



## **$f$ -атоми складності 4 функцій Морса на замкнених орієнтованих двовимірних многовидах**

**О. О. Пришляк   Д. М. Скочко**

**Анотація** В роботі було досліджено та знайдено всі можливі  $f$ -атоми складності 4 функцій Морса на замкнених орієнтованих двовимірних многовидах.

**Ключові слова**  $f$ -атоми, функцій Морса, орієнтовані двовимірні многовиди

**УДК** 517.956.4

### **Вступ**

Теорія функцій Морса є одним із основних інструментів для дослідження топологічних об'єктів. Основним поняттям та об'єктом дослідження цієї теорії є поняття функція Морса та дослідження її критичних точок, для цього в самій теорії розроблені потужні інструменти, такі як, наприклад, представлення многовида, на якому задано функцію Морса у вигляді графа Рібба, вершини якого відповідають критичним рівням функції Морса. Кожну вершину можна представити як певний абстрактний об'єкт, що будемо називати  $f$ -атомом, і який буде повністю описувати особливості критичного рівня функції Морса, що відповідає даній вершині графа Рібба.

Теорія функцій Морса розглядалась в багатьох роботах, таких як [1],[2],[3] та [4]. Вижливим для даної роботи було переформулювання поняття  $f$ -

графа, що наводиться в [5]. В [1] та [6] розглянуто прості функції Морса для двовимірних многовидів та складні функції Морса на кожному критичному рівні якої може бути 2 або 3 критичні точки, тобто досліджені всі можливі  $f$ -атоми складності 2 та 3. Крім того в роботі [7] досліджено випадки функцій Морса тривимірних многовидах.

*Метою даної роботи є знаходження всіх  $f$ -атомів складності 4 для функцій Морса на замкнених орієнтованих двовимірних многовидах.*

## 1 Функції Морса

Гладка функція  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  на гладкому многовиді називається *функцією Морса*, якщо всі її критичні точки не вироджені.

Відповідно до леми Морса [2], в околі кожної не виродженої критичної точки завжди можна обрати такі локальні координати  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , в яких функція запишеться у вигляді квадратичної форми:  $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$ . Для кожної не виродженої критичної точки число  $\lambda$  визначається однозначно і називається її індексом. Всього існує три типи не вироджених критичних точок функції Морса на двовимірному многовиді: мінімум ( $\lambda = 0$ ), максимум ( $\lambda = 2$ ) і сідлова ( $\lambda = 1$ ).

Надалі введемо кілька позначень:

1.  $f^{-1}(r)$  - прообраз значення  $r$  функції  $f$ ;
2.  $a$  - регулярне значення функції (значення, в прообразі якого немає жодної критичної точки);
3.  $c$  - критичні значення функції (значення, в прообразі яких є хоча б одна критична точка.) ;

Відомо, що функції Морса скрізь щільні в просторі всіх гладких функцій на гладкому многовиді [3]. Це означає, що будь-яку гладку функцію малим ворухінням можна перетворити в функцію Морса, при цьому складні вироджені критичні точки розпадаються в об'єднання деякої кількості морсівських (не вироджених), в результаті критичні точки, що потрапили на один рівень можна розвести на близькі рівні. отже отримана функція Морса матиме на кожному критичному рівні  $c$  лише одну критичну точку. Такі функції будемо називати *простими*. Ті функції, що мають критичні рівні, на яких знаходиться більше однієї критичної точки називатимемо *складними*.

Нехай  $f$  - функція Морса на компактному гладкому многовиді  $M^n$ . Розглянемо довільну поверхню рівня  $f^{-1}(a)$  і її компоненти зв'язності, які назвемо шарами. В результаті многовид розкладається в об'єднання шарів,

отримуємо розшарування з особливостями, причому кожен шар є зв'язним за означенням. Позначаючи кожен шар однією точкою та вводячи природну фактор-топологию в простір  $\Gamma$  шарів, отримуємо деякий фактор-простір. Його можна розглядати як базу цього розшарування. Для функції Морса простір  $\Gamma$  є графом. Граф  $\Gamma$  називається *графом Ріба* для функції Морса  $f$  на многовиді  $X^n$

Відомо, що граф Ріба простої функції Морса на замкненій двовимірній орієнтованій (або відповідно неорієнтованій) поверхні  $M^2$  визначає цю поверхню однозначно з точністю до дифеоморфізму [1].

Нехай  $f$  – функція Морса на поверхні  $M^2$ , а  $g$  – функція Морса на іншій поверхні  $N^2$ . Розглянемо пари  $(M^2, f)$  і  $(N^2, g)$ .

