Proc. Intern. Geom. Center 2016 **9**(1) 51–64 $d\omega$

ONAFT Open Access

CC BY

Голоморфно-проективні перетворення та конформно-келерові многовиди

Є. В. Черевко

Анотація Розглянуто голоморфно-проективні відображення та можливість їх існування на локально конформно-келерових многовидах. Отримана система рівнянь типу Коши, що є визачальною для групи конформно голоморфно-проективних інфінітезимальних перетворень.

Ключові слова Локально конформно-келеровий многовид · Похідна Лі · голоморфно-проективне перетворення

УДК 514.763.45

1 Вступ

Об'єктом долідження в цій статті є локально конформно-келерові многовиди такі, що $dim(M) = n = 2m > 2$. Конформно-келеровим многовидам присвячені роботи багатьох дослідників. Локально конформно-келерові многовиди розглядались [13], [2], [8]. Голоморфно-проективні відображення многовидів вивчались у, [5], [10]. Велика увага питанням інфінітезимальних голоморфно-проективних перетворень стосовно комплексних многовидів вивчались[14]. Метою цієї роботи є дослідженя проблеми голоморфно-проективних перетворень локально конформно-келерових многовидів.

2 ЛКК-многовиди

Спочатку, дамо декілька необхідних означень.

Означення 1 *Майже комплексною структурою J називають такий афінор J^i_j, що:*

$$J^i_\alpha J^\alpha_j = -\delta^i_j \tag{1}$$

Тут δ^i_j - символ Кронекера.

Означення 2 *Многовид, на якому задано майже комплексну структуру J, називають майже комплексним многовидом.*

Означення 3 *Майже комплексний многовид є майже ермітовим, якщо на ньому задана ермітова метрика:*

$$J^\alpha_i J^\beta_j g_{\alpha\beta} = g_{ij} \tag{2}$$

Майже ермітовий многовид позначаємо $\{M_n, J, g\}$.

Означення 4 *Майже ермітовий многовид $\{M_n, J, g\}$ є ермітовим, якщо майже комплексна структура є интегровною, [14].*

Зауважимо, якщо майже комплексна структура J та многовид M_n будуть належати класу C^ω, достатньою умовою интегровності майже комплексної структури є тотожна рівність нулю тензора Нейєнхейса:

$$N^k_{ij} = J^\alpha_i \left(\partial_j J^k_\alpha - \partial_\alpha J^k_j\right) - J^\alpha_j \left(\partial_i J^k_\alpha - \partial_\alpha J^k_i\right) = 0, \tag{3}$$

або, що еквівалентно

$$J^k_{i,j} = J^\alpha_i J^\beta_j J^k_{\alpha,\beta}. \tag{4}$$

Комою ми позначаємо коваріантну похідну в зв'язності, узгодженій з римановою метрикою g_{ij}.

Якщо до того ж, на ермітовому многовиді $\{M_n, J, g\}$ має місце

$$J^k_{i,j} = 0, \tag{5}$$

то воно є *келеровим.*

Означення 5 *Ермітовий многовид M_n, має назву* локально конформно-келерового *(коротше, ЛКК-)* многовидом*, якщо існує відкрите покриття $\mathfrak{U} = \left\{U_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ многовиду M та система $\Sigma = \{\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in A}$ гладких функцій таких, що $\left\{J|_{U_\alpha}, \hat{g}_\alpha = e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\right\}$ – келерова структура для будь якого $\alpha \in A$. Перехід від метрики $g|_{U_\alpha}$ до метрики $e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}$ має назву* локально конформного перетворення структури*. Функція σ має назву* визначальною функцією *конформного перетворення[2].*

Відомо, що на ЛКК-многовиді, форма Лі(Lee form), компоненти якої визначаються формулою [2]:

$$\omega = \frac{1}{m-1}\delta\Omega \circ J \quad \text{або} \quad \omega_i = -\frac{2}{n-2}J^{\alpha}_{\beta,\alpha}J^{\beta}_{i}, \tag{6}$$

має бути замкненою:

$$d\omega = 0.$$

Коваріантна похідна майже комплексної структури у зв'язності Леві-Чівіта на ЛКК-многовиді виражена формулою:

$$J^k_{i,j} = \frac{1}{2}\big(\delta^k_j J^{\alpha}_i \omega_{\alpha} - \omega^k J_{ij} - J^k_j \omega_i + J^k_{\alpha}\omega^{\alpha} g_{ij}\big). \tag{7}$$

3 Голоморфно-проективні відображення

В майже комплексному просторі M^{2m} зв'язність на головному розшаруванні реперів $E^c(M^{2m})$ має назву *майже комплексної зв'язності*, або, коротше, *J-зв'язністю*, *F-зв'язністю.* Доведено, що коваріантна похідна майже комплексної структури у цій зв'язності дорівнює нулю [4, с. 180]:

$$\nabla_i J = 0$$

На будь-якому комплексному многовиді з довільною афіною зв'язністю $\dot{\Gamma}$ можна задати зв'язність $\ddot{\Gamma}$, яка буде J-зв'язністю :

$$\ddot{\Gamma}^h_{ij} = \dot{\Gamma}^h_{ij} - \frac{1}{2}J^h_r \dot{\nabla}_i J^r_j.$$

