Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 9, no. 2 (2016) pp. 49–62

О 4-квазипланарных отображениях полукватернионных келеровых многообразий

И. Н. Курбатова

Abstract. Earlier we introduces a concept of a semi-quaternion structure on a manifold with affine connection generated by a couple of almost complex structures. We also investigated 4-quasiplanar mappings of spaces with semi-quaternion structures under various conditions of differential character. In the present article we continue study of 4-quasiplanar mappings of semi-quaternion Kählerian spaces. Geometrical objects being invariant under the considered mappings are constructed. The class of the semi-quaternion Kählerian spaces admiting a 4-quasiplanar mapping on a flat space (4-quasiplane) is allocated. Their tensor sign is received. It is proved that any 4-quasiplane semi-quaternion Kählerian space admits non-trivial 4-quasiplanar mappings (it is an analog of the theorem of Beltrami in the theory of geodetic mappings of Riemannian spaces). It is shown that the 4-quasiplane semi-quaternion Kählerian space represents a direct product of two Kählerian spaces of constant holomorphic curvature.

Аннотация. Ранее мы ввели в рассмотрение понятие полукватернионной структуры на пространстве аффинной связности, порожденной парой почти комплексных структур, коммутирующих друг с другом. Мы также исследовали 4-квазипланарные отображения пространств аффинной связности с полукватернионными структурами при различных условиях дифференциального характера. В настоящей статье продолжается изучение 4-квазипланарных отображений полукватернионных келеровых пространств. Строятся геометрические объекты, инвариантные относительно рассматриваемых отображений. Выделен класс полукватернионных келеровых пространств (4-квазиплоские), допускающих 4-квазипланарное отображение на плоское пространство. Получен их тензорный признак. Доказано, что любое 4-квазиплоское полукватернионное келерово пространтво допускает нетривиальные 4-квазипланарные отображения (это аналог теоремы Бельтрами в теории геодезических отображений римановых пространств). Показано, что 4-квазиплоское полукватернионное келерово пространство представляет собой прямое произведение двух келеровых пространств постоянной голоморфной кривизны.

Ключевые слова: Риманово пространство, кватернионная структура, келерова структура

УДК 517.764

1. Введение

В современной дифференциальной геометрии интенсивно развивается теория диффеоморфизмов многообразий с аффинорными структурами различных типов.

В настоящей статье продолжается начатое нами в [4], [5], [6] изучение 4-квазипланарных отображений (4КПО) псевдо-римановых пространств с полукватернионной структурой.

Исследования носят локальный характер и проводятся в классе достаточно гладких функций.

Напомним, что *полукватернионной* [6] называется структура, которая порождается парой почти комплексных структур [3], коммутирующих между собой. Соответственно, *почти полукватернионным* называется псевдо-риманово пространство V_n с заданными на нем почти комплексными структурами $\overset{1}{F}$ и $\overset{2}{F}$, которые наряду с

$$\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{1}{F}{}^{h}_{\alpha} = -\delta^h_i, \qquad \overset{2}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{2}{F}{}^{h}_{\alpha} = -\delta^h_i \tag{1.1}$$

удовлетворяют условиям

$$\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{2}{F}{}^{h}_{\alpha} = \overset{2}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{1}{F}{}^{h}_{\alpha}. \tag{1.2}$$

Отсюда следует, что тензор

$$\overset{3}{F}{}^{h}_{i} = \overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{2}{F}{}^{h}_{\alpha},$$

определяет на V_n структуру почти произведения [7]

$$\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{3}{F}{}^{h}_{\alpha} = \delta^h_i. \tag{1.3}$$

Связь между $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, $\overset{3}{F}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{2}{F}{}^{h}_{\alpha} &= \overset{2}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{1}{F}{}^{h}_{\alpha} = \overset{3}{F}{}^{h}_{i},\\
\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{3}{F}{}^{h}_{\alpha} &= \overset{3}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{2}{F}{}^{h}_{\alpha} = -\overset{1}{F}{}^{h}_{i},\\
\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{1}{F}{}^{h}_{\alpha} &= \overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{3}{F}{}^{h}_{\alpha} = -\overset{2}{F}{}^{h}_{i}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Мы полагаем, что аффиноры $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, на V_n определяют почти эрмитову структуру [3], то есть

$$\overset{1}{F}_{ij} = -\overset{1}{F}_{ji}, \qquad \overset{2}{F}_{ij} = -\overset{2}{F}_{ji}, \qquad \overset{1}{F}_{ij} = g_{i\alpha}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{j}, \qquad \overset{2}{F}_{ij} = g_{i\alpha}\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{j}. \tag{1.5}$$

