Леонид Евгеньевич Евтушик – геометр

Памяти товарища и друга

М. О. Рахула

1. Дифференциальные продолжения

Всё началось, когда молодой Сергей Фиников вернулся из Парижа в Москву (1916). В Сорбонне он слушал лекции Эли Картана и настолько увлёкся услышанным, что многие труды Картана впоследствии были им переведены и переизданы на русский язык. Идеи Картана разошлись по университетам страны. По методу Картана проводились многочисленные исследования и писались монографии.

Из московской дифференциально-геометрической школы Сергея Павловича Финикова выросла плеяда замечательных геометров: Г.Ф. Лаптев, А.М. Васильев, Н.М. Остиану, М.В. Ауссен, Л.Е. Евтушик, К. Гринчевичус, М.А. Акивис, В.И. Близникас, Ю.Г. Лумисте, Н.Г. Туганов, В.С. Малаховский и др. Их последователи применяют теорию Картана-Финикова во многих областях математики, механики и физики.

* * *

Дифференциальная геометрия началась во времена Ньютона и Лейбница, когда в геометрии стали применять производные. Со временем она стала самостоятельным научным направлением и в настоящее время сущность дифференциальной геометрии можно выразить кратко следующими словами: дифференциальные продолжения различных структур на гладких многообразиях.

К теме дифференциальных продолжений подходят разными путями.

Во-первых, в основу теории кладутся струи гладких отображений. Идеи исчисления струй восходят к Ш. Эресману и разрабатываются главным образом чешской геометрической школой, см. [5, 6, 9, 12, 16].

Во-вторых, на дифференциалах координатных функций В. В. Вагнером были введены расслоения, размерность которых при каждом продолжении возрастает на размерность исходного многообразия[1]. Расслоения Вагнера широко применяются в румынской геометрической школе, в частности, при изучении вопросов, связанных с финслеровой геометрией и лагражевой механикой, см. [2, 11, 19].

В-третьих, по линии Картана-Финикова выработана т. н. теория продолжений и охватов, которую по-праву связывают с именем Г. Ф. Лаптева. Эта теория развивается и обобщается в трудах Л. Е. Евтушика, см. [20].

* * *

[1] В книге [2] эти расслоения называются соприкасающимися расслоениями. Мы, отдавая дань первоотрывателю, будем их называть расслоениями Вагнера.

Обозреваемые проблемы геометрии охватваются таким понятием, как касательный функтор T, который многообразиям M сопоставляет их касательные расслоения TM – *этажи*, и гдадким отображениям f их касательные отображения Tf – *дифференциалы*, [3, 7, 13]. При переходе с очередного этажа на следующий этаж размерность каждый раз удваивается. Дифференциальные продолжения обеспечиваются итерациями функтора T. Исчисление струй сочетается с теорией сектор-форм Уайта на этажах, так как струи входят в качестве коэффициентов в сектор-формы, [18]. Классические структуры, которые строятся на расслоениях Вагнера, индуцируются, по правде говоря, геометрией этажей, так как расслоения Вагнера – подрасслоения этажей, [1]. Так, например, механика Гамильтона, которая строится на втором этаже, в расслоении Вагнера сводится к механике Лагранжа, см. [8, 15]. В пользу этажей следует добавить, что k-ый этаж T^kM является k-кратным векторным расслоением и такая структура лежит в основе теории высших движений, которой принадлежит, по-видимому, будущее в развитии кинематики. Если вектор к траектории трактовать как "стоп-кадр"движущейся точки, а векторное поле – как "стоп-кадр" потока, где точки перемещаются по траекториям, то элемент этажа трактуется как "стоп-кадр"движения высшего порядка. Представим, что на один поток оказывает воздействие второй поток, на этот процесс оказывает влияние третий поток, и т.д. Это приводит нас не к повторному дифференцированию, как обычно и ошибочно понимают дифференциальные продолжения, а к преобразованию дифференцирований и дифференцированию дифференцирований. Если обычно имеем дело, скажем, с производными $f, f', f'', ...$ относительно некоторого векторного поля X, то здесь имеются в виду операторы $X, \mathcal{L}_X, \mathcal{L}_{\mathcal{L}_X}, ...$, как векторные поля на этажах. В этом заключается иной и более глубокий смысл дифференциальных продолжений.

2. Связность в расслоении

Ключевым моментом в дифференциальной геометрии является понятие связности. Согласно Эресману [4], связность в расслоении $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} M$ понимается как структура $\triangle_h \oplus \triangle_v$ на многообразии $\mathcal{M}$, где $\triangle_v = \ker T\pi$ – касательное к слоям вертикальное распределение и $\triangle_h$ – горизонтальное распределение, дополнительное к вертикальному.

На локальной окрестности $U \subset \mathcal{M}$ координаты (u^i, u^α) согласованы со слоями, где u^i – базисные, а u^α – слоевые. Адаптируется базис структуры $\triangle_h \oplus \triangle_v$:

$$(X_i\ X_\alpha) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u^j} & \dfrac{\partial}{\partial u^\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_i^j & 0 \\ \Gamma_i^\beta & \delta_\alpha^\beta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \omega^i \\ \omega^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -\Gamma_j^\alpha & \delta_\beta^\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du^j \\ du^\beta \end{pmatrix}.$$

Операторы X_i образуют векторный базис распределения $\triangle_h$, а формы ω^α аннулируются распределением $\triangle_h$:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial u^i} + \Gamma_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \qquad \omega^\alpha = du^\alpha - \Gamma_i^\alpha du^i.$$

Кривизна связности определяется скобками $[X_i X_j]$, и также внешними дифференциалами $\mathrm{d}\omega^\alpha$.

Система Пфаффа устанавливает связь с дифференциальными уравнениями:

$$\omega^\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^i} = \Gamma^\alpha_i.$$

Величины Γ^α_i, вообще говоря, зависят от всех координат, базисных и слоевых. В случае векторного расслоения и линейной связности они линейны на слоях: $\Gamma^\alpha_i = \Gamma^\alpha_{i\beta} u^\beta$. Классическая аффинная связность понимается как линейная связность в касательном расслоении $TM \xrightarrow{\pi} M$. Тогда величины Γ^α_i обращаются в систему форм $\Gamma^i_{jk} du^k$.

* * *

Фундаментальные объекты отображения по Г. Ф. Лаптеву [10] появляются в общем контексте. Рассмотрим морфизм расслоений со связностями:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{M}_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

Стрелками π_1 и π_2 в диаграмме обозначены два расслоения. Пара отображений (φ, f) определяет морфизм этих расслоений. Предполагается, что на многообразиях $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ заданы структуры $\triangle_h \oplus \triangle_v$ и $\tilde{\triangle}_h \oplus \tilde{\triangle}_v$.

На окрестностях U и $\varphi(U)$, где заданы координаты (u^i, u^α) и $(u^{i'}, u^{\alpha'})$, определяются адаптированные базисы – с коэффициентами Γ^α_i и $\Lambda^{\alpha'}_{i'}$ соответственно, или же: $\Gamma^\alpha_i = \Gamma^\alpha_{i\beta} u^\beta$, $\Lambda^{\alpha'}_{i'} = \Lambda^{\alpha'}_{i'\beta'} u^{\beta'}$ в случае линейных связностей.