Зауважимо, що ця зв'язність не є єдиною, і у загальному випадку, не є симетричною. Існує, наприклад, [9] так звана, *напівсиметрична J-зв'язність*, тобто така, що

$$\Phi_1 \Phi_3 S^h_{ij} = 0,$$

де S^h_{ij} – тензор крутіння J-зв'язності, а Φ_1 та Φ_3 – оператори Обати, що діють на довільний тензор Q^h_{ij} таким чином:

$$\Phi_1 Q^h_{ij} = \frac{1}{2}(\delta^b_j \delta^h_a - J^b_j J^h_a)Q^a_{ib}; \qquad \Phi_3 Q^h_{ij} = \frac{1}{2}(\delta^a_i \delta^b_j - J^a_i J^b_j)Q^h_{ab}.$$

Крива L простору M^{2m} в якому існує напівсиметрична майже комплексна зв'язність, що є заданою параметричними рівняннями $x^i = x^i(t)$, та відповідає диференціальним рівнянням [14, с. 258]:

$$\frac{d^2x^h}{dt^2} + \Gamma^h_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \alpha(t)\frac{dx^h}{dt} + \beta(t)J^h_i \frac{dx^i}{dt}, \tag{8}$$

де $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – деякі функції, а Γ^h_{jk} – коефіцієнти майже комплексної зв'язності, має назву *аналітично-планарної*, або, *голоморфно-планарної* кривої.

Означення 6 *Дифеоморфізм* $f : M^{2m} \longrightarrow \acute{M}^{2m}$ *зветься* голоморфно-проективним відображенням, *якщо у результаті дії* f *усі голоморфно-планарні криві* M^{2m} *переходять у голоморфно-планарноі криві* $\acute{M}^{2m}$.

Фактично, голоморфно-проективне відображення – це співвідповідність двох напівсиметричних майже комплексних зв'язностей. Якщо вони є симетричними, то:

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \delta^k_i \psi_j + \delta^k_j \psi_i - \psi_t J^t_i J^k_j - \psi_t J^t_j J^k_i$$

Стосовно ермітових многовидів, до яких відносяться і досліджувані ЛКК-многовиди, відомо, що інтегровність майже комплексної структури гарантує існування симетричної J-зв'язності. Зокрема, такою J-звязністю на ЛКК-многовидах є певна звязність Вейля:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}\omega(X)Y - \frac{1}{2}\omega(Y)X + \frac{1}{2}g(X,Y)B$$

Зрозуміло, що в цьому сенсі можливе існування голоморфно-планарних кривих на ЛКК-многовидах, і голоморфно-проективні відображення ЛКК-многовидів є фактично локально голоморфно-проективними відображеннями келерових многовидів. У [11] голоморфно-проективні відображення ЛКК-многовидів розглянуто з точки зору узагальнення таким чином, що голоморфно-проективними відображеннями вважаються такі дифеоморфізми, які зберігають не тількі комплексну структуру J^j_i, а також, її коваріантну похідну $\nabla_k J^j_i$. Автори довели, що такі нетривіальні відображення є неможливими для многовидів дійсної розмірності $n > 2$. Також, у роботі [3], доведено, що власні представники не тільки класу W_4 (ЛКК-многовиди), а і $W_1 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_4$, та $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ – також не дозволяють нетривіальних голоморфно-проективних відображень. В свою чергу, у роботі [6] запропоновано інший підхід. Автори пропонують підхід, який полягає у наступному. Розглядається дифеоморфізм $f : (H^n, g, J) \longrightarrow (\bar{H}^n, \bar{g}, J)$, який є дифеоморфізмом між двома ЛКК-многовидами (H^n, g, J) та $(\bar{H}^n, \bar{g}, J)$, причому, f – це композиція дифеоморфізмів $f = f_3 \circ f_2 \circ f$, таких, що:

1. $f_1 : (H^n, g, J) \longrightarrow ({}^1\mathcal{K}^n, {}^1 g, J)$ – конформне відображення, ${}^1 g$ – келерова метрика.
2. $f_2 : ({}^1\mathcal{K}^n, {}^1 g, J) \longrightarrow ({}^2\mathcal{K}^n, {}^2 g, J)$ – голоморфно-проективне відображення між двома келеровими структурами, ${}^2 g$ – келерова метрика.
3. $f_3 : ({}^2\mathcal{K}^n, {}^2 g, J) \longrightarrow (\bar{H}^n, \bar{g}, J)$ – конформне відображення, $\bar{g}$ – ЛКК-метрика.

Такий дифеоморфізм має назву *конформно-голоморфно-проективного відображення.* Зазначимо, що згідно з [7], множина конформно-голоморфно-проективних відображень не має групової структури.

4 Інфінітезимальні голоморфно-проективні перетворення

Означення 7 *Перетворення многовиду M_n*

$$\overline{x}^h = x^h + \epsilon \xi^h(x^1, x^2, \ldots, x^n), \tag{9}$$

де ϵ – довільний малий параметр незалежний від x^i має назву інфінітезимального перетворення *многовиду M_n. Вектор $\xi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ має назву* генератора перетворення.

