

Геометрические величины на плоскости Лобачевского

Надежда Григорьевна Коновенко
<http://orcid.org/0000-0002-8631-0688>

Аннотация В этой работе описываются локальные структуры геометрических величин на плоскости Лобачевского. Это описание содержит как линейные, например тензоры, так и нелинейные геометрические величины и существенным образом используется при нахождении базисных дифференциальных инвариантов ([1]).

Ключевые слова плоскость Лобачевского, геометрические величины, дифференциальные инварианты, изометрии.

УДК 514.132

1 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -действие на плоскости Лобачевского

В стандартной модели геометрия Лобачевского реализуется на верхней полуплоскости \mathbf{L}^2 с метрикой

$$\Theta = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Группа движений плоскости Лобачевского изоморфна группе Ли $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{R})$, а ее алгебра Ли порождена векторными полями

$$\begin{aligned} A &= \partial_x, \\ B &= (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, \\ H &= 2x\partial_x + 2y\partial_y, \end{aligned} \tag{1}$$

удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[H, A] = -2A, \quad [H, B] = 2B, \quad [A, B] = H.$$

Под однородным расслоением над плоскостью Лобачевского мы понимаем такое расслоение

$$\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbf{L}^2 \rightarrow \mathbf{L}^2,$$

где $\pi : (u, x, y) \mapsto (x, y)$, в которое поднято $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -действие.

Иначе говоря, в тотальном пространстве расслоения π , указаны векторные поля \bar{A} , \bar{B} , \bar{H} , удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$

$$[\bar{H}, \bar{A}] = -2\bar{A}, \quad [\bar{H}, \bar{B}] = 2\bar{B}, \quad [\bar{A}, \bar{B}] = \bar{H},$$

и такие что

$$\pi_*(\bar{A}) = A, \quad \pi_*(\bar{B}) = B, \quad \pi_*(\bar{H}) = H.$$

Геометрической величиной на плоскости Лобачевского называется гладкое сечение однородного $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -расслоения. Размерность геометрической величины называется размерность соответствующего однородного расслоения.

2 Локальная классификация геометрических величин

Предположим, что векторные поля в рассматриваемой области порождают гладкое распределение \mathfrak{F} размерности r .

В данном случае векторные поля A и B линейно независимы, поэтому векторные поля \bar{A} , \bar{B} - также линейно независимы.

Следовательно $r = \dim \mathfrak{F}$ может принимать только два значения $r = 2$ или $r = 3$. В любом из этих случаев, мы можем выбрать координаты $(u, w^2, \dots, w^m, x, y)$ в расслоении π так, чтобы w^2, \dots, w^m - были первыми интегралами для векторных полей \bar{A} , \bar{B} , \bar{H} , а функция u дополнительно являлась первым интегралом векторных полей \bar{A} и \bar{H} . Действительно, это очевидно в случае, когда $r = 2$, поскольку тогда u может быть выбрана как первый интеграл векторных полей \bar{A} , \bar{B} , \bar{H} .

Если же $r = 3$, то на 3-х мерных многообразиях $w^2 = \dots = w^m = \text{const}$ векторные поля \bar{A} и \bar{H} определяют 2-мерное распределение, которое вполне интегрируемо, в силу коммутационного соотношения $[\bar{H}, \bar{A}] = -2\bar{A}$. Функция u может быть выбрана как первый интеграл этого распределения. При таком выборе координат представление примет вид:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \partial_x, \\ \bar{B} &= (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y + yb(x, y, u, w)\partial_u, \\ \bar{H} &= 2x\partial_x + 2y\partial_y.\end{aligned}\tag{2}$$

Из коммутационных соотношений следует, что функция b имеет следующий вид:

$$b(x, y, u, w) = y\tilde{b}(u, w).$$

Отметим также, что если $r = 2$, или, иначе говоря, если размерности $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -орбит в расслоении π равны 2, то $\tilde{b}(u, w) \equiv 0$. Если же размерности $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -орбит в расслоении π равны 3, то $\tilde{b}(u, w) \neq 0$ и заменой переменных вида:

$$(u, w) \mapsto (U(u), W(u, w))$$

векторное поле $\tilde{b}\partial_u$ может быть выпрямлено.

Суммируя сказанное приходим к следующему результату.

Теорема 1 Действие алгебры Ли изометрий плоскости Лобачевского в однородном $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -расслоении локально эквивалентно одному из следующих:

1)

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \partial_x, \\ \bar{B} &= (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, \\ \bar{H} &= 2x\partial_x + 2y\partial_y,\end{aligned}\tag{3}$$

если размерность $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -орбит в расслоении π равны 2, или

2)

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \partial_x, \\ \bar{B} &= (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y + y\partial_u, \\ \bar{H} &= 2x\partial_x + 2y\partial_y,\end{aligned}\tag{4}$$

если размерность $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -орбит в расслоении π равны 3.

3 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -действия на геометрических величинах

Рассмотрим векторное поле $\nabla = a(x, y)\partial_x + b(x, y)\partial_y$ на плоскости Лобачевского и пусть

$$\bar{\nabla} = a(x, y)\partial_x + b(x, y)\partial_y + \sum_{i=1}^m A_i(x, y, u)\partial_{u_i}$$

его поднятие в расслоение геометрических величин. Обозначим через φ_t однопараметрическую группу сдвигов вдоль векторного поля ∇ , а через $\bar{\varphi}_t$ группу сдвигов вдоль $\bar{\nabla}$. Тогда каждая геометрическая величина

$$s : \mathbb{R}^m \times \mathbf{L}_2 \rightarrow \mathbf{L}_2$$

определяет путь s_t в пространстве геометрических величин

$$s_t = \bar{\varphi}_{-t} \circ s \circ \varphi_t.$$

Скорость изменения

$$\nabla(s) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{s}(0)$$

мы называем действием ∇ на геометрическую величину s . Несложно проверить ([3]), что

$$\nabla(s) = as_x + bs_y - A(x, y, s).$$

Используя предыдущую теорему и эту формулу мы получаем следующие нормальные формы $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -действий на геометрических величинах.