Касательное отображение $T\varphi$ определяется одной и той же вектор-формой $\mathcal{F}$ в натуральных и адаптированных базисах:

$$\mathcal{F} = \Big(\frac{\partial}{\partial u^{i'}} \ \frac{\partial}{\partial u^{\alpha'}} \Big) \cdot \begin{pmatrix} f^{i'}_j & 0 \\ \varphi^{\alpha'}_j & \varphi^{\alpha'}_\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du^j \\ du^\beta \end{pmatrix}$$

$$= \big(X_{i'} \ X_{\alpha'} \big) \cdot \begin{pmatrix} f^{i'}_j & 0 \\ \Phi^{\alpha'}_j & \varphi^{\alpha'}_\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du^j \\ du^\beta \end{pmatrix}.$$

В натуральных базисах отображение $T\varphi$ определяется блок-матрицей Якоби, где блоки $f^{i'}_j, \varphi^{\alpha'}_j, \varphi^{\alpha'}_\beta$ образованы частными производными функций $f^{i'}, \varphi^{\alpha'}$. В адаптированных базисах блок $\varphi^{\alpha'}_j$ заменяется блоком

$$\Phi^{\alpha'}_j = \varphi^{\alpha'}_j + \varphi^{\alpha'}_\gamma \Gamma^\gamma_j - \Lambda^{\alpha'}_{k'} f^{k'}_j.$$

В частности, когда связности – линейные, эти величины линейны на слоях, именно $\Phi^{\alpha'}_j = \Phi^{\alpha'}_{j\beta} u^\beta$, и появляется объект:

$$\Phi^{\alpha'}_{j\beta} = \varphi^{\alpha'}_{j\beta} + \varphi^{\alpha'}_\gamma \Gamma^\gamma_{j\beta} - \Lambda^{\alpha'}_{k'\gamma'} f^{k'}_j \varphi^{\gamma'}_\beta.$$

В случае, когда $\varphi = Tf$, $\mathcal{M}_i = TM_i$, $i = 1, 2$, этот объект, после некоторых изменений в обозначениях, приводится к виду:

$$\boxed{F^\alpha_{ij} = f^\alpha_{ij} - f^\alpha_k \Gamma^k_{ij} + (\Lambda^\alpha_{\beta\gamma} \circ f) f^\beta_i f^\gamma_j}.$$

Имеем универсальный тензорный объект F^{α}_{ij}, характеризующий вторую дифференциальную окрестность отображения f. Правда, при этом возникает вопрос: откуда взять связности, чтобы построить такой объект? В ряде случаев эти связности фиксируются специально. По этому поводу выскажем некоторые соображения.

– В равенстве $F^{\alpha}_{ij} = 0$ распознаём при $\dim M_1 = 1$ уравнение геодезической линии на многообразии M_2. Входим *в теорию геодезических.*

– Объект F^{α}_{ij} определяет при отображении $T^2 f$ отклонение образа распределения $\triangle_h$ от горизонтального положения в структуре $\tilde{\triangle}_h \oplus \tilde{\triangle}_v$. При $F^{\alpha}_{ij} = 0$ распределение $\triangle_h$ укладывается в распределение $\tilde{\triangle}_h$ и геодезические с многообразия M_1 отображаются в геодезические на многообразие M_2. Сказанное относится к *теории геодезических отображений.*

– При диффеоморфизме $M \xrightarrow{a} M$ происходит преобразование пространства M со связностью Γ^k_{ij}. Объект F^{α}_{ij} записывается в виде:

$$\boxed{A^k_{ij} = a^k_{ij} - a^k_l \Gamma^l_{ij} + (\Gamma^k_{pq} \circ a)\, a^p_i a^q_j}\,.$$

При равенстве $A^k_{ij} = 0$ преобразование a является симметрией распределения $\triangle_h$, что в классической теории называется *движением в пространстве со связностью.*

– Пусть векторное поле X имеет в пространстве M поток $a_t = \exp tX$. В потоке a_t увлекается горизонтальное распределение:

$$\triangle_h \rightsquigarrow Ta_t \triangle_h \rightsquigarrow \mathcal{L}_X \triangle_h.$$

Заменим в объекте A^k_{ij} диффеоморфизм a на a_t и осуществим дифференцирование по параметру t при $t = 0$. Получаем выражение о пяти слагаемых, определяющее *производную Ли связности* $\mathcal{L}_X \Gamma^k_{ij}$, лучше обозначать $\mathcal{L}_X \triangle_h$. Когда $\mathcal{L}_X \triangle_h = 0$, векторное поле X является инфинитезимальной симметрией распределения $\triangle_h$. В метрической теории такое векторное поле известно как *поле Киллинга.*

В отдельных случаях происходит фиксация связностей.

– Если $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ – иммерсия некоторого многообразия M_1 в евклидово пространство M_2, то образ этой иммерсии является поверхностью и на этой поверхности возникает *риманова геометрия.* Вводим в объект F^{α}_{ij} нулевую связность $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$, что в евклидовом пространстве имеет инвариантный смысл, определяем метрику $g_{ij} = f^{\alpha}_i f^{\alpha}_j$, выводим из условия $f^{\alpha}_k F^{\alpha}_{ij} = 0$ символы Кристоффеля Γ^i_{jk}, в нормальной плоскости осуществляем разложение $F^{\alpha}_{ij} = n^{\alpha}_{\lambda} h^{\lambda}_{ij}$, имеем пучок квадратичных форм h^{λ}_{ij}, что в случае гиперповерхности даёт вторую квадратичную форму, и получаем основную формулу теории поверхностей – *формулу Гаусса* $f^{\alpha}_{ij} = f^{\alpha}_k \Gamma^k_{ij} + n^{\alpha}_{\lambda} h^{\lambda}_{ij}$.

– Если $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ – субмерсия евклидова пространства M_1 на многообразие M_2, то в семействе слоёв в M_1 возникает двойственная ситуация, называемая *ко-римановой геометрией* [2], см. [1, 14]. Полагаем $\Lambda^k_{ij} = 0$, вводим ко-метрику $g^{\alpha\beta} = f^{\alpha}_i f^{\beta}_i$, определяем символы ко-Кристоффеля $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и получаем тензорный объект F^{α}_{ij}. Теория включает такие понятия, как лапласиан, гессиан и др.

[2]Шутка М. Спивака: когда он выводил уравнения, двойственные известным уравнениям Гаусса-Кодацци, он их называл уравнениями Дацци-ко-Гаусса.

3. Тест Картана

Тест Картана заключается в том, что в результате внешнего дифференцирования уравнений и применения леммы Картана получают для изучения свойств отображения нужный объект. Так получают объект F^{α}_{ij} с фиксмрованными связностями Γ^k_{ij} и $\Lambda^{\gamma}_{\alpha\beta}$. Разберём это более подробно.

Дело в том, что связности на этаже TM могут быть определены заданием на многообразии M неголономного базиса Схоутена [17] – поля реперов и дуальных корепероов (R,Θ). В самом деле, векторное поле X можно поднять с многообразия M на этаж TM по принципу $X \rightsquigarrow X^{(1)}$ (продолжается поток $a_t \rightsquigarrow Ta_t$), а 1-форма определяет на TM дифференциал $\Phi \rightsquigarrow d\Phi$ (различаем дифференциал скалярной функции $d\Phi$ и внешний дифференциал 1-формы $\mathrm{d}\Phi$). Это относится и к базису (R,Θ). Поднятый на этаж TM репер $R^{(1)}$ определяет на TM одно горизонтальное распределение $\triangle_h$, а дифференциал корепера $d\Theta$ определяет второе горизонтальное распределение $\bar{\triangle}_h$. Две связности образуют пучок связностей:

$$\frac{\lambda\Gamma^k_{ij} + \mu\bar{\Gamma}^k_{ij}}{\lambda + \mu},$$

в котором выделяется бесчисленное множество связностей. При $\lambda = \mu = 1$ в пучке выделяется интересующая нас связность.

* * *

С координатами (u^i, u^i_1) на окрестности $TU \subset TM$ ассоциируется натуральный басис[3]:

$$\partial_i \doteq \frac{\partial}{\partial u^i},\ \ \partial^{(1)}_i \doteq \frac{\partial}{\partial u^i_1}\,; \qquad u^i_2 \doteq du^i,\ \ u^i_{12} \doteq du^i_1\,.$$

Рассмотрим базис распределения $\triangle_h$ и кобазис распределения $\bar{\triangle}_h$, с коэффициентами Γ^k_{ij} и $\bar{\Gamma}^k_{ij}$, пока нефиксированными :

$$X_i = \partial_i - \Gamma^k_{ij} u^j_1\, \partial^{(1)}_k, \qquad \bar{\omega}^i_{12} = u^i_{12} + \bar{\Gamma}^i_{kj} u^j_1 u^k_2.$$

Представим поднятие векторного поля X и дифференциал 1-формы Φ следующим образом:

$$X = x^i\partial_i \ \Rightarrow\ X^{(1)} = x^i\partial_i + \partial_j x^i u^j_1\, \partial^{(1)}_i = x^i X_i + (\partial_j x^k + \Gamma^k_{ij} x^i) u^j_1\, \partial^{(1)}_k,$$
$$\Phi = \varphi_i u^i_1 \ \Rightarrow\ d\Phi = \partial_j\varphi_i u^i_1 u^j_2 + \varphi_i u^i_{12} = (\partial_i\varphi_j - \varphi_k\bar{\Gamma}^k_{ij}) u^j_1 u^i_2 + \varphi_i \bar{\omega}^i_{12}.$$

Появляются ковариантные производные, см. в скобках, и выясняется смысл обращения их в нуль:

– поднятие $X^{(1)}$ принадлежит распределению $\triangle_h$ тогда и только тогда, когда $\partial_j x^k + \Gamma^k_{ij} x^i = 0$,

– дифференциал $d\Phi$ аннулирует распределение $\bar{\triangle}_h$ тогда и только тогда, когда $\partial_i\varphi_j - \varphi_k\bar{\Gamma}^k_{ij} = 0$.