Похідна Лі(Lie derivative) тензора $\mathfrak{L}_\xi T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ типу (p, q) уздовж векторного поля ξ в координатах має вигляд:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\xi T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q, s} \xi^s + T^{i_1 \ldots i_p}_{k j_2 \ldots j_q} \xi^k{}_{,j_1} + \ldots + T^{i_1 \ldots i_p}_{k j_k \ldots j_q} \xi^k{}_{,j_1} - \\ - T^{l i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \xi^{i_1}{}_{,l} - T^{i_1 i_2 \ldots l}_{j_1 \ldots j_q} \xi^{i_p}{}_{,l}. \end{aligned} \tag{10}$$

Нехай на майже комплексному многовиді M^n, на якому задано напівсиметричну J-зв'язність, існує векторне поле ξ, таке, що інфінітезимальне перетворення (9) для малих значень ϵ відображує будь-яку аналітично-планарну криву у аналітично-планарну криву. Тоді, перетворення (9) матиме назву *інфінітезимального голоморфно-проективного перетворення.* Враховуючи (8), маємо [14, с. 267]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\xi \Big(\frac{d^2 x^h}{dt^2} + \varGamma^h_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} - \alpha(t) \frac{dx^h}{dt} - \beta(t) J^h_i \frac{dx^i}{dt} \Big) \\ = \gamma(t) \frac{dx^h}{dt} + \delta(t) J^h_i \frac{dx^i}{dt} \end{aligned} \tag{11}$$

уздовж будь-якої аналітично-планарної кривої, де $\gamma(t)$ та $\delta(t)$ – деякі функції параметру t. Похідна Лі об'єкту зв'язності, у такому випадку, матиме вигляд:

$$\mathfrak{L}_\xi \varGamma^h_{ij} = \rho_j \delta^h_i + \rho_i \delta^h_j - \rho_t J^t_i J^h_j - \rho_t J^t_j J^h_i + \theta_j \delta^h_i + \theta_t J^t_i J^h_j, \tag{12}$$

де ρ та θ – є певними ковекторними полями. Вектор ξ має назву *H-проективного вектору.* Якщо ж J-зв'язність є симетричною, то (12) прийме вигляд [12]:

$$\mathfrak{L}_\xi \varGamma^h_{ij} = \rho_j \delta^h_i + \rho_i \delta^h_j - \rho_t J^t_i J^h_j - \rho_t J^t_j J^h_i. \tag{13}$$

Кажуть, що ковектор ρ є *асоційованим ковектором* до вектору ξ. Крім симетричності J-зв'язності, вимагатимемо збереження при перетвореннях майже комплексної структури, а саме

$$\mathfrak{L}_\xi J^i_j = \xi^k \partial_k J^i_j - J^\alpha_j \partial_\alpha \xi^i + J^i_\alpha \partial_j \xi^\alpha = 0.$$

Оскільки ми розглядатемо лише симетричні J-зв'язності, частинні похідні можна замінити коваріантними у будь якій симетричній зв'язності:

$$\mathfrak{L}_\xi J^i_j = \xi^k \nabla_k J^i_j - J^\alpha_j \nabla_\alpha \xi^i + J^i_\alpha \nabla_j \xi^\alpha = 0. \tag{14}$$

Виникає питання, чи можливі нетривіальні інфінітезимальні перетворення ЛКК-многовидів, на яких похідна Лі зв'язності Леві-Чівіта подана виразом (12). Як ми надалі побачимо, відповідь на це питання є негативною. Знайдемо похідну Лі коваріантної похідної комплексної структури J, користуючись тотожністю [14, с. 159] , що є вірною для будь-яких інфінітезимальних перетворень:

$$\mathfrak{L}_\xi J^h_{i,j} - \left(\mathfrak{L}_\xi J^h_i\right)_{,j} = J^\beta_i \mathfrak{L}_\xi \Gamma^h_{j\beta} - J^h_\beta \mathfrak{L}_\xi \Gamma^\beta_{ji}. \tag{15}$$

Оскільки, векторне поле ξ є контраваріантним аналітичним, і тому $\mathfrak{L}_\xi J^k_i = 0$, маємо:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\xi J^h_{i,j} = J^\beta_i \left(\rho_j \delta^h_\beta + \rho_\beta \delta^h_j - \rho_t J^t_\beta J^h_j - \rho_t J^t_j J^h_\beta\right) \\ -J^h_\beta \left(\rho_j \delta^\beta_i + \rho_i \delta^\beta_j - \rho_t J^t_i J^\beta_j - \rho_t J^t_j J^\beta_i\right) = \rho_j J^h_i + J^\beta_i \rho_\beta \delta^h_j \\ +\rho_i J^h_j + \rho_t J^t_j \delta^h_i - \rho_j J^h_i - \rho_i J^h_j - \rho_t J^t_i \delta^h_j - \rho_t J^t_j \delta^h_i \equiv 0. \end{aligned} \tag{16}$$

З іншого боку, у комплексних координатах (z^κ) на ермітових многовидах, зокрема, є справедливим [14, с. 65]:

$$J^\kappa_{\hat\lambda,\mu} = -2\sqrt{-1}\Gamma^\kappa_{\hat\lambda\mu}$$

Отже,

$$\mathfrak{L}_\xi J^\kappa_{\hat\lambda,\mu} = -2\sqrt{-1}\mathfrak{L}_\xi \Gamma^\kappa_{\hat\lambda\mu}.$$

Зауважимо, що останню рівність можна отримати безпосередньо з (15). Враховуючи (16), маємо, що

$$\mathfrak{L}_\xi \Gamma^\kappa_{\hat\lambda\mu} = 0. \tag{17}$$

Відомо, що на ермітових многовидах для зв'язності Леві-Чівіта [14, с. 65]

$$\Gamma^\kappa_{\hat\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\hat\rho}\left(\partial_{\hat\lambda} g_{\mu\hat\rho} - \partial_{\hat\rho} g_{\mu\hat\lambda}\right).$$