Функції Морса  $f$  і  $g$  на поверхнях  $M^2$  і  $N^2$  відповідно називаються *пошарово-еквівалентними* якщо існує дифеоморфізм  $\gamma : M^2 \rightarrow N^2$ , який переводить зв'язні компоненти ліній рівня функції  $f$  в зв'язні компоненти ліній рівня функції  $g$ . У цьому випадку будемо казати, що пара  $(M^2, f)$  пошарово еквівалентна парі  $(N^2, g)$ . Функції  $f$  і  $g$  називаються *пошарово оснащено - еквівалентними* в околі своїх особливих шарів  $f^{-1}(c)$  і  $g^{-1}(c')$ , якщо існує два додатніх числа  $\varepsilon, \varepsilon'$  і дифеоморфізм  $\lambda : f^{-1}(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \rightarrow g^{-1}(c' - \varepsilon', c' + \varepsilon')$ , що переводить лінії рівнів функції  $f$  в лінії рівнів функції  $g$  і зберігає напрям росту функції, тобто  $\lambda$  переводить область  $(f > c)$  в область  $(g > c')$ .

Слід зауважити, що за умови пошарово-оснащеної еквівалентності, дві зв'язні компоненти однієї з ліній рівня функції  $f$  можуть відображатись в зв'язні компоненти, що лежать на різних лініях рівня функції  $g$ .

*Атомом* називається окіл  $P^2$  критичного шару, що задається нерівністю  $P^2 = \{x \in M^2 | c - \varepsilon \leq f(x) \leq c + \varepsilon\}$  для досить малого  $\varepsilon$ , який розшарований на лінії рівнів функції  $f$  і розглядається з точністю до пошарової еквівалентності. Іншими словами, атом – це клас пошарової еквівалентності функції, заданої на досить малому околі критичного рівня. Атом називається *простим*, якщо функція Морса  $f$  в парі  $(P^2, f)$  – проста. Інші атоми називаються *складними*.

В [1] розглянуто прості функції Морса для двовимірних многовидів, для них існує три типи атомів, що позначаються як  $A, B, \tilde{B}$ .

Розглянемо пару  $(P^2, f)$  де  $P^2$  – зв'язна компактна поверхня з непорожнім краєм  $\partial P^2$ , а  $f$  – функція Морса на ній, що має рівно одне критичне значення  $c$ , причому  $f^{-1}(c - \varepsilon) \cup f^{-1}(c + \varepsilon) = \partial P^2$ . Клас, оснащений по-

шаровою еквівалентністю цієї пари  $(P^2, f)$  буде називатись  $f$ -атомом, або *оснащеним атомом*.

Отже, атомам  $A, B, \tilde{B}$  відповідають п'ять  $f$ -атомів: два типи для атома  $A$  (локальні мінімуми та максимуми), два типи сідлових точок - для атома  $B$  і один для атома  $\tilde{B}$ , що відповідає неорієнтованому випадку.

В даній роботі досліджуються випадки коли функція Морса може мати на одному критичному рівні 4 критичні точки (випадки 2 та 3 критичних точок на одному критичному рівні розглянуто в [1]). Метою роботи є знаходження всіх  $f$ -атомів складності 4 для орієнтованих двовимірних многовидів без межі.

Для переформулювання поняття  $f$ -атома в [5] було введено поняття  $f$ -графа.

Скінченно зв'язний граф  $\Gamma$  назвемо  $f$ -графом, якщо він задовольняє наступним умовам:

1. Всі вершини графа  $\Gamma$  мають степінь 3;
2. Деякі із ребер графа  $\Gamma$  орієнтовані, причому для кожної вершини графа є обов'язково два орієнтованих ребра, одне з яких входить у вершину, а інше з неї виходить, причому ця вершина може бути початком і кінцем одного і того ж орієнтованого ребра у випадку, коли орієнтоване ребро є петлею;
3. Кожному неорієнтованому ребру графа приписане число  $\pm 1$ .

Якщо  $f$ -граф відповідає неорієнтованому  $f$ -атому, тоді він міститиме хоча б одне неорієнтоване ребро з коефіцієнтом  $-1$ . Оскільки в даній роботі досліджуються лише орієнтовані  $f$ -графи, всі неорієнтовні ребра яких мають коефіцієнт  $+1$ , домовимось, що в зображенні графа не будемо маркувати кожне неорієнтоване ребро, вважаючи за промовчуванням, що воно має коефіцієнт  $+1$ .

Будемо називати два  $f$ -графи *еквівалентними*, якщо один із іншого можна отримати послідовністю наступних операцій. Дозволяється замінити орієнтацію усіх ребер якогось циклу і одночасно змінювати мітки на всіх неорієнтованих ребрах, що інцидентні цьому циклу, на протилежні. Якщо обидва кінці неорієнтованого ребра належать даному циклу, то мітка на цьому ребрі не змінюється. Класи еквівалентності  $f$ -графа назвемо  $f$ -інваріантами.

В [1] було доведено, що існує взаємно-однозначна відповідність між  $f$ -інваріантами та  $f$ -атомами.

## 2 *f*-Атоми складності 4

Розглянемо *f*-атоми складності 4, *f*-графи що їм відповідають матимуть по 8 вершин.