Теорема 2 Действие алгебры Ли изометрий плоскости Лобачевского на геометрических величинах локально эквивалентно следующему:

1)

$$\begin{aligned} A(s) &= s_x, \\ B(s) &= (x^2 - y^2)s_x + 2xys_y, \\ H(s) &= 2xs_x + 2ys_y, \end{aligned} \tag{5}$$

если размерность $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -орбит в расслоении π равны 2.

2)

$$\begin{aligned} A(s) &= s_x, \\ B(s) &= (x^2 - y^2)s_x + 2xys_y - y, \\ H(s) &= 2xs_x + 2ys_y, \end{aligned} \tag{6}$$

если размерность $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -орбит в расслоении π равны 3.

4 Примеры

В качестве примеров геометрических величин мы рассмотрим тензоры на плоскости Лобачевского с \mathfrak{sl}_2 -действием, определяемым производной Ли.

4.1 Функции

Пусть $s = s(x, y)$ является гладкой функцией на плоскости Лобачевского, и

$$\nabla(s) \stackrel{\text{def}}{=} L_{\nabla}(s) = as_x + bs_y.$$

В этом случае поднятие $\bar{\nabla}$ имеет вид:

$$\bar{\nabla} = a\partial_x + b\partial_y,$$

где $A = 0$.

Это действие совпадает с (5).

4.2 Векторные поля

Пусть $s = s_1\partial_x + s_2\partial_y$ является векторным полем на плоскости Лобачевского, и

$$\begin{aligned} \nabla(s) \stackrel{\text{def}}{=} L_{\nabla}(s) &= (as_{1,x} - s_1a_x + bs_{1,y} - a_ys_2)\partial_x + \\ &+ (as_{2,x} - s_1b_x + bs_{2,y} - b_ys_2)\partial_y. \end{aligned}$$

Если записывать векторное поле s в виде столбца

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

то указанное действие примет следующий вид:

$$\nabla(s) = \begin{pmatrix} as_{1,x} + bs_{1,y} \\ as_{2,x} + bs_{2,y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Соответственно поднятие векторного поля $\bar{\nabla}$ имеет вид:

$$\bar{\nabla} = a\partial_x + b\partial_y + (a_xu_1 + a_yu_2)\partial_{u_1} + (b_xu_1 + b_yu_2)\partial_{u_2}.$$

Очевидно, что длина вектора $|s|^2 = y^{-2}(s_1^2 + s_2^2)$ является инвариантом \mathfrak{sl}_2 -действий, а поэтому размерность \mathfrak{sl}_2 -орбит в касательном расслоении равна 3.

Таким образом, \mathfrak{sl}_2 -действие, задаваемое производной Ли (8) локально эквивалентно (6).

4.3 Дифференциальные 1-формы

Пусть теперь $s = s_1 dx + s_2 dy$ является дифференциальной 1-формой на плоскости Лобачевского, а действие, как и выше, дается производной Ли ([2]):

$$\begin{aligned} \nabla(s) \stackrel{\text{def}}{=} L_{\nabla}(s) &= (as_{1,x} + bs_{1,y} + a_x s_1 + \\ &+ b_x s_2)dx + (as_{2,x} + bs_{2,y} + a_y s_1 + b_y s_2)dy. \end{aligned}$$

Записав дифференциальную 1-форму s в виде столбца (7) мы получаем следующую форму действия:

$$\nabla(s) = \begin{pmatrix} as_{1,x} + bs_{1,y} \\ as_{2,x} + bs_{2,y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, поднятие векторного поля $\bar{\nabla}$ имеет вид:

$$\bar{\nabla} = a\partial_x + b\partial_y - (a_x u_1 + b_x u_2)\partial_{u_1} - (a_y u_1 + b_y u_2)\partial_{u_2}.$$

Соответствующее \mathfrak{sl}_2 -действие также сохраняет длину дифференциальной формы $|s|^2 = y^2(s_1^2 + s_2^2)$. Поэтому размерность \mathfrak{sl}_2 -орбит в кокасательном расслоении равна 3, а фундаментальное \mathfrak{sl}_2 -действие локально эквивалентно (6).

Список литературы

1. Н. Г. Коновенко. Дифференциальные инварианты и \mathfrak{sl}_2 -геометрии // Київ: "Наукова Думка" НАН України, (2013), 192 с.
2. В. Kruglikov, V. Lychagin. Global Lie-Tresse theorem // (2013), 48p., <http://arxiv.org/pdf/1111.5480.pdf>
3. Коновенко Н.Г., Лычагин В.В. Алгебры дифференциальных инвариантов в геометриях Лобачевского и де Ситтера. // Доклады академии наук Украины. – 2010. – № 1. – С. 13–16.

Надежда Григорьевна Коновенко

<http://orcid.org/0000-0002-8631-0688>

ОНАПТ, Одесса, Украина

E-mail: konovenko@ukr.net

Nadiia G. Konovenko

The geometrical sizes on Lobachevski plane

In this paper we investigate a local structure of geometrical quantities on the Lobachevski plane. This structure is used to describe metric differential invariants on the Lobachevski plane ([1]).