Для ЛКК-многовиду це матиме вигляд:

$$\Gamma^{\kappa}_{\hat{\lambda}\mu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\hat{\rho}} \big(\omega_{\hat{\lambda}} g_{\mu\hat{\rho}} - \omega_{\hat{\rho}} g_{\mu\hat{\lambda}}\big) = \frac{1}{2} \big(\omega_{\hat{\lambda}} \delta^{\kappa}_{\mu} - \omega^{\kappa} g_{\mu\hat{\lambda}}\big).$$

Внаслідок (16), $\mathfrak{L}_{\xi}\omega_{\mu} = \mathfrak{L}_{\xi}\omega_{\hat{\lambda}} = 0$, отже, з (17) отримуємо:

$$\mathfrak{L}_{\xi}\Gamma^{\kappa}_{\hat{\lambda}\mu} = \frac{1}{2}\big(-\mathfrak{L}_{\xi}(\omega^{\kappa}) g_{\mu\hat{\lambda}} - \omega^{\kappa}\mathfrak{L}_{\xi}(g_{\mu\hat{\lambda}})\big) = 0 \tag{18}$$

Враховуючи, що (18) виконується і для комплексно-спряжених виразів, згортаючи з $(\omega_{\kappa}, \omega_{\hat{\kappa}})$, з (18) випливає:

$$-(\omega_{\kappa}\mathfrak{L}_{\xi}(\omega^{\kappa}) + \omega_{\hat{\kappa}}\mathfrak{L}_{\xi}(\omega^{\hat{\kappa}}))g_{\mu\hat{\lambda}} - ||\omega||^2 \mathfrak{L}_{\xi}(g_{\mu\hat{\lambda}}) = 0,$$

або,

$$\mathfrak{L}_{\xi}(||\omega||^2) g_{\mu\hat{\lambda}} + ||\omega||^2 \mathfrak{L}_{\xi}(g_{\mu\hat{\lambda}}) = 0.$$

Оскільки, на ЛКК-многовидах, $||\omega||^2 \neq 0$, можливі два випадки. У першому, якщо $\mathfrak{L}_{\xi}(||\omega||^2) = 0$, необхідно щоб $\mathfrak{L}_{\xi}(g_{\mu\hat{\lambda}}) = 0$, тобто перетворення буде ізометрію. У другому, коли $\mathfrak{L}_{\xi}(||\omega||^2) \neq 0$, перетворення буде інфінітезимальним конформним. Але, для форми Лі, у випадку інфінітезимальних конформних перетворень

$$\mathfrak{L}_{\xi}\omega_i = \varphi_i,$$

де φ_i – асоційований ковектор конформного пертворення, а для перетворень, що викликають деформацію зв'язності вигляду

$$\mathfrak{L}_{\xi}\Gamma^h_{ij} = \rho_j\delta^h_i + \rho_i\delta^h_j - \rho_t J^t_i J^h_j - \rho_t J^t_j J^h_i,$$

внаслідок (16) та означення форми Лі

$$\mathfrak{L}_{\xi}\omega_i = 0,$$

отримуємо, що $\varphi_i = 0$, а це, означає, що таке перетворення є гомотетією, тобто, знову, тривіальним. Таким чином, доведено теорему

Теорема 1 *ЛКК-многовид M^n, не дозволяє існування нетривіальних інфінітезимальних перетворень із збереженням комплексної структури та її коваріантної похідної, зокрема таких, що*

$$\mathfrak{L}_{\xi}\Gamma^h_{ij} = \rho_j\delta^h_i + \rho_i\delta^h_j - \rho_t J^t_i J^h_j - \rho_t J^t_j J^h_i.$$

5 Інфінітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення

Нехай, на деякому околі ЛКК-многовиду існує кєлерова метрика $\hat{g}_{ij} = g_{ij}e^{-2\sigma}$ і векторне поле ξ^i, що генерує голоморфно-проективні перетворення. Позначимо:

$$\xi_i = \xi^\alpha g_{\alpha i}; \quad \hat{\xi}_i = \xi^\alpha \hat{g}_{\alpha i} = \xi_i e^{-2\sigma}.$$

Коваріантну похідну в у зв'язності $\hat{\varGamma}^k_{ij}$, узгодженій з метрикою $\hat{g}$, ми будемо позначати вертикальною рискою ", а у зв'язності $\varGamma^k_{ij}$, узгодженій з метрикою ЛКК-многовиду g, позначимо, як зазвичай, комою. Тоді центральне рівняння інфенітезімальних перетворень

$$\xi_{i|jk} = \xi_\alpha \hat{R}^\alpha_{kji} + \hat{g}_{hi}\mathfrak{L}_\xi \hat{\varGamma}^h_{jk},$$

враховуючи (13), матиме вигляд:

$$\hat{\xi}_{i|jk} = \hat{\xi}_\alpha \hat{R}^\alpha_{kji} + \rho_j \hat{g}_{ik} + \rho_k \hat{g}_{ij} - \rho_t J^t_j \hat{J}_{ik} - \rho_t J^t_k \hat{J}_{ji}. \tag{19}$$

Тут $\hat{J}_{ik} = \hat{g}_{sk}J^s_i$. Коваріантне диференціювання за x^j дає

$$\hat{\xi}_{i|j} = \big(\xi_{i,j} - \frac{1}{2}\xi_i\omega_j + \frac{1}{2}\xi_j\omega_i\big)e^{-2\sigma} - \frac{1}{2}\omega^\alpha\xi_\alpha\hat{g}_{ij}.$$