[3] Координаты на окрестностях U, TU, T^2U определяются итеративно, см. [1], стр. 28 : $u^i \rightsquigarrow (u^i, u^i_1) \rightsquigarrow (u^i, u^i_1, u^i_2, u^i_{12})$.

Базис (R, Θ) определяет две связности. Поднятия операторов репера $R_i = \bar{A}^j_i \partial_j$ определяют распределение $\triangle_h$, а дифференциалы форм корепера $\Theta^i = A^i_j u^j_1$ аннулируются распределением $\bar{\triangle}_h$. Вторая связность имеет нулевую кривизну. Взаимно обратные матрицы (A^i_j) и $(\bar{A}^j_i)$ определяют на окрестности U базис (R, Θ). Согласно сказанному, коэффициенты Γ^k_{ij} и $\bar{\Gamma}^k_{ij}$ фиксируются однозначно:

$$\begin{aligned} \partial_j \bar{A}^k_l + \Gamma^k_{ij} \bar{A}^i_l = 0 \quad &\Rightarrow \quad \Gamma^k_{ij} = \bar{A}^k_l \partial_j A^l_i, \\ \partial_i A^l_j - A^l_k \bar{\Gamma}^k_{ij} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \bar{\Gamma}^k_{ij} = \bar{A}^k_l \partial_i A^l_j. \end{aligned}$$

Таким образом, базис (R, Θ) определяет на многообразии M две аффинные связности.

В пучке этих связностей при $\lambda = \mu = 1$ выделяется связность с коэффициентами

$$\gamma^{\,k}_{\,ij} = \bar{A}^k_l \partial_{(i} A^l_{j)}.$$

$*\quad *\quad *$

Рассмотрим отображение $M_1 \xrightarrow{f} M_2$. Зададим на многообразиях M_1 и M_2 неголономные базисы[4]:

$$\begin{aligned} (R_i, \theta^j) \qquad &\rightsquigarrow \qquad R_i = \partial_j \bar{A}^j_i, \quad \theta^j = A^j_i du^i, \\ (R_\alpha, \theta^\beta) \qquad &\rightsquigarrow \qquad R_\alpha = \partial_\beta \bar{B}^\beta_\alpha, \;\; \theta^\beta = B^\beta_\alpha dv^\alpha. \end{aligned}$$

Латинские индексы соотносятся к окрестности $U_1 \subset M_1$, а греческие – к окрестности $U_2 = f(U_1) \subset M_2$. Объекты неголономности c^k_{ij} и $c^\gamma_{\alpha\beta}$ присутствуют в уравнениях структуры:

$$\mathrm{d}\,\theta^{\,k} = -\frac{1}{2}\, c^{\,k}_{\,ij} \theta^i \wedge \theta^j, \qquad \mathrm{d}\theta^\gamma = -\frac{1}{2}\, c^\gamma_{\alpha\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta.$$

Отображение f определяется локально системой $v^\alpha \circ f = f^\alpha$. Дифференциал Tf определяется в естественном и неголономном кобазисах системами ДУ:

$$\begin{aligned} dv^\alpha \circ Tf = f^\alpha_i du^i, \qquad & f^\alpha_i \doteq \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i}, \\ \theta^\alpha \circ Tf = F^\alpha_i \theta^i, \qquad & F^\alpha_i \doteq (B^\alpha_\beta \circ f) f^\beta_j \bar{A}^j_i. \end{aligned}$$

Первая система записана локально на окрестности U_1, а вторая имеет глобальный смысл. Запишем вторую систему проще в виде $\theta^\alpha = F^\alpha_i \theta^i$.

Над этой системой и производится *процедура по Картану*. Осуществим внешнее дифференцирование системы и применим лемму Картана:

$$-\frac{1}{2} c^\alpha_{\beta\gamma} F^\beta_i F^\gamma_j \theta^i \wedge \theta^j = dF^\alpha_j \wedge \theta^j - \frac{1}{2} F^\alpha_k c^k_{ij} \theta^i \wedge \theta^j,$$

$$\big(dF^\alpha_j - \frac{1}{2} F^\alpha_k c^k_{ij} \theta^i + \frac{1}{2} c^\alpha_{\beta\gamma} F^\beta_i F^\gamma_j \theta^i\big) \wedge \theta^j = 0\,,$$

$$dF^\alpha_j = \big(\frac{1}{2} F^\alpha_k c^k_{ij} - \frac{1}{2} c^\alpha_{\beta\gamma} F^\beta_i F^\gamma_j + \lambda^\alpha_{ij}\big)\, \theta^i = X_i F^\alpha_j \theta^i.$$

[4]Неголономный базис определяется на вполне параллелизуемом многообразии глобально, или же на вполне параллелизуемой области многообразия.

Появляются коэффициенты, симметрические по нижним индексам:

$$\lambda^\alpha_{ij} = X_{(i}F^\alpha_{j)}.$$

Если вычислить производные $X_iF^\alpha_j$ и просимметрировать, получим в коэффициентах λ^α_{ij} объект F^α_{ij} со связностями γ^k_{ij} и $\gamma^\alpha_{\mu\nu}$:

$$\lambda^\alpha_{ij} = (B^\alpha_\beta \circ f)F^\beta_{kl}\bar{A}^k_i\bar{A}^l_j\,,$$

$$\boxed{F^\alpha_{ij} = f^\alpha_{ij} - f^\alpha_k\gamma^k_{ij} + (\gamma^\alpha_{\mu\nu}\circ f)f^\mu_i f^\nu_j}\,, \quad \text{где} \quad \gamma^k_{ij} = \bar{A}^k_s\partial_{(i}A^s_{j)},\ \ \gamma^\alpha_{\mu\nu} = \bar{B}^\alpha_\sigma\partial_{(\mu}B^\sigma_{\nu)}.$$

Объект λ^α_{ij}, имеющий, так же как неголономные базисы на многообразиях M_1 и M_2 и система ДУ $\theta^\alpha = F^\alpha_i\theta^i$, глобальный смысл, на окрестности U_1 выражается, как видим, через объект F^α_{ij}.

4. Подвижной репер

Таким образом, коэффициенты Γ^k_{ij} и $\Lambda^\gamma_{\alpha\beta}$ для объекта Лаптева определяются неголономными базисами Схоутена на многообразиях M_1 и M_2, [17, 10]. Возникает очередной вопрос: как могут быть зафиксированы на многообразиях неголономные базисы ? Вспомним метод Картана и идею подвижного репера. Когда репер увязывается со структурой многообразия, то это значит, что на многообразии фиксируется неголономный базис. В геометрических исследованиях можно встретить множество примеров по процедуре канонизации репера, например:

– репер Френе кривой: точка, касательная, нормаль, бинормаль.

– репер Дарбу поверхности: точка, касательная плоскость, главные направления, нормаль.

– проективный репер поверхности: точка, касательная плоскость, асимптотические направления, директрисы Вильчинского, и т.д.

В общем случае при каждом шаге фиксации репера на групповые параметры накладываются новые ДУ и процесс продолжается до тех пор, пока не доходят до единицы группы – тогда репер, как говорится, становится каноническим. Базис будет неголономным, так как иначе нельзя говорить, скажем, о кривизне поверхности и пр.