Кожний *f*-граф можна побудувати наступною послідовністю дій: візьме-мо набір орієнтованих кіл, що не перетинаються. Виділимо на них довільну парну кількість точок (8 точок для *f*-атомів складності 4), розіб'ємо цю множину на пари довільним чином і з'єднаємо ці пари неорієнтованими від-різками. Отриманий граф, якщо він зв'язний, буде шуканим *f*-графом.

Кожне коло з побудови утворює орієнтований цикл. Довжина цикла до-рівнює кількості вершин на цьому колі. За побудовою, сума довжин всіх циклів дорівнює 8. В процесі дослідження всі отримані графи було поділено на 18 типів за довжинами циклів та їх кількістю (можливості подати 8 як суму додатніх цілих чисел). Кожному із цих типів в таблиці 1 відповідає один стовпець, тобто, наприклад для типу 1 послідовність 2,2,2,1,1 озна-чає, що у відповідному графі існує три цикли довжиною 2 (містять по дві вершини графа) та два цикли довжиною 1.

Для зручності підрахунків спочатку в таблицю записувалась найбільша довжина циклу з набору, а далі довжини тих, що менші або рівні довжині поточного. Варто зазначити, що розглядаються лише зв'язні графи, тому кожен наступний цикл повинен бути зв'язаний хоча б одним неорієнтованим ребром з одним з попередніх циклів.

**Табл. 1** Таблиця типів

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	6	6	7	8
2	2	2	2	3	3	1	2	2	3	4	1	2	3	1	2	1	
2	2	1	2	1	2	1	1	2	1		1	1		1			
1	2	1	1	1		1	1				1						
1		1					1										

Кожному типу графів відповідає певна кількість *f*-графів. Щоб зна-йти цю кількість зафіксуємо кількість циклів та їх довжини, і дослідимо скількома способами можна ці цикли з'єднати так, щоб в результаті кожна вершина мала степінь 3 і граф був зв'язним, крім того потрібно відкидати графи, що можуть бути утворені з допомогою симетрії та поворотів вже існуючих графів. Для знаходження *f*-графів кожного типу та відкидання подібних графів була розроблена програма на мові C++. В результаті роз-

рахунків знайдено 96  $f$ -графів. Кількість  $f$ -графів кожного типу подана в таблиці 2.

**Табл. 2** Кількість графів кожного типу

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	1	3	4	3	1	4	4	6	8	2	7	7	8	8	11	17

Розіб'ємо всі  $f$ -графи на пари таким чином: у кожному графі зробимо перебудову всіх вершин та ребер яким вона належить одним із двох варіантів, що зображені на рис. 1.



**Рис. 1** Перебудова  $f$ -графа

Отже отримаємо пари, що складатимуться з вихідного графа та перебудованого. Зауважимо, що деякі пари будуть складатися з двох однакових графів. Пари графів наведені в таблиці 3

**Табл. 3** Пари  $f$ -графів

1 — 18.15	2 — 11.1	3 — 18.2	4.1 — 14.1	4.2 — 16.3	4.3 — 17.1
5.1 — 17.4	5.2 — 16.7	5.3 — 17.5	5.4 — 11.8	6.1 — 15.6	6.2 — 18.14
7 — 18.1	8.1 — 16.4	8.2 — 17.3	8.3 — 14.3	8.4 — 11.4	9.1 — 18.12
6.3 — 13.2	9.2 — 9.2	9.3 — 18.13	9.4 — 10.6	10.1 — 18.5	10.2 — 15.4
10.3 — 10.3	10.4 — 13.4	10.5 — 18.17	11.2 — 17.11	11.3 — 11.3	11.5 — 11.5
11.6 — 16.8	11.7 — 11.7	12.1 — 17.2	12.2 — 14.5	13.1 — 13.1	13.3 — 18.11
13.5 — 15.1	13.6 — 13.6	13.7 — 18.9	14.2 — 16.1	14.4 — 14.4	14.6 — 14.6
14.7 — 17.7	15.2 — 15.2	15.3 — 18.3	15.5 — 18.4	15.7 — 15.7	15.8 — 18.6
16.2 — 17.10	16.5 — 16.5	16.6 — 16.6	17.6 — 17.6	17.7 — 17.7	17.8 — 17.8
18.7 — 18.7	18.8 — 18.8	18.10 — 18.10	18.16 — 18.16		

**Теорема 1** Для складних функцій Морса на замкнених орієнтованих двовимірних многовидах існує 96  $f$ -атомів складності 4, повний список яких зображено на рис 3–6.

Доведення В [5] зазначалось, що кожному  $f$ -атому однозначно відповідає один  $f$ -інваріант, тобто клас еквівалентності одного  $f$ -графа. Кожен

*f*-граф можна представити у вигляді набору циклів (орієнтованих ребер, початок ребра одного має зівпадати з кінцем ребра наступного) та неорієнтованих ребер. Скористаємось, введеною вище, класифікацією на 18 типів всіх *f*-графів.