Далі, коваріантно диференцюємо за x^k:

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_{i|jk} = e^{-2\sigma}\big(\xi_{i,jk} + \xi_\alpha\big(\frac{1}{4}\omega_k\big(\delta^\alpha_j\omega_i - \delta^\alpha_i\omega_j\big) - \frac{1}{4}\omega^\alpha\big(\omega_i g_{jk} - \omega_j g_{ik}\big)+ \\ +\frac{1}{2}\big(\omega^\alpha{}_{,j}g_{ik} - \omega^\alpha{}_{,i}g_{jk}\big) + \frac{1}{2}\big(\delta^\alpha_j\omega_{i,k} - \delta^\alpha_i\omega_{j,k}\big) \\ +\frac{1}{4}||\omega||^2\big(\delta^\alpha_i g_{jk} - \delta^\alpha_j g_{ik}\big)\big)- \\ -\frac{1}{2}\big(\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k}g_{ij} + \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j}g_{ik} - \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i}g_{jk}\big)\big),\end{aligned} \tag{20}$$

де $||\omega||^2 = \omega_i\omega_j g^{ij}$. Крім того, тензор кривини $\hat{R}$ зв'язності $\hat{\varGamma}^k_{ij}$, узгодженій з метрикою $\hat{g}$ пов'язаний з тензором кривини ЛКК-многовиду таким чином:

$$\begin{aligned}\hat{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_j\big(\frac{1}{2}\omega_{i,k} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_k - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ik}\big)- \\ -\delta^h_k\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big)+ \\ +\big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,j} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_j\big)g_{ik} - \big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,k} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_k\big)g_{ij},\end{aligned} \tag{21}$$

Підставивши (20) та (21) у (19), отримуємо для ЛКК-многовиду :

$$e^{-2\sigma}\xi_{i,jk} = e^{-2\sigma}\big(\xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}\big(\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k}g_{ij} + \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j}g_{ik} - \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i}g_{jk}\big) \\ +\rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} + \rho_t J^t_j J_{ik} + \rho_t J^t_k J_{ji}\big),$$

враховуючи, що $\hat{J}_{ik} = e^{-2\sigma}J_{ik}$. Оскільки, $e^{-2\sigma} \neq 0$, остаточно маємо:

$$\xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}\big(\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k}g_{ij} + \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j}g_{ik} - \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i}g_{jk}\big) \\ +\rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} - \rho_t J^t_j J_{ik} - \rho_t J^t_k J_{ji}. \tag{22}$$

Рівняння (22) визначає на ЛКК-многовиді (M^n, g, J) *конформно-голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення.* Ми отримали, що для конформно-голоморфно-проективних інфінітезимальних перетворень похідна Лі об'єкту зв'язності Леві-Чівіта матиме вигляд:

$$\mathfrak{L}_\xi \mathit{\Gamma}^h_{ij} = \frac{1}{2}\big(\delta^h_j\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i} + \delta^h_i\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j} - g^{hr}\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,r}g_{ij}\big) \\ +\rho_j\delta^h_i + \rho_i\delta^h_j - \rho_t J^t_i J^h_j - \rho_t J^t_j J^h_i. \tag{23}$$

Існує тотожність [15, с. 16], яка стосовно метричного тензору g, приймає вигляд

$$\nabla_k \mathfrak{L}_\xi g_{ij} - \mathfrak{L}_\xi \nabla_k g_{ij} = g_{is}\mathfrak{L}_\xi \mathit{\Gamma}^s_{kj} + g_{sj}\mathfrak{L}_\xi \mathit{\Gamma}^s_{ki}. \tag{24}$$

Враховуючи, що у випадку зв'язності Леві-Чівіта $\nabla_k g_{ij} = 0$, та (24), матимемо:

$$\nabla_k \mathfrak{L}_\xi g_{ij} = \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k}g_{ij} + 2\rho_k g_{ij} + \rho_j g_{ki} + \rho_i g_{jk} - \rho_t J^t_j J_{ki} - \rho_t J^t_i J_{kj}. \tag{25}$$

Далі, згідно [15, с. 17], для зв'язності Леві-Чівіта

$$\mathfrak{L}_\xi R^h_{ijk} = \nabla_j \mathfrak{L}_\xi \mathit{\Gamma}^h_{ik} - \nabla_k \mathfrak{L}_\xi \mathit{\Gamma}^h_{ij}. \tag{26}$$

Підставивши (23) у (26), отримуємо

$$\mathfrak{L}_\xi R^h_{ijk} = \frac{1}{2}\big(\delta^h_k\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,ij} - g^{hr}\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,rj}g_{ik} - \delta^h_j\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,ik} \\ +g^{hr}\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,rk}g_{ij}\big) + \rho_{i,j}\delta^h_k - \rho_{i,k}\delta^h_j - \rho_{t,j}J^t_i J^h_k - \rho_t J^t_{i,j}J^h_k \\ -\rho_t J^t_i J^h_{k,j} - \rho_{t,j}J^t_k J^h_i - \rho_t J^t_{k,j}J^h_i - \rho_t J^t_k J^h_{i,j} + \rho_{t,k}J^t_i J^h_j + \rho_t J^t_{i,k}J^h_j \\ +\rho_t J^t_i J^h_{j,k} + \rho_{t,k}J^t_j J^h_i + \rho_t J^t_{j,k}J^h_i + \rho_t J^t_j J^h_{i,k}. \tag{27}$$