* * *

На связность имеется и более общая точка зрения, [1], стр. 79. Неголономный базис (R, Θ) специализируется в структуре $\triangle_h \oplus \triangle_v$ следующим образом. Часть операторов репера R_i направляется в горизонтальное распределение $\triangle_h$, а часть R_α в вертикальное распределение $\triangle_v$. Кроме того, операторы R_i считаются π-проектируемыми, чтобы облегчить горизонтальные поднятия и перенесение слоёв. Объект неголономности распадается на шесть подобъектов:

$$c^k_{ij},\ c^k_{\alpha\beta},\ c^k_{i\beta},\ c^\alpha_{ij},\ c^\alpha_{i\beta},\ c^\alpha_{\beta\gamma}.$$

Из них два обращаются в нуль: $c^k_{\alpha\beta} = 0$, так как вертикальное распределение Δ_v вполне интегрируемо, и $c^k_{i\beta} = 0$, так как операторы R_i π-проектируемы и допускают распределение Δ_v. Подобъект c^k_{ij} поднят с базы: $c^k_{ij} = \bar{c}^k_{ij}\circ\pi$, а подобект $c^\alpha_{\beta\gamma}$ в случае главного расслоения совпадает со структурными константами группы Ли, для которой слои – орбиты и поля (R_α) – операторы.

Особенно важны два подобъекта $c^{\alpha}_{i\beta}$ и c^{α}_{ij}. В адаптированном базисе только они сохраняются. В случае аффинной связности подобъект $c^{\alpha}_{i\beta}$ совпадает с величинами Γ^k_{ij} и подобъект c^{α}_{ij} будет линейным на слоях: $K^l_{ijk}du^k$, где K^l_{ijk} – тензор кривизны. В этом случае разговоры по поводу неголономного базиса могут быть сведены к сечению главного расслоения реперов.

Таким образом, в специализированном базисе наблюдается возникновение всех основных объектов теории связностей.

5. Обобщение

Мы рассмотрели структуру $\triangle_h \oplus \triangle_v$ на этаже TM и обсудили вопрос в связи с обычной аффинной связностью. По такой же схеме определяются высшие аффинные связности и строится последовательность фундаментальных объектов:

$$F^{\alpha}_{i},\ F^{\alpha}_{i_1 i_2},\ F^{\alpha}_{i_1 i_2 i_3},\ \dots\ ,\ F^{\alpha}_{i_1 \dots i_k}.$$

Объекты F^{α}_{i}, $F^{\alpha}_{i_1 i_2}$ определялись выше. Следующий объект $F^{\alpha}_{i_1 i_2 i_3}$ появляется при морфизме вторых этажей. На втором этаже T^2M определяется структура

$$\triangle \oplus \triangle_1 \oplus \triangle_2 \oplus \triangle_{12}$$

– в каждой точке по четыре n-мерных площадки, $n = \dim M$. Этаж T^2M имеет размерность $4n$ и проектируется на этаж TM двумя различными способами ρ_1 и ρ_2. При ρ_i вертикальным считается распределение $\triangle_i \oplus \triangle_{12}$, $i = 1, 2$. На T^2U строится неголономный базис. На окрестности T^2U он адаптируется к локальным координатам. Появляются коэффициенты типа $\Gamma^j_{i_1 i_2}$, $\Gamma^j_{i_1 i_2 i_3}$. При морфизме $T^2f : T^2M_1 \to T^2M_2$ появляется объект $F^{\alpha}_{i_1 i_2 i_3}$.

В случае расслоения Вагнера, имеющего размерность $3n$, начинают со структуры

$$\triangle_h \oplus \triangle_{hv} \oplus \triangle_v.$$

При первой проекции вертикальным является распределение $\triangle_v$, при сквозной проекции – распределение $\triangle_{hv} \oplus \triangle_v$, см. [2].

В книге [14], стр. 160-168, определяются аффинные связности высшего порядка и выводится, с преодолением характерной для подобной ситуации "вакханалии индексов общая формула для объекта $F^{\alpha}_{i_1 \dots i_k}$. Такова точка зрения на высшие связности.

6. Экспоненциальный закон

Построим в пространстве бесконечных струй $J_{1,1}$ схему, которая повторяется таким же образом в пространстве $J_{m,n}$ для произвольных m и n, но в таком случае для записи формул нужно пользоваться мультииндексами. Короче, в пространстве бесконечных струй имеет место *экспоненциальный закон*, выраженный в четырёх импликациях.

Исходя из этой схемы, смысл первой главы работы Л. Е. Евтушика [20] становится в целом более чётким и понятным.

Импликация I : Оператор D

Введём бесконечные матрицы:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$e^{tC} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots \\ 0 & 1 & t & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ u'_t \\ u''_t \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad U' = \begin{pmatrix} u' \\ u'' \\ u''' \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial U} = \left(\frac{\partial}{\partial u} \ \ \frac{\partial}{\partial u'} \ \ \frac{\partial}{\partial u''} \dots \right).$$

Здесь E – единичная матрица, C – т. н. матрица сдвига, e^{tC} – экпоненциал матрицы tC. Затем идут матрицы-столбцы U, U_t , U', I, где U изображает точку слоя, U_t – траекторию этой точки в слое и U' – касательны вектор к этой траектории в точке U. О матрице-столбце I будет сказано ниже. Со слоевыми координатами U ассоциируется вертикальный репер – матрица-строка с операторами дифференцирования.

Важную роль в пространстве $J_{1,1}$ играет горизонтальное векторное поле – *оператор полного дифференцирования* (ОПД):

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + u' \frac{\partial}{\partial u} + u'' \frac{\partial}{\partial u'} + \dots ,$$

или в матричной записи:

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial U} U'.$$

Штрихами обозначаются производные (ниже и производные Ли) относительно D.

Запишем двойную импликацию:

$$\boxed{U' = CU \quad \Rightarrow \quad U_t = e^{tC} U \quad \Rightarrow \quad I = e^{-tC} U.} \tag{I}$$

Первая формула здесь понимается как ЛОДУ. Вторая формула даёт решение этого уравнения и заодно определяет поток поля D:

$$(t, U_t)'_{t=0} = (1, U') \text{ – компоненты } D.$$

Если во второй формуле произвести замену $t \rightsquigarrow -t$, получим функции I от параметра t и слоевых координат U, см. третью формулу, инвариантные относительно оператора D,

$$I' = e^{-Ct}(U' - CU) = 0.$$

Примечание 1. Если первую импликацию расписать:

$$\begin{pmatrix} u' \\ u'' \\ u''' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ \vdots \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} u_t \\ u'_t \\ u''_t \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots \\ 0 & 1 & t & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ \vdots \end{pmatrix},$$

тогда вторая и третья формулы $U_t = e^{tC}U$ и $I = e^{-tC}U$ распишутся в системы:

$$u_t^{(p)} = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(p+l)} \frac{t^k}{k!}, \qquad p = 0, 1, 2, \dots,$$

$$i_p = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(p+k)} \frac{(-t)^k}{k!}, \qquad p = 0, 1, 2, \dots$$

Формулы записаны для общей струи и вопрос о сходимости этих рядов не обсуждается. Если же речь идёт о конкретной функции u_t, то формула $U_t = e^{tC}U$ даёт для этой функции и всех её производных разложения в ряд Маклорена. В таком случае требуется, чтобы функция u_t была аналитической, т. е. дифференцируемой класса C^ω.

Примечание 2. Если говорить о бесконечной линейной группе $GL(\mathbb{R})$ и её алгебре Ли $gl(\mathbb{R})$, то экспоненциал e^{tC} понимается как 1-параметрическая подгруппа группы $GL(\mathbb{R})$, а матрица C как соответствующий элемент $gl(\mathbb{R})$.

