудовою області D'.

Випадок 2: $\Theta(z_0)$ має тип I, а $\Theta(z)$ – тип III. Доводимо аналогічно до попереднього випадку.

Випадок 3: $\Theta(z_0)$ має тип II, а $\Theta(z)$ – тип III. Нехай межовими точками $\Theta(z_0)$ є точки z_1^0 та z_2^0, що належать дузі α_1, а межовими точками $\Theta(z)$ є точки z_1 та z_2 такі, що $z_1 \in \alpha_2$ та $z_2 \in \alpha_3$. Тоді, існує значення c, $f(z_0) < c < f(z)$ і компонента Θ' такі, що $f_{\Theta'} = c$ і $\partial\Theta' \in \partial\alpha_1$. Звідки випливає, що c – критичне чи напіврегулярне значення, а це суперечить побудові області D'.

Наслідок 1 *Для довільних точок $z_1, z_2 \in \mathrm{Int}D'$, $D' \in \Lambda$, множини $\Theta(z_1)$ та $\Theta(z_2)$ мають той самий тип.*

Лема 1 *Для довільних точок $z_1, z_2 \in \mathrm{Int}D'$, $D' \in \Lambda$, таких, що $z_1 \notin \Theta(z_2)$ і $z_2 \notin \Theta(z_1)$ справедливо $f|_{\Theta(z_1)} \neq f|_{\Theta(z_2)}$.*

Доведення Доведемо методом від супротивного, що $f|_{\Theta(z_1)} \neq f|_{\Theta(z_2)}$. Припустимо, що існують точки $z_1, z_2 \in \mathrm{Int}D'$, $D' \in \Lambda$, такі, що $z_1 \notin \Theta(z_2)$, $z_2 \notin \Theta(z_1)$ і $f|_{\Theta(z_1)} = f|_{\Theta(z_2)}$. Якими б не були $\Theta(z_2)$ і $\Theta(z_1)$, кожна з них розбиває область D' на дві зв'язні компоненти (у випадку типів II та III, кожна з компонент є розрізом області, а для випадку, коли компонента має тип I, справедлива теорема Жордана). Позначемо через A та B зв'язні компонети множини $D' \setminus \Theta(z_1)$. Згідно Леми 4 (див. [3, ст.103]) для довільної точки $z \in A$ справедливо $f(z) < f(z_1)$ або $f(z) > f(z_1)$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що $f(z) < f(z_1)$. Тоді, згідно Теореми 1.(vii) (див. [3, ст.106]), для $z \in B$ справедливо $f(z) > f(z_1)$. З іншого боку, в одній з областей A або B лежить компонента $\Theta(z_2)$, тобто $z_2 \in A$ або $z_2 \in B$, а згідно припущення $f(z_1) = f(z_2)$. Отримали суперечність.

Розглянемо задачу про структуру межі замкненої області D' із сім'ї Λ. Згідно побудови області D', кожна зв'язна компонента її межі складається з двох видів дуг: дуги, що є частинами межових кривих γ_i області D, та дуги, що є частинами ліній рівня критичних та напіврегулярних значень функції f. Перші позначимо через α_i, а другі через β_i. Оскільки, область D є орієнтованою, то і на D' існує орієнтація, яка породжує циклічний порядок дуг на кожній зв'язній компоненті межі області D'. В даних позначеннях кожну зв'язну компоненту межі довільної області D' можна представити як скінченну послідовність, на якій заданий циклічний порядок. Покажемо, що в такій послідовності дуги α_i і β_i чергуються, тобто

$$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \ldots, \beta_k). \tag{1}$$

Якщо припустити, що α_{i+1} (β_{i+1}) слідує за α_i (β_i), то існує спільна точка $z = \alpha_{i+1} \cap \alpha_i$ ($z = \beta_{i+1} \cap \beta_i$), де $z \in \partial\alpha_i$ і $z \in \partial\alpha_{i+1}$ ($z \in \partial\beta_i$ і $z \in \partial\beta_{i+1}$), яка одночасно належить двом різним межовим кривим (лініям рівня різних критичних значень), що не можливо, бо межові криві жорданові (лінії рівня різних критичних значень не є зв'язними) або одній межові кривій (одній лінії рівня) і дана точка не має ніякого змістовного навантаження, бо легко можна ввести нове позначення $\alpha_i = \alpha_i \cup \alpha_{i+1}$ ($\beta_i = \beta_i \cup \beta_{i+1}$).