Розглянемо випадок 6 типу *f*-інваріанта, йому відповідають цикли довжиною 3, 3, 2. Дослідимо скількома способами можна з'єднати неорієнтованими ребрами ці цикли. Візьмемо цикл довжини 3, його можна з'єднати з циклом довжини 2, або довжини 3. Далі для першого випадку в приєднаного циклу довжини 2 лишається одна вільна вершина до якої прикріпимо цикл довжиною 3, для всіх вільних вершин лишається 2 варіанти розстановок неорієнтованих ребер і їм на рис. 2 відповідають графи з номерами 6.1 та 6.2. В другому випадку до приєднаного циклу приєднаємо цикл довжиною 3 і з'єднаємо вільні вершини неорієнтованими ребрами, всього існує два варіанти яким на рис. 2 відповідають графи з номерами 6.2 та 6.3. Отже, всього існує 3 варіанти *f*-інваріанта 6 типу.

Застосовуючи аналогічні міркування до інших 17 типів можна знайти кількість *f*-інваріантів, що відповідають кожному із 17 типів, що лишились.

**Теорема 2** *Всі  $f$ -атоми розбиваються, згідно таблиці 4, на 58 пар (в парі можуть бути однакові  $f$ -атоми), кожна з яких відповідатиме одному атому складності 4 функції Морса на замкненому орієнтованому двовимірному многовиді.*

*Доведення* Кожен атом складності 4 можна представити у вигляді склейки 4 хрестів (мал.3), за гомеоморфізмами, що попарно ототожнюють місця для слювання (позначені стрілками, що вказують напрям росту функції) кожного з хрестів таким чином, щоб напрям стрілок зберігався. В результаті буде отримано окіл критичного шару, що відповідає певному атому. Прообразом  $f^{-1}(c - \varepsilon)$  та  $f^{-1}(c + \varepsilon)$  для атома, що відповідає критичному рівню  $c$ , буде відповідати пара *f*-графів, що наведені в таблиці 3.

В інший бік. Якщо в довільному *f*-графі для всіх неорієнтованих ребер зробимо перебудову одним із двох варіантів, що зображені на рис. 1. В результаті отримаємо пару *f*-графів, що відповідає одному атому. Змістимо кожне неорієнтоване ребро першого графа з, відповідним йому, неорієнтованим ребром другого графа таким чином, щоб середини ребер зівпадали. Отримана фігура буде відповідати склейці 4 хрестів, що в свою чергу відповідає одному з атомів складності 4.

### 3 Застосування до потоків Морса

Поділимо всі графи на типи, що мають вигляд  $(a, b)$ , де  $a$  та  $b$  є кількостями циклів у кожного графа пари.

Табл. 4 Типи потоків Морса

(1, 1)	18.7, 18.8, 18.10, 18.16
(2, 2)	11.2, 11.3, 11.5, 11.6, 11.7, 14.2, 14.4, 14.6, 14.7, 16.1, 16.2, 16.5, 16.6, 16.8, 17.6, 17.7, 17.8, 17.9, 17.10, 7.11;
(3, 1)	6.2, 9.1, 9.3, 10.1, 10.5, 13.3, 13.7, 15.3, 15.5, 15.8
(1, 3)	18.3, 18.4, 18.5, 18.6, 18.9, 18.12, 18.13, 18.14, 18.15, 18.17
(3, 3)	6.1, 6.3, 9.2, 9.4, 10.2, 10.3, 10.4, 10.6, 13.1, 13.2, 13.4, 13.5, 13.6, 15.1, 15.2, 15.4, 15.6, 15.7
(4, 2)	2, 4.1, 4.2, 4.3, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 12.1, 12.2
(2, 4)	11.1, 11.4, 11.8, 14.1, 14.3, 14.5, 16.3, 16.4, 16.7, 17.1, 17.2, 17.3, 17.4, 17.5
(5, 1)	1, 3, 7
(1, 5)	18.1, 18.2, 18.15

Потік (векторне поле  $X$ ) називається *поток*ом (полем) Морса якщо множина неблукаючих точок  $\omega(X)$  є скінченною множиною точок, кожна з яких є гіперболічною, стійкі та не стійкі многовиди цих точок перетинаються трансверсально. Поток (векторні поля) називаються *топологічно еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм многовидів, що вображає траєкторії одного потоку в траєкторії іншого, зберігаючи напрямок руху за траєкторіями.

За кожним потоком Морса на орієнтованій поверхні однозначно будується  $f$ -граф: орієнтовані кола є межею регулярних околів витоків з індукованою рієнтацією, а неорієнтовані відрізки – відрізки стійких многовидів сідлових точок в доповненні до цих околів. З точністю до топологічної еквівалентності  $f$ -граф задає потік Морса на замкненій поверхні [1].