Примечание 3. Рассмотрим на многообразии M векторное поле X с каноническим параметром s. Вычислим для функции f производные относитеотно поля X и составим из элементов $f, f', f'', \dots$ матрицу-столбец F. Определяется отображение

$$\varphi : M \to J_{1,1} : \quad \begin{cases} t \circ \varphi = s, \\ U \circ \varphi = F\,. \end{cases}$$

Многообразие M будет погружено в пространство $J_{1,1}$ и векторное поле X окажется φ-связанным с оператором D – для произвольной функции I в пространстве $J_{1,1}$ на многообразии M будет выпоняться равенство

$$X(I \circ \varphi) = (DI) \circ \varphi\,.$$

Отсюда следует $DI = 0 \Rightarrow X(I \circ \varphi) = 0$, т. е., если I – инвариант оператора D, тогда функция $I \circ \varphi$ будет инвариантом векторного поля X. Все инварианты оператора D, определяемые импликацией (I), переносятся на многообразие M в инварианты поля X,

$$I = e^{-Ct}U \quad \rightsquigarrow \quad I \circ \varphi = e^{-Cs}F.$$

В частности, если $f^{(n)} \doteq X^n f$ – отличный от нуля инвариант поля X, тогда $f^{(n-1)}$ будет первообразной инварианта $f^{(n)}$, и для поля X определяется канонический параметр $s = f^{(n-1)} : f^{(n)}$. Функция f в потоке поля X будет полиномом степени n и это правило даёт нам $n+1$ инвариантов поля X. Входим в теорию полиномиальных инвариантов.

Импликация II : Формы Картана

С оператором полного дифференцирования D в расслоении $J_{1,1}$ ассоциируется система *форм Картана* ω :

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial U}\, U', \qquad \omega = dU - U'dt.$$

В расписанном виде имеем последовательность[5], где каждая последующая форма является производной Ли относительно D предыдущей формы:

$$\begin{aligned} \omega &= du - u'dt, \\ \omega' &= du' - u''dt, \\ \omega'' &= du'' - u'''dt, \\ \dots & \quad \dots \end{aligned}$$

Именно, если в натуральном репере оператор $\dfrac{\partial}{\partial t}$ заменить на оператор D, то в дуальном корепере дифференциалы dU заменятся автоматически на формы ω :

$$\begin{pmatrix} D & \dfrac{\partial}{\partial U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial t} & \dfrac{\partial}{\partial U} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U' & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} dt \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -U' & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt \\ dU \end{pmatrix}.$$

В расслоении $J_{1,1}$ определяется адаптированный базис линейной связностм.

Аналогично импликации (I), которая была записана для слоевых координат U, для форм Картана записывается импликация:

$$\boxed{\omega' = C\omega \quad \Rightarrow \quad \omega_t = e^{tC}\omega \quad \Rightarrow \quad dI = e^{-tC}\omega.} \qquad \textbf{(II)}$$

Как и в импликации (I), здесь первая формула воспринимается как ЛОДУ. Вторая формула даёт решение этого уравнения и заодно определяет увлечение форм ω в потоке поля D. Если произвести замену $t \rightsquigarrow -t$, получим дифференциалы инвариантов I, инвариантные относительно D, см. третью формулу,

$$I = e^{-Ct}U \quad \rightsquigarrow \quad dI = e^{-tC}(dU - U'dt) = e^{-tC}\omega.$$

Примечание 4. Равенство $dI = e^{-tC}\omega$ говорит о том, что экспоненциал e^{-tC} является для системы форм ω интегрирующей матрицей. Для конечной системы форм Картана интегрирующей матрицы не существует – система не в инволюции.

Примечание 5. Выше в Примечании 3 векторное поле X оказалось φ-связанным с оператором D. В таком случае формы Картана ω определяют на многообразии M систему форм $\omega \circ T\varphi$:

$$\omega = dU - U'dt \quad \rightsquigarrow \quad \omega \circ T\varphi = dF - F'ds\,,$$

и при этом $\omega(D) = 0 \ \Rightarrow \ (\omega \circ T\varphi)(X) = 0$. Как в системе ω имеем последовательность производных Ли относительно оператора D, так в системе $\omega \circ T\varphi$ имеем последовательность производных Ли относительно поля[6] X.

[5]Нас не смущает, что первая форма системы обозначена той же буквой, что вся матрица-столбец ω.

[6]Общее правило : для любого отображения φ производные Ли φ-связанных тензорных полей относительно φ-связанных векторных полей φ-связаны.

Импликация III : Инвариантный репер

Импликация II показывает, как увлекаются формы Картана ω в потоке оператора D. Следующая импликация III показывает, как увлекается вертикальный репер в потоке оператора D:

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial U}\right)' = -\frac{\partial}{\partial U}\, C \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{\partial}{\partial U}\right)_t = \frac{\partial}{\partial U}\, e^{-tC} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial U}\, e^{tC}.} \tag{\textbf{III}}$$

Как и ранее, первая формула здесь воспринимается как ЛОДУ и вторая формула как решение этого уравнения. Что касается первой формулы, то отметим, что в любом случае существует матрица $\widetilde{C}$, такая, что $\left(\frac{\partial}{\partial U}\right)' = \frac{\partial}{\partial U}\, \widetilde{C}$. Если продифференцировать (по Ли) равенство $\omega\left(\frac{\partial}{\partial U}\right) = E$ с учётом $\omega' = C\omega$, получим:

$$\omega'\left(\frac{\partial}{\partial U}\right) + \omega\left(\left(\frac{\partial}{\partial U}\right)'\right) = 0, \qquad C + \widetilde{C} = 0.$$

Следовательно, $\widetilde{C} = -C$, что даёт первую формулу импликации. Эту формулу получим и тогда, если производную $\left(\frac{\partial}{\partial U}\right)'$ вычислить как скобку $\left[\, D, \frac{\partial}{\partial U}\, \right]$.

Относительно третьей формулы выскажем следующее.

Во-первых, преобразование слоевых координат $U \rightsquigarrow I$ сопровождается преобразованием натурального базиса – репера и корепера:

$$I = e^{-tC} U \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial U} e^{tC}, \quad dI = e^{-tC}\omega.$$

Замена параметра $t \rightsquigarrow -t$ во второй формуле импликации даёт репер, см. третью формулу. В расписанном виде этот репер образован вертикальными операторами

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial i_0} &= \frac{\partial}{\partial u}\ , \\
\frac{\partial}{\partial i_1} &= t\, \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u'} \\
\frac{\partial}{\partial i_2} &= \frac{t^2}{2}\, \frac{\partial}{\partial u} + t\, \frac{\partial}{\partial u'} + \frac{\partial}{\partial u''} \\
&\dots \qquad \dots
\end{aligned}$$

– инфинитезимальными симметриями оператора D. Легко проверить: $\left[\, D, \frac{\partial}{\partial I}\, \right] = 0.$

Во-вторых, в пространстве $J_{1,1}$ происходит точечное преобразование, обозначим его φ :

$$t \circ \varphi = t, \quad I \circ \varphi = U,$$

что сопровождается преобразованием полного базиса – репера и корепера[7] :

$$T\varphi^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t} \ \ \frac{\partial}{\partial I}\right) = \left(D \ \ \frac{\partial}{\partial U}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & e^{tC} \end{array}\right),$$

[7]Осторожно: часто опускают обозначение φ, что может привести к абсурдному раенству $\frac{\partial}{\partial t} = D$. Это следует иметь в виду и в импликациях (II) и (III) при записи третьих формул.

$$\begin{pmatrix} dt \\ dI \end{pmatrix} \circ T\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-tC} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt \\ \omega \end{pmatrix}.$$

Так связывает отображение φ инвариатный базис с адаптированным, и наоборот.

Импликация IV : Поля Ли

Спрашиваем: когда вертикальное векторное поле P коммутирует с оператором D, чтобы выполнялось условие $P\,' = 0$? Такое векторное поле является вертикальным *полем Ли.*

Представим поле P в инвариантном и натуральном реперах соответствующими компонентами $\nu = PU$ и $\mu = PI$ и вычислим производную Ли P' в обоих реперах:

$$P = \frac{\partial}{\partial I}\,\nu = \frac{\partial}{\partial U}\,\mu \quad \rightsquigarrow \quad P\,' = \frac{\partial}{\partial U}\,(\mu' - C\mu) = \frac{\partial}{\partial I}\,\nu\,'\,.$$

Поле P будет полем Ли тогда и только когда, когда будет выполнено одно из эквивалентных условий: либо $\nu\,' = 0$, либо $\mu' = C\mu$.