Из (1.4) следует, что

$$\overset{3}{F}_{ij} = \overset{3}{F}_{ji}, \qquad \overset{3}{F}_{ij} = g_{i\alpha}\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{j}. \tag{1.6}$$

Как обычно, под *келеровой* структурой будем понимать полукватернионную структуру на V_n, для которой

$$\overset{s}{F}{}^{h}_{i,j} = 0, \quad s = 1,2,3.$$

Здесь $<,>$ — знак ковариантной производной в V_n.

Рассмотрим (псевдо-)римановы пространства (V_n, g_{ij}) и $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$ с полукватернионными келеровыми структурами $\overset{s}{F}$, $\overset{s}{\overline{F}}$, $s = 1,2,3$, находящиеся в 4КПО, сохраняющем структуру. Тогда в общей по отображению системе координат (x^i) при условиях (1.1)-(1.6) имеют место соотношения

$$\overline{\Gamma}{}^{h}_{ij}(x) = \Gamma^{h}_{ij}(x) + \sum_{s=0}^{3} \overset{s}{q}_{(i}(x)\overset{s}{F}{}^{h}_{j)}(x), \tag{1.7}$$

где

$$\overset{\circ}{F}{}^{h}_{i} = \delta^{h}_{i}, \qquad \overset{3}{F}{}^{h}_{i} = \overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{2}{F}{}^{h}_{\alpha}, \qquad \overset{s}{F}{}^{h}_{i}(x) = \overset{s}{\overline{F}}{}^{h}_{i}(x),$$

$$\overset{s}{F}{}^{h}_{i,j} = 0, \qquad \overset{s}{F}{}^{h}_{i|j} = 0, \quad s = 1,2,3, \tag{1.8}$$

где $\overset{s}{q}_{i}(x)$ — некоторые ковекторы; $(\cdot,\cdot)$ означает операцию симметрирования по соответствующим индексам; $<,>$, $<|>$ — знаки ковариантной производной в V_n и $\overline{V}_n$, соответственно.

Назовем 4-*квазипланарной* линией кривую L полукватернионного пространства $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$, заданную в параметрической форме

$$x^h = x^h(t), \quad h = 1,2,\dots n,$$

вдоль которой функции $\lambda^h = \frac{dx^h}{dt}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \Gamma^{h}_{\alpha\beta}(x)\lambda^{\alpha}(t)\lambda^{\beta}(t) = \lambda^{\alpha}\sum_{s=0}^{3}\overset{s}{a}(t)\overset{s}{F}{}^{h}_{\alpha},$$

где $\overset{s}{a}(t)$ — некоторые функции параметра t.

Эти кривые представляют собой аналог геодезических линий пространств аффинной связности и аналитически планарных кривых почти комплексных многообразий [7], [2].

Покажем, что образом каждой геодезической в $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$ при 4КПО является 4-квазипланарная кривая в $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overset{s}{\overline{F}})$.

Если L — геодезическая в V_n с параметрическими уравнениями

$$x^h = x^h(t), \quad h = 1, 2, \dots n,$$

то вдоль нее $\lambda^h = \frac{dx^h}{dt}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}(x)\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t) = \rho(t)\lambda^h(t).$$

В общей по 4КПО системе координат (x^i) кривая $\overline{L}$ пространства $\overline{V}_n$, являющаяся образом кривой L, определяется теми же параметрическими уравнениями $x^h = x^h(t)$, $h = 1, 2, \dots n$, а соответствующие точки этих кривых имеют одинаковые значения параметра t. При этом если в дифференциальные уравнения геодезической L подставить $\Gamma^h_{\alpha\beta}$ из (1.7), то они примут вид

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \overline{\Gamma}^h_{\alpha\beta}(x)\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t) = \lambda^\alpha \sum_{s=0}^{3} \overset{s}{a}(t)\overset{s}{F}{}^h_\alpha,$$

то есть $\overline{L}$ будет 4-квазипланарной в $\overline{V}_n$.