Отже, справедливий такий

**Наслідок 1** На  $F_2$  існує 4 топологічно не еквівалентних потоки Морса типу  $(1, 1)$ .

На  $T^2$  існує 20 топологічно не еквівалентних потоків Морса типу  $(2, 2)$ , 10 типу  $(3, 1)$  та 10 типу  $(1, 3)$ ;

На  $S^2$  існує 18 топологічно не еквівалентних потоків Морса типу типу  $(3, 3)$ , 14 типу  $(4, 2)$ ; 14 типу  $(2, 4)$ , 3 типу  $(5, 1)$  та 3 типу  $(1, 5)$ . (номери всіх  $f$ -атомів кожного типу наведені в таблиці 4)

На рис. 2– 5, зображено по одному представнику з кожного  $f$ -інваріанта. (номер біля графа має вигляд  $(a, i)$ ,  $i \in [0, b_a]$ , де  $a$  є номером типу, а  $b_a$  – кількість  $f$ -інваріантів типу  $a$ ).



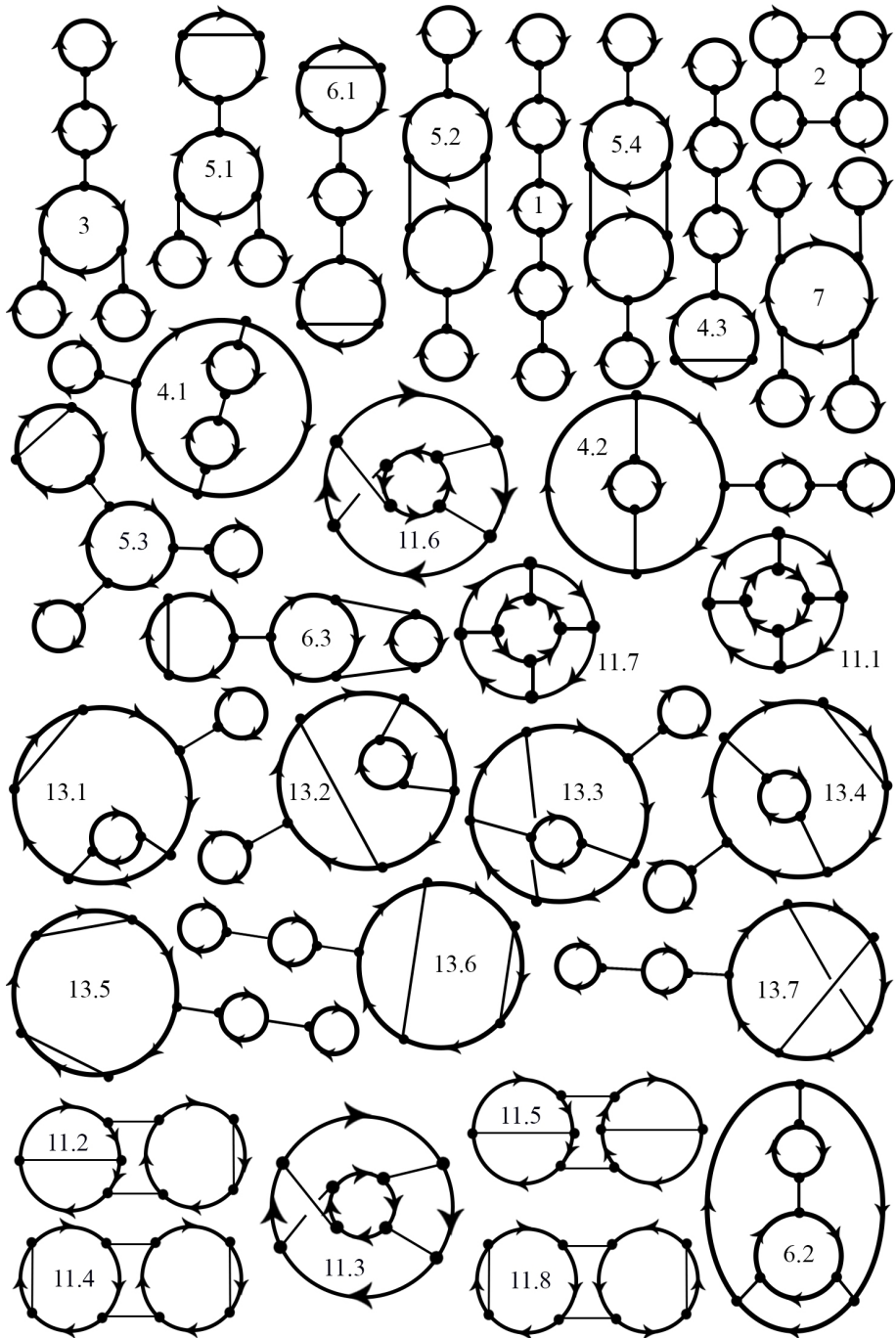


Рис. 2 Графи 1-7, 11 та 13 типів

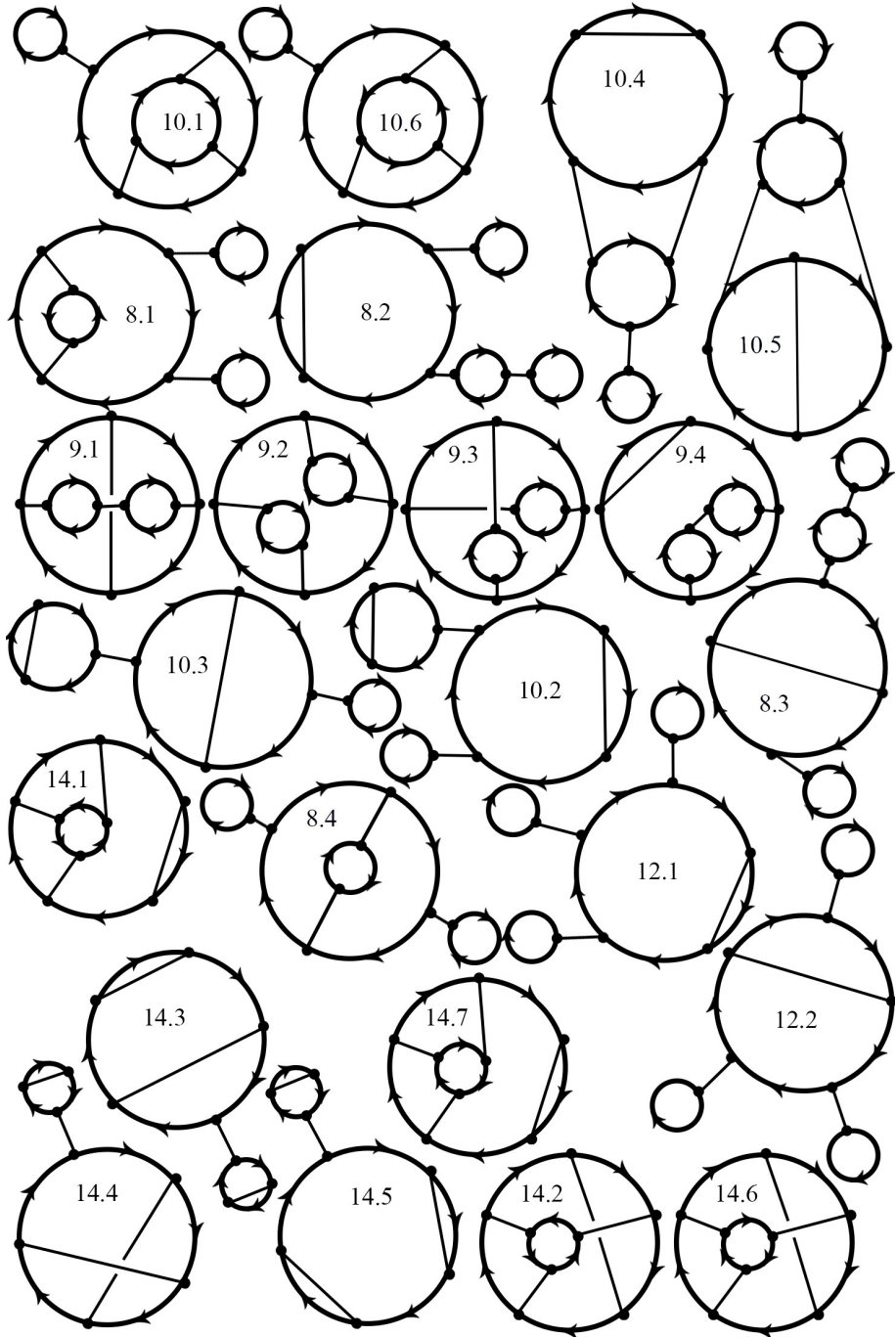


Рис. 3 Графи 8-10, 12 та 14 типів

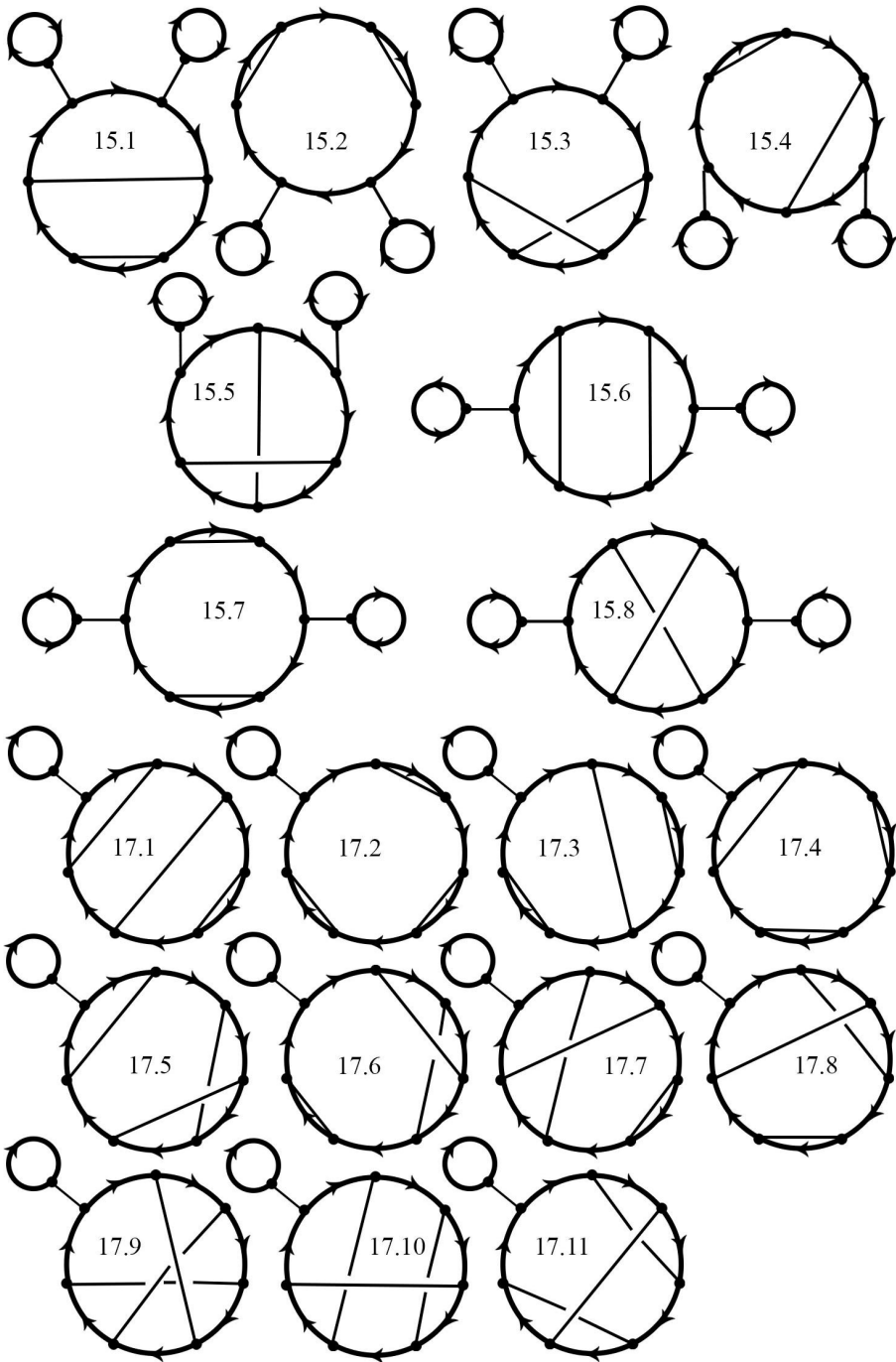