Підставивши (22), та (7), тобто явний вираз для коваріантної похідної майже комплексної структури ЛКК-многовиду у зв'язності Леві-Чівіта, у (27), та згорнувши за індексами h та k, ми отримуємо:

$$\begin{aligned}\rho_{i,j} = \frac{1}{2}\omega^t\rho_t g_{ij} - \frac{1}{2}\rho_i\omega_j - \frac{1}{2}\rho_j\omega_i + \frac{1}{n+2}\big(R_{ij,t}\xi^t + R_{tj}\xi^t{}_{,i} \\ +R_{it}\xi^t{}_{,j} - \frac{n-2}{2}\big(\omega_{i,js}\xi^s - \frac{1}{2}\omega_{i,t}\omega_j\xi^t - \frac{1}{2}\omega_{j,t}\omega_i\xi^t\big) \\ +\big(\frac{n-2}{2}\omega_{s,t}\omega^s\xi^t - \frac{\Delta_2\omega_{,t}}{2}\xi^t\big)g_{ij} \\ -\frac{n-2}{2}\big(\omega_{i,t}\xi^t{}_{,j} + \omega_{j,t}\xi^t{}_{,i} + \omega_i\omega_t\xi^t{}_{,j} + \omega_j\omega_t\xi^t{}_{,i}\big) \\ +\frac{1}{2}\big(\frac{n-2}{2}||\omega||^2 - \Delta_2\omega\big)\big(\xi_{i,j} + \xi_{j,i}\big)\big).\end{aligned} \tag{28}$$

Ми тут також, врахували, що для ЛКК-многовидів є справедливим

$$\begin{aligned}J^h_{j,k} - J^h_{j,k} = \frac{1}{4}\big(\delta^h_j\omega_k J^s_i\omega_s - \delta^h_k\omega_j J^s_i\omega_s - \delta^h_j||\omega||^2 J_{ik} + \delta^h_k||\omega||^2 J_{ij} \\ +\omega^h\omega_j J_{ik} - \omega^h\omega_k J_{ij} + J^h_k\omega_i\omega_j - J^h_j\omega_i\omega_k - J^h_k||\omega||^2 g_{ij} \\ +J^h_j||\omega||^2 g_{ik} + J^h_s\omega^s\omega_k g_{ij} - J^h_s\omega^s\omega_j g_{ik}\big) + \frac{1}{2}\big(\delta^h_j J^t_i\omega_{t,k} - \delta^h_k J^t_i\omega_{t,j} \\ -\omega^h{}_{,k}J_{ij} + \omega^h{}_{,j}J_{ik} - J^h_j\omega_{i,k} + J^h_k\omega_{i,j} + J^h_t\omega^t{}_{,k}g_{ij} - J^h_t\omega^t{}_{,j}g_{ik}\big) \\ = J^h_t R^t_{ijk} - J^t_i R^h_{tjk},\end{aligned}$$

а також аналітичність контравріантного вектору ξ, що є представленою рівнянням (14). Якщо ми згадаємо вираз для обчислення похідної Лі довільного тензора (10), то бачимо, що (28) можна записати коротше:

$$\begin{aligned}\rho_{i,j} = \frac{1}{2}\omega^t\rho_t g_{ij} - \frac{1}{2}\rho_i\omega_j - \frac{1}{2}\rho_j\omega_i \\ +\frac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi\big(R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{i,j} + \frac{\omega_i\omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{ij}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\big)\end{aligned} \tag{29}$$

Таким чином, ми можемо записати систему рівнянь, які на ЛКК-многовиді (M^n, J, g) визначають конформно-голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення із збереженням комплексної структури:

$$
\begin{aligned}
1)\xi_{i,j} &= \xi_{ij};\\
2)\rho, i &= \rho_i;\\
3)\xi_{i,jk} &= \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}\big(\left(\omega_\alpha\xi^\alpha\right)_{,k} g_{ij} + \left(\omega_\alpha\xi^\alpha\right)_{,j} g_{ik} - \left(\omega_\alpha\xi^\alpha\right)_{,i} g_{jk}\big)\\
&\quad + \rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} - \rho_t J^t_j J_{ik} - \rho_t J^t_k J_{ji};\\
4)\rho_{i,j} &= \frac{1}{2}\omega^t\rho_t g_{ij} - \frac{1}{2}\rho_i\omega_j - \frac{1}{2}\rho_j\omega_i + \frac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi\big(R_{ij}\\
&\quad - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{i,j} + \frac{\omega_i\omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{ij}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\big);\\
5)\mathfrak{L}_\xi J^i_j &= \xi^k\nabla_k J^i_j - J^\alpha_j\nabla_\alpha\xi^i + J^i_\alpha\nabla_j\xi^\alpha = 0
\end{aligned}
$$

Зауважимо, що рівняння (29) у певних частинних випадках матиме трохи простіший вигляд. Наприклад, на многовидах Вайсмана(узагальнених многовидах Хопфа) воно виглядає як

$$
\begin{aligned}
\rho_{i,j} &= \frac{1}{2}\omega^t\rho_t g_{ij} - \frac{1}{2}\rho_i\omega_j - \frac{1}{2}\rho_j\omega_i\\
+\frac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi\big(R_{ij} &- \frac{(n-2)}{4}\left(\omega_i\omega_j - ||\omega||^2 g_{ij}\right)\big).
\end{aligned}
$$