Для кожного з трьох типів компонент $\Theta(z)$ у внутрішніх точках області D' запишемо вигляд межі в термінах послідовності $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \ldots)$.

Нехай всі компоненти $\Theta(z)$ внутрішніх точок області D' мають тип I. Тоді, межею області є скінченна кількість частин деяких зв'язних компонент ліній рівнів $D \cap f^{-1}(c_1)$, …, $D \cap f^{-1}(c_n)$, де c_i – критичні чи напіврегулярні значення функції f при $i = \overline{1, n}$. Тому, $f|_{\partial D'} = const$. Відомо [5, ст.55], що для псевдогармонічних функцій, які не мають полюсів та сталі на всіх межових кривих, має місце рівність $2 = \nu - S$, де ν – кількість межових кривих, а S – кількість критичних точок у внутрішності області, кожна з яких порахована з її кратністю. Оскільки, всі точки області D' регулярні, то $S = 0$. Звідки випливає, що $2 = \nu$, а отже і $n = 2$.

Таку замкнену область будемо називати областю R-типу (*типу кільце*) і її межа складається з двох зв'язних компонент, а саме $\partial D' = (\beta_1) \cup (\beta_2)$.

Скажемо, що дуги α_i та α_{i+1} є сусідніми, якщо у послідовності (1) між ними міститься лише одна дуга.

Лема 2 *Нехай α_i та α_{i+1} – сусідні дуги межі області D'. Тоді існують точки z_1, z_2 такі, що $z_1 \in \partial\alpha_i$, $z_2 \in \partial\alpha_{i+1}$ і $f(z_1) = f(z_2) = C$, де C – критичне або напіврегулярне значення функції f, та точки z', z'', де $z' \in U(z_1) \cap \alpha_i$, $z'' \in U(z_2) \cap \alpha_{i+1}$, які є межею деякої компоненти Θ такої, що $f|_\Theta > C$ ($f|_\Theta < C$).*

Доведення Оскільки α_i та α_{i+1} – сусідні дуги, то існує дуга β_i, яка є частиною зв'язної компоненти лінії рівня деякого критичного чи напіврегулярного значення C. Позначимо через $z_1 = \alpha_i \cap \beta_i$ і $z_2 = \alpha_{i+1} \cap \beta_i$. Оскільки, точки z_1 та z_2 належать β_i, то $f(z_1) = f(z_2) = C$.

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.4/2014.41445

Оскільки на ∂D довільна точка є регулярною точкою або локальним екстремумом неперервної функції $f|_{\partial D}$, то розглянемо наступні випадки:

Випадок 1: z_1 та z_2 – регулярні точки. Для довільного ε існують околи $U(z_1) \subset \partial D$ і $W(z_2) \subset \partial D$ точок z_1 та z_2, відповідно, та регулярні точки $z_1^1 \in U(z_1)$, $z_1^2 \in U(z_1)$, $z_2^1 \in W(z_2)$ і $z_2^2 \in W(z_2)$ такі, що $C < f(z_1^1) = C_1 < C + \varepsilon$, $C > f(z_1^2) = C_2 > C - \varepsilon$, $C < f(z_2^1) = C_1 < C + \varepsilon$ і $C > f(z_1^2) = C_2 > C - \varepsilon$. Оскільки z_j^i, $i, j = \overline{1,2}$, – регулярні точки функції $f|_{\partial D}$, то згідно означення 4 існують компоненти Θ_1, Θ_2, Θ'_1 та Θ'_2 такі, що $z_1^1 \in \partial\Theta_1$, $z_1^2 \in \partial\Theta_2$, $z_2^1 \in \partial\Theta'_1$ і $z_2^2 \in \partial\Theta'_2$. Зрозуміло, що Θ_1 та Θ_2 (Θ'_1 та Θ'_2) належать різним зв'язним компонетам множини $D \setminus \beta_i$, оскільки β_i – розріз області D між точками z_1 та z_2, які належать межі. Звідки, $\Theta_1 \subset D'$ ($\Theta'_1 \subset D'$) або $\Theta_2 \subset D'$ ($\Theta'_2 \subset D'$). Не обмежуючи загальності припустимо, що $\Theta_1 \subset D'$. Якщо $\Theta'_1 \subset D'$, то з Леми 1 випливає, що $\Theta_1 = \Theta'_1$. Далі, позначимо точки z_1^1 та z_2^1 через z' та z'', відповідно, а Θ_1 через Θ, та отримаємо $f|_\Theta > C$. Якщо ж $\Theta'_2 \subset D'$, то в області D' існують точки значення функції в яких як менші так і більші ніж C, а це суперечить Лемі 4 (див. [3, ст.103]).