Для компонент μ запишем импликацию:

$$\boxed{\mu' = C\mu \quad \Rightarrow \quad \mu_t = e^{tC}\mu \quad \Rightarrow \quad \nu = e^{-tC}\mu\,.} \tag{IV}$$

Как и в предыдущих импликациях, здесь первая формула – ЛОДУ, вторая – решение этого уравнения, а третья, собственно, результат представления поля P в двух реперах, что подтверждается заменой $t \rightsquigarrow -t$ во второй формуле.

Импликация (IV) в принципе идентична с импликацией (I), но разница в том, что если в импликации (I) слоевые координаты U заданы a priori как элементы произвольной бесконечной струи, то в импликации (IV) величины μ являются компонентами вертикального поля Ли P. Согласно $\mu' = C\mu$, все они, начиная со второго, могут быть вычислены, как только задан первый элемент матрицы-столбца μ – т. н. *производщая функция* μ_0,

$$\mu_k = \mu_0^{(k)},\ k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Примечание 6. Вертикальные поля Ли $\dfrac{\partial}{\partial I} = \dfrac{\partial}{\partial U}e^{tC}$, определяемые импликацией III, имеют производящие функции соответственно $1\,,\ t\,, \dfrac{t^2}{2}\,, \ldots$

Выясним, при каких условиях и общее векторное поле P, необязательно вертикальное, является инфинитезимальной симметрией оператора D, т. е. чтобы выполнялось условие $P' \parallel D$, где знак $\parallel$ означает равенство с точностью до сомножителя, см. [1], стр. 137. Такое векторное поле в пространстве $J_{1,1}$ есть общее *поле Ли.* Представим поле P на этот раз в натуральном, адаптированном и инвариантном реперах и выпишем соотношения между соответствующими компонентами:

$$P = \xi\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial U}\lambda = \xi D + \frac{\partial}{\partial U}\mu = \xi D + \frac{\partial}{\partial I}\nu,$$

$$\xi = Pt, \quad \lambda = PU = \mu + U'\xi, \quad \mu = \omega(P), \quad \nu = PI = e^{-tC}\mu.$$

Вычислим во всех реперах производную Ли поля P относительно оператора D:

$$P' = \xi' D + \frac{\partial}{\partial U}(\lambda' - C\lambda - \xi' U') = \xi' D + \frac{\partial}{\partial U}(\mu' - C\mu) = \xi' D + \frac{\partial}{\partial I}\nu\,'.$$

Получаем эквивалентные условия:

$$P' \parallel D \quad \Leftrightarrow \quad \lambda' - C\lambda - \xi' U' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu' = C\mu \quad \Leftrightarrow \quad \nu\,' = 0.$$

К рассмотрнным выше условиям $\mu\,' = C\mu$ и $\nu\,' = 0$ добавляется ещё условие: $\lambda' - C\lambda - \xi' U' = 0$.

Допустим, нам нужно в пространстве $J_{1,1}$ продолжить векторное поле

$$\bar{P} = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial u}$$

до полного поля Ли. Это значит, что в столбце λ известен первый элемент λ_0. Чтобы найти остальные элементы столбца λ, воспользуемся соотношением $\lambda = \mu + U'\xi$. Первое равенство $\lambda_0 = \mu_0 + u'\xi$ даёт нам производящую функцию $\mu_0 = \lambda_0 - u'\xi$. Производные производящей функции образуют столбец μ, и после этого столбец λ определится целиком. Векторное поле $\bar{P}$ будет продолжено до поля Ли P.

Пример.

Покажем, как продолжается на плоскости xy до поля Ли оператор вращений

$$\bar{P} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Имеем соответствие $(-y, x) \rightsquigarrow (\xi, \lambda_0)$. Определяем, как обусловились, производящую функцию $\mu_0 = x + yy'$, находим производные это функции и образуем столбец μ, а затем столбец λ:

$$\mu = \begin{pmatrix} x + yy' \\ 1 + (y')^2 + yy'' \\ 3y'y'' + yy''' \\ 3(y'')^2 + 4y'y''' + yy'''' \\ \cdots \end{pmatrix},$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} x \\ 1 + (y')^2 \\ 3y'y'' \\ 3(y'')^2 + 4y'y''' \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

Поле Ли записывается в координатах $(x, y, y', y'', y''', \ldots)$ в виде бесконечной суммы слагаемых:

$$P = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \big(1 + (y')^2\big)\frac{\partial}{\partial y'} + 3y'y''\frac{\partial}{\partial y''} + \ldots$$

С каждым слагаемым добавляется один новый инвариант:

$$\sqrt{x^2 + y^2}\ , \ \ \frac{y - xy'}{x + yy'}\,, \ \ \frac{y''}{\big(1 + (y')^2\big)^{\frac{3}{2}}}\,, \ \ldots$$

Выясняется геометрический смыл каждого инварианта: расстояние точки кривой от начала координат, тангенс угла между радиусом-вектором точки и касательным к кривой, кривизна кривой, ...

7. Разные подходы, разные определения

В главах 2 и 3 работы [20] излагаются теоретико-категорные основы высших связностей. Показана их роль при дифференциальных продолжениях. Аппарат разрабатывается в лаконичной форме и, вне сомнения, представляет ценный вклад в развитие современной геометрии.

Тем не менее, следует выделить геометрическую сторону проблемы, порой имеющую тенденцию затеряться в нагромождении абстрактных построений. Уточним эту мысль.

С одной стороны, при выводе фундаментальных объектов Г. Ф. Лаптева типа F^{α}_{ij} связности играют вспомогательную роль. В таком случае главное не связности, а эти объекты. С другой стороны, когда Г. Монж при изучении дифференциальных уравнений вводил для частных производных от z по x и y обозначения p, q, r, s, t, появились т. н. конусы, которые так и назывались *конусами Монжа*. Л. Е. Евтушик развивает идею горизонтальных конусов. В этом плане теория ДУ сводится, по существу, к связностям, причём более общим, чем у Эресмана, который трактует связность в расслоении как горизонтальное распределение $\triangle_v$. По Эресману объекты Лаптева возникают естественно. Об этом говорилось выше, но что касается дифференциальных уравнений, то, на наш взгляд, особенно если речь идёт о приложениях, помимо конусов необходимо говорить о задании распределения $\triangle_h$ с некоторым произволом. Пользуясь этим произволом, горизонтальные площадки можно поворачивать подходящим образом так, чтобы распределение $\triangle_h$ стало интегрируемым. Тогда интегральные поверхности распределения $\triangle_h$ будут определять и решения ДУ. Подтвердим сказанное следующим примером.

Пример.

Л. В. Овсянников в своей диссертации изучает уравнения газовой динамики, см. также [1], стр. 87:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\ , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -u\frac{\partial u}{\partial x}\ .$$

Разъясним геометрическую ситуацию. Как говорилось, система Пфаффа устанавливает связь между связностями и дифференциальными уравнениями:

$$\omega^{\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{i}} = \Gamma^{\alpha}_{i}.$$

В данном случае имеем базисные координаты (x, y) и слоевые (u, v). Распределение $\triangle_h$ определяется четырьмя величинами Γ^{α}_{i}, но уравнения накладывают на них две связи:

$$\Gamma^4_1 = \Gamma^3_2, \quad \Gamma^4_2 = -u\Gamma^3_1.$$

Свободными остаются два параметра, положим Γ^3_1 и Γ^3_2. Эти параметры, в свою очередь, можно фиксировать по-разному и каждый раз распределение Δ_h занимает определённое положение. Поворот нужно выбирать так, чтобы распределение Δ_h стало вполне интегрируемым, что зависит от фиксации параметров Γ^3_1 и Γ^3_2.