Рис. 4 Графи 15 та 17 типів

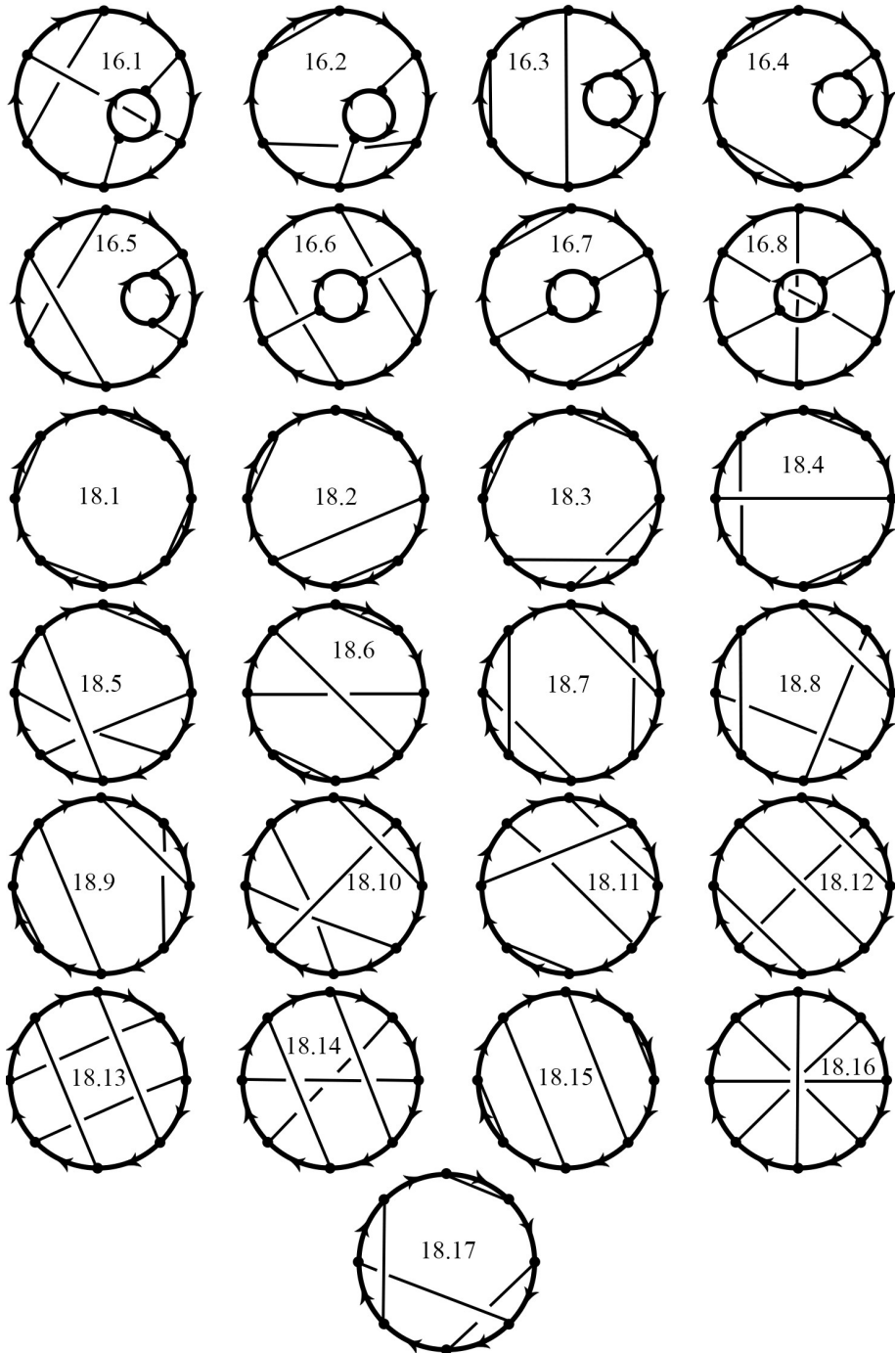


Рис. 5 Графи 16 та 18 типів

## Висновок

В даній роботі знайдено всі (96) *f*-атоми складності 4 функцій Морса на замкнених орієнтованих двовимірних многовидах, що відповідають 58 атомам, про існування яких, було зазначено в [1]. Вони описують структуру потоків Морса з 4 сідловими точками на орієнтованих поверхнях.

Отримані в роботі результати можуть бути використані під час досліджень інтегрованих за Ліувілем гамільтонових систем.

Знайдений список орієнтованих *f*-атомів складності 4 може бути використаний для знаходження всіх неорієнтованих *f*-атомів складності 4.

Також, отриманий список (крім атомів, що містять цикли довжини 2), разом зі списками атомів з [1] меншої складності, може бути використаний для описання структури околів критичних рівней функцій з виродженими ізольованими критичними точками на поверхнях з межею.