Випадок 2: z_1 – регулярна точка, а z_2 – локальний екстремум. Не обмежуючи загальності, припустимо, що z_2 – локальний максимум. Тоді, для довільного ε існують околи $U(z_1) \subset \partial D$ і $W(z_2) \subset \partial D$ точок z_1 та z_2, відповідно, та регулярні точки $z_1^1 \in U(z_1)$, $z_1^2 \in U(z_1)$, $z_2^1 \in W(z_2)$ і $z_2^2 \in W(z_2)$ такі, що $C < f(z_1^1) = C_1 < C + \varepsilon$, $C > f(z_1^2) = C_2 > C - \varepsilon$, $C > f(z_2^1) = C_2 > C - \varepsilon$ і $C > f(z_1^2) = C_2 > C - \varepsilon$. Тоді, існують Θ_1, Θ_2, Θ'_1 та Θ'_2 такі, що $z_1^1 \in \partial\Theta_1$, $z_1^2 \in \partial\Theta_2$, $z_2^1 \in \partial\Theta'_1$ і $z_2^2 \in \partial\Theta'_2$. Зрозуміло, що Θ_1 та Θ_2 (Θ'_1 та Θ'_2) належать різним зв'язним компонетам множини $D \setminus \beta_i$, оскільки β_i – розріз області D між точками z_1 та z_2, які належать межі. Звідки, $\Theta_1 \subset D'$ ($\Theta'_1 \subset D'$) або $\Theta_2 \subset D'$ ($\Theta'_2 \subset D'$). Якщо припустити, що $\Theta_1 \subset D'$, то $\Theta'_1 D'$ і $\Theta'_2 D'$, бо в протилежному випадку отримаємо суперечність з Лемою 4 (див. [3, ст.103]). Звідси випливає, що $\Theta_2 \subset D'$. Отже, $\Theta_2 = \Theta'_1$ або $\Theta_2 = \Theta'_2$.

Випадок 3: z_1 та z_2 – локальні екстремуми. Якщо z_1 та z_2 – локальні максимуми (мінімуми), то для довільного ε існують околи $U(z_1) \subset \partial D$ і $W(z_2) \subset \partial D$ точок z_1 та z_2, відповідно, та регулярні точки $z_1^1 \in U(z_1)$, $z_1^2 \in U(z_1)$, $z_2^1 \in W(z_2)$ і $z_2^2 \in W(z_2)$ такі, що $C > f(z_1^1) = C_2 > C - \varepsilon$ ($C < f(z_1^1) = C_1 < C + \varepsilon$), $C > f(z_1^2) = C_2 > C - \varepsilon$ ($C < f(z_1^2) = C_1 < C + \varepsilon$), $C > f(z_2^1) = C_2 > C - \varepsilon$ ($C < f(z_2^1) = C_1 < C + \varepsilon$)і $C > f(z_1^2) = C_2 > C - \varepsilon$ ($C < f(z_1^2) = C_1 < C + \varepsilon$). Тоді, по аналогії, існують Θ_1, Θ_2, Θ'_1 та Θ'_2 такі, що $z_1^1 \in \partial\Theta_1$, $z_1^2 \in \partial\Theta_2$, $z_2^1 \in \partial\Theta'_1$ і $z_2^2 \in \partial\Theta'_2$. Якщо $\Theta_i \subset D'$ і $\Theta'_j \subset D'$, де

$i, j = \overline{1,2}$, то згідно Леми 1 $\Theta_i = \Theta'_j$. Звідки випливає існування Θ такої, що $f|_\Theta < C$ $(f|_\Theta > C)$.