Распределение Δ_h определяется базисом (X_1, X_2), или кобазисом (ω^3, ω^4):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma^3_1\frac{\partial}{\partial u} + \Gamma^3_2\frac{\partial}{\partial v}\ , \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \Gamma^3_2\frac{\partial}{\partial u} - u\Gamma^3_1\frac{\partial}{\partial v}\ ,$$

$$\omega^3 = du - \Gamma^3_1 dx - \Gamma^3_2 dy, \quad \omega^4 = dv - \Gamma^3_2 dx + u\Gamma^3_1 dy.$$

Рассмотрим векторное поле P с произвольными компонентами $(\xi^1, \xi^2, \lambda^3, \lambda^4)$,

$$P = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \lambda^3 \frac{\partial}{\partial u} + \lambda^4 \frac{\partial}{\partial v},$$

и потребуем, чтобы при любом выборе параметров Γ_1^3 и Γ_2^3 это поле было для распределения Δ_h инфинитезимальной симметрией, $\mathcal{L}_P \Delta_h = 0$. Получаем условие в матричной записи, см. [1] стр. 86:

$$\begin{pmatrix} X_1\lambda^3 & X_2\lambda^3 \\ X_1\lambda^4 & X_2\lambda^4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P\Gamma_1^3 & P\Gamma_2^3 \\ P\Gamma_2^3 & -P(u\Gamma_1^3) \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} \Gamma_1^3 & \Gamma_2^3 \\ \Gamma_2^3 & -u\Gamma_1^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1\xi^1 & X_2\xi^1 \\ X_1\xi^2 & X_2\xi^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Из четырёх соотношений производные $P\Gamma_1^3$ и $P\Gamma_2^3$ исключаем. Остаётся два соотношения, которые должны удовлетворяться при любом выборе Γ_1^3 и Γ_2^3:

$$\begin{cases} X_1\lambda^4 - X_2\lambda^3 = -\Gamma_1^3(uX_1\xi^2 + X_2\xi^1) + \Gamma_2^3(X_1\xi^1 - X_2\xi^2), \\ uX_1\lambda^3 + X_2\lambda^4 + \lambda^3\Gamma_1^3 = u\Gamma_1^3(X_1\xi^1 - X_2\xi^2) + \Gamma_2^3(uX_1\xi^2 + X_2\xi^1). \end{cases}$$

Отсюда на величины $(\xi^1, \xi^2, \lambda^3, \lambda^4)$ накладывается система ДУ (частные производные относительно переменных x, y, u, v обозначены нижними индексами 1, 2, 3, 4):

$$\lambda_1^4 = \lambda_2^3, \quad \lambda_2^4 = -u\lambda_1^3, \quad \lambda_3^4 = -u\lambda_4^3, \quad \lambda_4^4 = \lambda_3^3 + \frac{\lambda^3}{2u},$$

$$\xi_1^1 = \xi_2^2 + \frac{\lambda^3}{2u}, \quad \xi_2^1 = -u\xi_1^2, \quad \xi_3^1 = -u\xi_4^2, \quad \xi_4^1 = \xi_3^2.$$

Система допускет общее решение в виде:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= C_1(-xv + yu^2) + (C_2 + C_3)x + \alpha, \\ \xi^2 &= -C_1(xu + 2yv) + C_3 y + \beta, \\ \lambda^3 &= 2u(C_1 v + C_2), \\ \lambda^4 &= C_1(-\frac{2}{3}u^3 + \frac{3}{2}v^2) + 3C_2 v + C_4, \end{aligned}$$

где (C_1, C_2, C_3, C_4) – произвольные константы и (α, β) – произвольные функции переменных u и v, удовлетворяющие уравнениям

$$\alpha_4 = -\beta_3, \quad \alpha_3 = -u\beta_4.$$

Положим $\alpha = \beta = 0$. Компоненты $(\xi^1, \xi^2, \lambda^3, \lambda^4)$, таким образом, найдены и векторное поле P представлено в виде линейной комбинации с коэффициентами (C_1, C_2, C_3, C_4) четырёх операторов – инфинитезимальных симметриий распределения Δ_h:

$$\begin{aligned} P_1 &= (-xv + yu^2)\frac{\partial}{\partial x} - (xu + 2yv)\frac{\partial}{\partial y} + 2uv\frac{\partial}{\partial u} + (-\frac{2}{3}u^3 + \frac{3}{2}v^2)\frac{\partial}{\partial v}, \\ P_2 &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u} + 3v\frac{\partial}{\partial v}, \\ P_3 &= x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \\ P_4 &= \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Важную роль играет *характеристическое поле* распределения, это – инфинитезимальная симметрия, принадлежащая распределению. Если мы знаем характеристическое поле распределения, то это позволяет нам снизить размерность распределения и упростить задачу. В данном случае размерность распределения Δ_h равна двум. Если какой-либо из найденных операторов принадлежит распределению Δ_h и если этот оператор имеет при этом инварианты, скажем, (U,V,W), то вдоль траекторий этого оператора образуется проекция $\pi : (x, y, u, v) \to (U, V, W)$ и распределение Δ_h проектируется в пространство UVW в поле изоклин, т. е. ОДУ первого порядка, которое в принципе легко интегрируется. Если γ – некоторая интегралная кривая поля изоклин, то поверхность $\pi^{-1}(\gamma)$ над ней будет интегральным многообразием распределения Δ_h, или если ψ – первый интеграл поля изоклин, то $\psi \circ \pi$ будет первым интегралом распределения Δ_h.

Поле P будет принадлежать распределению Δ_h, когда его компоненты в адаптированном репере $\mu^\alpha = \lambda^\alpha - \Gamma^\alpha_i \xi^i$ обратятся в нуль, $\mu^\alpha = 0$. В нашем случае это условие записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} \Gamma^3_1 & \Gamma^3_2 \\ \Gamma^3_2 & -u\Gamma^3_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^4 \end{pmatrix}.$$

При найденных $(\xi^1, \xi^2, \lambda^3, \lambda^4)$ накладываются связи на величины Γ^3_1 и Γ^3_2.

Рассмотрим операторы P_4, P_3, P_2, P_1 по порядку.

Оператор P_4 не может быть горизонтальным, так как он вертикальный.

Оператор P_3, для которого $(\xi^1, \xi^2, \lambda^3, \lambda^4) = (x, y, 0, 0)$, будет горизонтальным, если величины Γ^3_1 и Γ^3_2 удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} x\Gamma^3_1 + y\Gamma^3_2 = 0, \\ uy\Gamma^3_1 - x\Gamma^3_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда два случая:

1) $x^2 + uy^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^3_1 = \Gamma^3_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^3 = du,\ \omega^4 = dv,$

2) $x^2 + uy^2 = 0 \ \Rightarrow \quad P = xX_1 + yX_2.$

В случае 1 интегральные многообразия – семейство плоскостей $(u, v) = (u_0, v_0)$.

В случае 2 распределение Δ_h касается гиперповерхности $x^2 + uy^2 = 0$. Фиксируются величины Γ^α_i :

$$\Gamma^3_1 = -\frac{2x}{y^2}, \quad \Gamma^3_2 = \Gamma^4_1 = -\frac{2u}{y}, \quad \Gamma^4_2 = \frac{2ux}{y^2},$$

и записываются формы

$$\omega^3 = \frac{1}{y^2}\ d(x^2 + uy^2), \quad \omega^4 = dv + 2u\ d\Big(\frac{x}{y}\Big).$$

На гиперповерхности $x^2 + uy^2 = 0$ формы упрощаются:

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^4 = d\Big(v - \frac{2x^3}{3y^3}\Big).$$

В качестве интегральных многообразий имеем 1-параметрическое семейство двухмерных поверхностей в параметрическом задании:

$$(u, v) = \Big(-\frac{x^2}{y^2}\,,\ \frac{2x^3}{3y^3} + v_0\Big).$$

Оператор P_2 будет горизонтальным при условии

$$P_2 = xX_1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^3_1 = \frac{2u}{x}\ , \quad \Gamma^3_2 = \frac{3v}{x}\ .$$

Распределение Δ_h фиксируется. Найдём инварианты поля P_2 и определяем проекцию:

$$\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, u, v) \rightsquigarrow (U, V, W), \qquad \begin{cases} U \circ \pi = y\ , \\ V \circ \pi = \frac{u}{x^2}\ , \\ W \circ \pi = \frac{v}{x^3}\ . \end{cases}$$

Распределение Δ_h проектируется в пространство UVW в поле изоклин, см. $T\pi X_2$:

$$T\pi X_1 = 0, \qquad T\pi X_2 = \frac{\partial}{\partial U} + 3W\frac{\partial}{\partial V} - 2V^2\frac{\partial}{\partial W}.$$

Интегральные кривые определяются системой ОДУ

$$\frac{dV}{dU} = 3W, \qquad \frac{dW}{dU} = -2V^2.$$

Система решается, как обычно. Любой первый интеграл ψ определяет первый интеграл $\psi \circ \pi$ распределения Δ_h.