У випадку псевдовайсманових многовидів, це рівняння запишемо так:

$$
\begin{aligned}
\rho_{i,j} &= \frac{1}{2}\omega^t\rho_t g_{ij} - \frac{1}{2}\rho_i\omega_j - \frac{1}{2}\rho_j\omega_i\\
+\frac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi\big(R_{ij} &- \frac{(n-2)}{4}\left(\omega_i\omega_j + n||\omega||^2 g_{ij}\right)\big).
\end{aligned}
$$

6 Тензор Нейєнхейса та форма Лі при конформно голоморфно-проективних інфінітезимальних перетвореннях

Знайдемо похідну Лі тензора Нейєнхейса:

$$N^h_{ij} = J^\alpha_i\left(J^h_{\alpha,j} - J^h_{j,\alpha}\right) - J^\alpha_j\left(J^h_{\alpha,i} - J^h_{i,\alpha}\right) = 0.$$

Якщо ми вимагаємо сбереження комплексної структури, похідна Лі тензора Нейенхейса має вигляд:

$$\mathfrak{L}_\xi N^h_{ij} = J^\alpha_i\left(\mathfrak{L}_\xi J^h_{\alpha,j} - \mathfrak{L}_\xi J^h_{j,\alpha}\right) - J^\alpha_j\left(\mathfrak{L}_\xi J^k_{\alpha,i} - \mathfrak{L}_\xi J^h_{i,\alpha}\right). \tag{30}$$

внаслідок (14).

Внаслідок вимоги зберігання комплексної структури (14)), а також, і (23), підставивши у (15), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi J^h_{i,j} = J^t_i\Big(\frac{1}{2}\big(\delta^h_j\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,t} + \delta^h_t\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j} - g^{hr}\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,r}g_{tj}\big)\\ +\rho_j\delta^h_t + \rho_t\delta^h_j - \rho_s J^s_i J^h_j - \rho_s J^s_j J^h_t\Big)\\ -J^h_t\Big(\frac{1}{2}\big(\delta^t_j\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i} + \delta^t_i\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j} - g^{tr}\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,r}g_{ij}\big)\\ +\rho_j\delta^t_i + \rho_i\delta^t_j - \rho_s J^s_i J^t_j - \rho_s J^s_j J^t_i\Big) =\\ = \frac{1}{2}\left(\delta^h_j J^\alpha_i\varphi_\alpha - \varphi^h J_{ij} - J^h_j\varphi_i + J^k_\alpha\varphi^\alpha g_{ij}\right),\end{aligned} \tag{31}$$

де $\varphi_i = \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i}$. Обчислимо похідну Лі тензора Нейєнхейса уздовж векторного поля ξ, враховуючи (31):

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi N^k_{ij} = J^\alpha_i\left(\mathfrak{L}_\xi J^k_{\alpha,j} - \mathfrak{L}_\xi J^k_{j,\alpha}\right) - J^\alpha_j\left(\mathfrak{L}_\xi J^k_{\alpha,i} - \mathfrak{L}_\xi J^k_{i,\alpha}\right) =\\ = \frac{1}{2}J^\alpha_i\big(\delta^k_j J^\beta_\alpha\varphi_\beta - \varphi^k J_{\alpha j} - J^k_j\varphi_\alpha + J^k_\beta\varphi^\beta g_{\alpha j} -\\ -\delta^k_\alpha J^\beta_j\varphi_\beta + \varphi^k J_{j\alpha} + J^k_\alpha\varphi_j - J^k_\beta\varphi^\beta g_{j\alpha}\big) -\\ -\frac{1}{2}J^\alpha_j\big(\delta^k_i J^\beta_\alpha\varphi_\beta - \varphi^k J_{\alpha i} - J^k_i\varphi_\alpha + J^k_\beta\varphi^\beta g_{\alpha i} -\\ -\delta^k_\alpha J^\beta_i\varphi_\beta + \varphi^k J_{i\alpha} + J^k_\alpha\varphi_i - J^k_\beta\varphi^\beta g_{i\alpha}\big).\end{aligned} \tag{32}$$

Розкриваючи дужки та зводячи подібні у (32), отримуємо, що похідна Лі тензора Нейєнхейса тотожно дорівнює нулю:

$$\mathfrak{L}_\xi N^k_{ij} = 0.$$

Враховуючи той факт, що будь-які інфінітезимальні перетворення зберігають замкненість форми Лі, отримуємо наступне твердження.

Теорема 2 *При інфінітезимальних конформно-голоморфно-проективних перетвореннях ЛКК-многовидів, що зберігають комплексну структуру, тензор Нейєнхейса також зберігається.*

Тепер знайдемо похідну Лі форми Лі. Враховуючи (14), отримуємо з (6):

$$\mathfrak{L}_\xi\omega_i = -\frac{2}{n-2}\mathfrak{L}_\xi\big(J^\alpha_{\beta,\alpha}J^\beta_i\big) = -\frac{2}{n-2}\mathfrak{L}_\xi\big(J^\alpha_{\beta,\alpha}\big)J^\beta_i. \tag{33}$$