Зауважимо, що випадок, коли z_1 – локальний мінімум,а z_2 – локальний максимум не можливий, оскільки це суперечить Лемі 4 (див. [3, ст.103]).

Наслідок 2 *Якщо α_{i-1}, α_i та α_{i+1} – сусідні дуги межі області D', а C_{i-1} та C_i – критичні чи напіврегулярні значення функції f в точках межі дуги α_i такі, що $C_{i-1} < C_i$ $(C_{i-1} > C_i)$, то $C_{i-1} < C_{i-2}$ $(C_{i-1} > C_{i-2})$ і $C_i > C_{i+1}$ $(C_i < C_{i+1})$, де C_{i-2} та C_{i-1} – критичні чи напіврегулярні значення функції f в точках межі дуги α_{i-1}, а C_i та C_{i+1} – дуги α_{i+1}.*

Нехай всі компоненти $\Theta(z)$ внутрішніх точок області D' мають тип II. Доведемо, що межа такої області містить дугу лише однієї з межових кривих, що обмежують D. Припустимо, що таких дуг скінченна кількість $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Розглянемо сусідні дуги α_i та α_{i+1}. Згідно Леми 2 існує компонента Θ' така, що $\partial\Theta' \in \alpha_i$ та $\partial\Theta' \in \alpha_{i+1}$. Звідки випливає, що Θ' має тип III, а це суперечить Наслідку 1 Теореми 1. Оскільки не існує жодної пари сусідніх дуг, то така дуга єдина. Тому, $\partial D' = (\alpha_1, \beta_1)$ і таку замкнену область $D' \in \Lambda$ будемо називати областю Se-типу (*типу сектор*).

Нехай всі компоненти $\Theta(z)$ внутрішніх точок області D' мають тип III. Доведемо, що межа такої області містить не більше двох дуг, що належать одній або двом різним межовим кривим.

Припустимо, що таких дуг скінченна кількість $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, та розглянемо три дуги α_{i-1}, α_i та α_{i+1}. Припустимо, в межових точках дуги α_i значення c_{i-1} та c_i функції f такі, що $c_{i-1} < c_i$. Згідно Наслідку 1 Леми 2 для решти критичних значень виконуються наступні нерівності: $c_{i-1} < c_{i-2}$ і $c_i > c_{i+1}$. Нехай Θ_s, $s = \overline{1,k}$, компоненти такі, що $\partial\Theta_s \in \alpha_{i-1}$, $\partial\Theta_s \in \alpha_i$, $s = \overline{1,k}$, і для довільного $z \in \Theta_k$ виконується $f(z) = A$. Зрозуміло, що $A \in [c_{i-1}; c_{i-2}]$ і $A \in [c_{i-1}; c_i]$. Тоді, при довільних значеннях X таких, що $A < X < c_i$ існує компонента Θ' така, що $\partial\Theta' \in \alpha_i$, $\partial\Theta' \notin \alpha_{i-1}$ і для всіх $z \in \Theta'$ справедливо $f(z) = X$. Зрозуміло, що A не дорівнює жодному з критичних значень на кінцях дуг. Отже $A < c_{i-2}$. Розглянемо значення $B = \frac{A+\min\{c_i, c_{i-2}\}}{2}$. Оскільки, $A < B < c_{i-2}$, то знайдеться компонета Θ така, що для точки $z \in \Theta$ справедливо $f(z) = B$, $\partial\Theta \in \alpha_{i-1}$ та $\partial\Theta \in \alpha_l$, де $l \neq i$. З іншого боку, оскільки $A < B < c_i$ існує компонента Θ'' така, що $\partial\Theta'' \in \alpha_i$, $\partial\Theta'' \notin \alpha_m$, де $m \neq i-1$, і для всіх $z \in \Theta'$ справедливо $f(z) = B$. Звідси випливає, що в області D' існує дві різні компоненти, значення функції в точках яких співпадають, а це суперечність Наслідку 2 Теореми 1.