Отже, невіршеним є такі проблеми:

- 1) отримати класифікацію рівней функцій Морса складності 4 на неорієнтованих поверхнях;
- 2) отримати класифікацію *m*-функцій складності не більше 4;
- 3) отримати класифікацію функцій з ізольованими критичними точками на поверхнях з межею складності не більше 4.

## Література

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы, Иж.:Удмуртский университет. 1999, т.1, с 74-75.
2. Y. Matsumoto. An Introduction to Morse Theory, American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monography, volume 208, (2002), p.18.
3. Милнор Дж. Теория Морса. М.:МИР,1971.
4. Матвеев С.В., Фоменко А.Т., Шарко В.В. Круглые функции Морса и изоэнергетические интегрируемых гамильтоновых систем. Матем. сборник, 1998, т. 135(177), №3, с.3325-345.
5. Ошемков А.А. Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на  $SO(4)$ . УМН, 1990, т.42, вып. 2, с. 199-200.
6. О.Іванюк, О.Пришляк, Атоми складності 2 на поверхнях з краєм. Proc. Intern. Geom. Center, Vol.6, No.3, 2013.- с.40-53.
7. А.О.Prishlyak. Equivalence of Morse function on 3-manifolds Methods of Func. Ann. and Topology, v.5, No.3,1999.- p. 49-53.
8. Е.В.Кулинич, А.О.Пришляк. О графах как критических уровнях функций на поверхности Некот. вопросы совр. мат. Т.25., К.: Ин-т матем. НАНУ, 1998.-с.102-108

**О. О. Пришляк**

КНУ ім. Т.Г. Шевченка, Київ, Україна

prishlyak@yahoo.com,

**Aleksandr O. Prishlyak, Dmytro M. Skochko**

## **$F$ -atoms of 4 Morse functions on two-dimensional closed oriented manifolds**

In this paper we investigated and found all  $f$ -atoms of 4, Morse functions on two-dimensional closed oriented manifolds.

Надійшла до редколегії

12.04.2015