З іншого боку, оскільки операція диференціювання Лі є переставним із згорткою, маємо з (32), згортаючи індекси k та j:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi J^\alpha_{i,\alpha} = \frac{1}{2}\left(nJ^\beta_i\varphi_\beta - \varphi^\alpha J_{i\alpha} - J^\alpha_\alpha\varphi_i + J^\alpha_\beta\varphi^\beta g_{i\alpha}\right) =\\ = \frac{1}{2}\left(nJ^\beta_i\varphi_\beta - \varphi^\alpha J_{i\alpha} + J_{\beta i}\varphi^\beta\right) =\\ = \frac{1}{2}\left(nJ^\beta_i\varphi_\beta - \varphi^\alpha J_{i\alpha} - J_{i\beta}\varphi^\beta\right) = \frac{n-2}{2}J^\beta_i\varphi_\beta.\end{aligned} \tag{34}$$

Підставимо (34) в (33). Отримуємо:

$$\mathfrak{L}_\xi \omega_i = -\frac{2}{n-2} \cdot \frac{n-2}{2} J_\gamma^\beta \varphi_\beta J_i^\gamma = \varphi_i = \left(\omega_\alpha \xi^\alpha\right)_{,i}.$$

Ця рівність виконується тривіально на ЛКК-многовидах внаслідок того, що на них форма Лі є замкненою: $d\omega = 0$.

7 Гомотетії та конформно голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення

Розглянемо (28). Ми бачимо, що у випадку $\omega_\alpha \xi^\alpha = 0$, або, навіть $\omega_\alpha \xi^\alpha = \mathrm{const}$, ця формула прийме вигляд

$$\mathfrak{L}_\xi \Gamma_{ij}^h = \rho_j \delta_i^h + \rho_i \delta_j^h - \rho_t J_i^t J_j^h - \rho_t J_j^t J_i^h.$$

Згідно з Теоремою 1, в такому випадку векторне поле ξ генеруватиме гомотетію, або ізометрію. З іншого боку відомо, що комутатор векторних полів $[\xi, \eta]$ буде всюди дотичним до гіперповерхні, якщо до неї всюди дотичні поля ξ та η[1, с. 201] – один з варіантів формулювання відомої теореми Фробеніуса. Звідси випливає теорема.

Теорема 3 *Якщо на ЛКК-многовиді $\{M_n, J, g\}$, $n = 2m$ алгебра Лі інфінітезимальних конформно голоморфно-проективних векторних полів ξ, містить таку підалгебру векторних полів, що всюди $\omega_\alpha \xi^\alpha = 0$, і таким чином, всюди дотичних до сімейства гіперповерхонь, що відповідають рівнянню $\omega = 0$, то така підалгебра генеруватиме підгруппу гомотетій цього ЛКК-многовиду. Ці гіперповерхні будуть орбітами цієї підгрупи.*

Література

1. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.*Современная геометрия: методы и приложения / *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко*- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 760 с.
2. *Кириченко В. Ф.* Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия / *В. Ф. Кириченко* // Матем. сб.–1992. Т. 51, №5. –С. 57—66.
3. *Кириченко В. Ф., Никифорова А. В.* О голоморфно-проективных преобразованиях почти эрмитовых структур / *В. Ф. Кириченко*// УМН, 56:6(342) (2001), с.149–150
4. *Лихнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономии / *А. Лихнерович*– М., ИЛ, 1960, –216с.
5. *Микеш Й.* Голоморфно-проективные отображения и их обобщения /*Й. Микеш*// Геометрия – 3, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 30, ВИНИТИ, М., 2002, 258–289
6. *Mikeš J., Chuda H., Hinterleitner I* Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition. /*J. Mikeš* // – International Journal of Geometric Methods in Modern Physics Vol. 11, No. 5, 2014 8 p.

7. Chudˇa H., Shina. M. Conformal holomorphically projective mappings. /*H. Chudˇa* // Miskolc Mathematical Notes, Vol. 14 – 2013, No. 2, pp. 569–574
8. *Dragomir S., Ornea L.* Locally conformal Kähler geometry /*S. Dragomir* –Boston ; Basel ; Berlin: Birkhäuser – 1998, 328p
9. *Ishihara S.* Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold./*S. Ishihara*- Tohoku Math. J. (2) 9 (1957), no. 3, pp. 273-297.
10. *Mikeš J. at al.* Differential geometry of special mappings. /*J. Mikeš* – Olomouc: Palacky University, 2015, 566 p.
11. *Radulovich Zh., Mikeš J.* Geodesic and holomorphically-projective mappings of conformally-Kählerian spaces /*Zh. Radulovich* // Opava: Silesian Univ. Math. Publ. 1 – 1993 c. 151-156.
12. *Tachibana S. Ishihara S.* On infinitesimal holomorphically projective transformations in kahlerian manifolds./*S. Tachibana S. Ishihara*- Tohoku Math. J. (2) 12 (1960), no. 1, 77–101.
13. *Vaisman I.* On locally conformai almost Kähler manifolds /*I. Vaisman* // Israel J. Math. – 1976 №24 C. 338-351.
14. *Yano K.* Differential geometry on complex and almost complex spaces /*K. Yano*–New York: Pergamon Press Book – 1965, 326p.
15. *Yano K.* The Theory Of Lie Derivatives And Its Applications /*K. Yano*–Amsterdam: North Holland Publishing Company – 1957, 321p.

Є. В. Черевко

Одеський національний економичний університет, Одеса, Україна.

E-mail: cherevko@usa.com

Yevhen Cherevko

Holomorphically projective transformations and locally conformal Kaehler manifolds

In the article we study conformal holomorphically projective transformations of locally conformal Kaehler manifolds. Also we obtain a system of partial differential equations which determined the transformations.

Надійшла до редколегії 20.1.2016