Зі сказаного вище слідує, що $\partial D' = (\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2)$. Таку замкнену область $D' \in \Lambda$ будемо називати областю St-типу (*типу смужка*).

Ми показали справедливість наступної теореми.

Теорема 2 *Якщо $D' \in \Lambda$, то D' є областю або Se-, або St-, або R-типу.*

4 Висновки

В даній роботі досліджено властивості псевдогармонічної функції f, що задана на k-зв'язній орієнтованій замкненій області D. Доведено, що замикання кожної зв'язної компоненти із сім'ї $\overline{D \setminus \mathfrak{L}(f)}$, де $\mathfrak{L}(f)$ – множина тих зв'язних компонент ліній рівня критичних та напіврегулярних значень функції f, що містять критичні або межові критичні точки, є областю або типу сегмент, або типу смужка, або типу кільце. Перший тип характеризується тим, що межа області складається з двох зв'язних компонент, які немають спільних точок з межовими кривими γ_i, $i = \overline{0, k}$, а всі лінії рівня у її внутрішності гомеоморфні колам. Другий та третій типи областей мають одну зв'язну компоненту межі, а всі лінії рівня у їх внутрішності гомеоморфні відрізкам. Різниця між ними полягає у кількості дуг, що належать межовим кривим γ_i, $i = \overline{0, k}$. У випадку області типу смужка, її межа містить дві дуги, що належать або одній і тій же межовій кривій, або різним. Якщо ж область типу сектор, то така дуга одна.

Література

1. W. Kaplan, Topology of level curves of harmonic functions // Transactions of Amer.Math.Society., **63** (1948), 514-522.
2. E. Polulyakh, I. Yurchuk, On the pseudo-harmonic functions defined on a disk. Pracy Inst.Math.Ukr.,Volume 80. - Kyiv: Inst.Math.Ukr., 2009. - 151 pp.
3. Y. Tôki, A topological characterization of pseudo-harmonic functions //Osaka Math. Journ, **3** (1951), No.1, 101-122.
4. В.М. Кузаконь, В.Ф. Кириченко, О.О. Пришляк, Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти. Праці Інст.Мат.НАНУ. Математика та її застосування., Т.97. - К.:Інст.матем.НАНУ, 2013. - 500 с.
5. М. Морс, Топологические методы теории фукций комплексного переменного/ под. ред. Маркушевич А.И. - М, 1951.
6. Є.Полулях, Дерева як множини рівня псевдогармонічних функцій на площині // УМЖ, **65**, № 7, (2013), 974-995.

І.А. Юрчук

Національний авіаційний унівеситет, Київ, Україна.

E-mail: iyurch@ukr.net

Iryna Iurchuk

Properties of a pseudo-harmonic function on closed domain

Let $f : D \to \mathbb{R}$ be a pseudo-harmonic function defined on $k-$connected oriented closed domain $D \subset \mathbb{C}$ whose boundary consists of closed Jordan curves $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$, $0 \le k < \infty$. We remind that this class of functions coincides with continuous functions which have a finitely many critical points at the interior of D each of them is saddle point and finitely many local extrema on its boundary.

In this work, it is proved that closure of any component of family which is a diference between D and such connected components of level curves of critical or semiregular values of f which contain critical and boundary critical points is a closed domain having one of three types (a ring, a strip or a sector). For the first, its boundary consists of two connected components that have no common points with ∂D and level curve at any inner point is homeomorphic to circle. As well as the second and third, their boundaries have one connected component and their level curves at any inner point are homeomorphic to a closed segment. There is diference between a number of arcs of boundary curves. If a domain is a strip, then its boundary contains two arcs that belong either one or two different boundary curves γ_i. If a domain is a sector, then its boundary contains one arc of some boundary curves. By author some statements used for main theorem proof are proved.

Keywords. Pseudo-harmonic function, $k-$connected domain.