Оператор P_1 будет характеристическим полем распределения Δ_h вида

$$P_1 = (-xv + yu^2)X_1 - (xy + 2yv)X_2,$$

если выполняются условия:

$$\begin{cases} (xv - yu^2)\Gamma^3_1 + (xu + 2yv)\Gamma^3_2 = -2uv, \\ (xu + 2yv)\Gamma^3_1 - (xv - yu^2)u\Gamma^3_2 = -\frac{2}{3}u^3 + \frac{3}{2}v^2. \end{cases}$$

Как и в предыдущем случае, распределение Δ_h фиксируется и проектируется вдоль траекторий поля P_1 в пространство UVW в поле изоклин. Любой первый интеграл этого поля ψ определяет первый интеграл $\psi \circ \pi$ распределения Δ_h.

Вопрос может ставиться и для линейных комбинаций операторов P_1, P_2, P_3, P_4.

Оператор $P_3 - kP_4$, где $k \in \mathbb{R}$, принадлежит распределению Δ_h и, следовательно, является характеристическим полем распределения Δ_h, если величины (Γ^3_1, Γ^3_2) фиксируются в области $x^2 + uy^2 \neq 0$ следующим образом:

$$\Gamma^3_1 = \frac{ky}{x^2 + uy^2}, \quad \Gamma^3_2 = -\frac{kx}{x^2 + uy^2}.$$

Система Пфаффа $\omega^\alpha = 0$ записывается в виде:

$$du = \frac{k}{x^2 + uy^2}(xdy - ydx), \quad dv = \frac{k}{x^2 + uy^2}(xdx + uydy),$$

и с помощью инвариантов поля $P_3 - kP_4$,

$$U = u, \quad V = v + k \ln y, \quad W = \frac{x}{y},$$

преобразуется в систему ОДУ :

$$\frac{dV}{dU} = -W, \quad \frac{dW}{dU} = \frac{1}{k}\left(U + W^2\right).$$

Система решается как обычно и первые интегралы распределения Δ_h будут определены.

Таким образом, уравнения газовой динамики сводятся в структуре $\Delta_h \oplus \Delta_v$ к системе Пфаффа $\omega^\alpha = 0$, или, что равносильно, к заданию горизонтального распределения Δ_h, правда, с некоторым произволом. Произвол позволяет определять для распределения Δ_h характеристические поля. Характеристическое поле проектирует распределение Δ_h в поле изоклин и решение первоначальных уравнений с частными производными сводится к простой задаче – решению системы ОДУ первого порядка.

Этот пример вводит нас в симметрийный анализ, т. е. в теорию дифференциальных уравнений, и вообще, в теорию симметрий геометрических объектов.

8. Заключение

Красота смотрится издали. Великое учение познаётся со временем. Рядом с именем Эли Картана следует называть также имя Софуса Ли и говорить надо не о двух отдельных учениях, а об единым исчислении Ли-Картана. Анри Пуанкаре называл Ньютона и Лейница великими геометрами, которые создали дифференциальное исчисление. Хотя Пуанкаре понимал, что Лейбниц был учёным-теоретиком, в то время как Ньютон был прикладником, ведь именно Ньютону объязано человечество основами механики и законами мироздания. Такую же параллель можно провести между учениями Картана и Ли. Картану принадлежат теория внешних форм и подвижного репера, а инвариантный аппарат Ли – основа глобального анализа, и группы Ли активно содействованы во множестве прикладных наук. Теории Ли и Картана – двойственно дополняющие друг друга стороны в единой теории Ли-Картана.

Сегодня, когда мы говорим о дифференциальных продолжениях, этой сути дифференциальной геометрии, невозможно представить себе этот вопрос без форм Картана и производных Ли. Дифференциальная геометрия имеет свои внутренние проблемы, она развивается сама в себе. Пример к этому: работа Л. Е. Евтушика [20] – мощный толчок в развитии идеи об охватах и продолжениях. Есть и другая сторона медали – в дифференциальной геометрии нуждаются другие науки. Медленно, но устойчиво входят дифференциально-геометрические методы в механику непрерывной среды и теоретическую физику. Очевидно, пройдёт время, когда идеи Ли и Картана займут достойное место в механике и физике во всей своей мощи. Впрочем, если проникнуться идеями Ренэ Тома относительно сингулярностей гладких отображений, структурной устойчивости и морфогенезиса/формообразования, то легко убедиться, какую ведущую роль наряду с функциональным анализом занимает там дифференциальная геометрия. Имея в виду ещё зарождающуюся теорию о движениях и взаимодействиях полей, здесь, очевидно, не обойтись без исчисления Ли-Картана.

* * *

Список литературы

[1] Atanasiu Gh., Balan V., Brînzei N., Rahula M., *Differential-Geometric Structures. Tangent Bundles, Connections in Fiber Bundles, Exponential Law and Jet Spaces* (in Russian), Librokom Eds., Moscow, 2010.

[2] Atanasiu Gh., Balan V., Brînzei N., Rahula M., *Differential Geometry of Second Order. Miron-Atanasiu Theory* (in Russian), Librokom Eds., Moscow, 2010.

[3] Bertram W., *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces over General Base Fields and Rings*, Memoirs of AMS, no. 900, 2008.

[4] Ehresmann Ch., *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Coll. de Topologie, Bruxelles, CBRM (1950), 29-55; Œuvres Complètes, t. I, 28, 179-204.

[5] Ehresmann Ch., *Extension du calcul des jets aux jets non holonomes*, C.R. Acad. Sci., Paris, **239** (1954), 1762-1764.

[6] Ehresmann Ch., *Les prolongements d'un espace fibré differentiable*, Compte Rendu de l'Acad. Sci. Paris **240** (1955), 1755-1757.

[7] Ehresmann Ch., *Catégories doubles et catégories structurées*, C.R. Acad. Sci., Paris, 256(1958), 1198-1201.

[8] Godbillon Cl., *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*, Hermann, Paris, 1969.

[9] Kolář I., Michor P. W., Slovák J.: *Natural Operations in Differential Geometry,* Springer-Verlag, 1993.

[10] Laptev G.F., *About invariant analytic theory of differentiable mappings* (in Russian), Tr. Geom. sem., VINITI, 6(1974), 37-42.

[11] Miron R., *The Geometry of Higher Order Finsler Spaces*, Hadronic Press, USA, 1998.

[12] Pohl W.F., *Differential geometry of higher order*, topology, 1(1962), 169-211.

[13] Pradines J., *Suites exactes vectorielles doubles et connexions*, C.R. Acad. Sci., Paris, 278(1974), 1587-1590.

[14] Rahula M., *New Problems in Differential Geometry*, World Scientific, 1993.

[15] Rahula M., *Tangent structures and analutical mechanics*, Proceedings of Estonian Acad. Sci., 60(2011), 2, 98-103.

[16] Roux A., *Jets et connexions*, Pub. Dep. math., 7(1970), $n^o 4$, 1-43.

[17] Schouten J.A., *Über nicht-holonome Übertragungen in einer* L_n, Math. Zeitschrift, 30, S, 1929, 149-172.

[18] White J.T., *The Method of Iterated Tangents with Applications in Local Riemannian Geometry*, Pitman Publ., 1982.

[19] Вагнер В.В., *Теория диференциальных объектов и основания диференциальной геометрии.* Приложение к книге: Веблен, О., Уайтхед, Дж., *Основания Диференциальной Геометрии*, Москва, ИЛ, 1949, стр. 135-223.

[20] Евтушик, Л.Е., *Структуры высших порядков.* Воспоминания о профессоре Леониде Евгеньевиче Евтушике друзей, коллег и учеников, Москва: Интеллект-Центр, 2014, 424 с.

* * *

Получена в редакцию 2.1.2016