Аналогично проверяется, что аналитически планарные и 4-квазипланарные кривые V_n при 4КПО также переходят в 4-квазипланарные линии $\overline{V}_n$.

В [6] мы показали, что из зависимости между ковариантными производными $\overset{s}{F}$ в V_n и $\overline{V}_n$ с учетом (1.1)-(1.8) следует, что

$$\overset{\circ}{q}_i = \overset{1}{q}_\alpha \overset{1}{F}{}^\alpha_i = \overset{2}{q}_\alpha \overset{2}{F}{}^\alpha_i = \overset{3}{q}_\alpha \overset{3}{F}{}^\alpha_i \tag{1.9}$$

при $\overset{3}{F}{}^\alpha_\alpha \neq \pm n$.

Отметим, что $\overset{3}{F}{}^\alpha_\alpha = \pm n$ соответствует $\overset{3}{F}{}^h_i = \pm\delta^h_i$ и, следовательно, $\overset{1}{F}{}^h_i = \pm\overset{2}{F}{}^h_i$, то есть в этом случае полукватернионная келерова структура вырождается в классическую келерову [3].

2. Свойства полукватернионных келеровых пространств

2.1. Ввиду ковариантного постоянства структурных аффиноров в полукватернионном келеровом пространстве $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F}{}^h_i)$ имеют место равенства:

$$\overset{s}{F}{}^h_{i,[kl]} = 0,$$

откуда с учетом тождества Риччи и (1.1)-(1.5) получаются свойства тензоров Римана и Риччи:

$$R_{\alpha ijk}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{h} = -R_{h\alpha jk}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}, \qquad R_{\alpha i}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{h} = -R_{h\alpha}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}, \tag{2.10}$$

$$R_{\alpha ijk}\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{h} = -R_{h\alpha jk}\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{i}, \qquad R_{\alpha i}\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{h} = -R_{h\alpha}\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{i}, \tag{2.11}$$

$$R_{\alpha ijk}\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{h} = R_{h\alpha jk}\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{i}, \qquad R_{\alpha i}\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{h} = R_{h\alpha}\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{i}. \tag{2.12}$$

2.2. Поскольку $\overset{3}{F}{}^{h}_{i,j} = 0$, аффинорная структура $\overset{3}{F}{}^{h}_{i}$ интегрируема [7], так что в рассматриваемой окрестности можно выбрать систему координат, называемую *адаптированной* (к аффинору), в которой $\overset{3}{F}{}^{h}_{i}$ приводится к виду:

$$(\overset{3}{F}{}^{h}_{i}) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

то есть

$$\overset{3}{F}{}^{a}_{b} = \delta^{a}_{b}, \qquad \overset{3}{F}{}^{A}_{B} = \delta^{A}_{B}, \qquad \overset{3}{F}{}^{A}_{b} = \overset{3}{F}{}^{a}_{B} = 0, \tag{2.14}$$

для $a, b = 1, 2, \ldots, m$, $A, B = m+1, m+2, \ldots, n$.

В частности,

$$\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{\alpha} = 2m - n. \tag{2.15}$$

В [6] мы доказали, что келерово полукватернионное пространство $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F}{}^{h}_{i})$ приводимо, и формулы (1.4)-(1.6), записанные в адаптированной к $\overset{3}{F}{}^{h}_{i}$ системе координат, дают нам

$$g_{ab} = g_{ab}(x^c), \qquad g_{AB} = g_{AB}(x^C), \qquad g_{aB}(x) = 0, \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} &\overset{1}{F}{}^{a}_{B} = \overset{1}{F}{}^{A}_{b} = 0, && \overset{2}{F}{}^{a}_{B} = \overset{2}{F}{}^{A}_{b} = 0, \\ &\overset{2}{F}{}^{a}_{b} = -\overset{1}{F}{}^{a}_{b} = F^{a}_{b}, && \overset{2}{F}{}^{A}_{B} = \overset{1}{F}{}^{A}_{B} = F^{A}_{B}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

причем

$$F^{a}_{c}F^{c}_{b} = -\delta^{a}_{b}, \qquad g_{ac}F^{c}_{b} = -g_{bc}F^{c}_{a}, \qquad F^{a}_{b,c} = 0,$$
$$F^{A}_{C}F^{C}_{B} = -\delta^{A}_{B}, \qquad g_{AC}F^{C}_{B} = -g_{BC}F^{C}_{A}, \qquad F^{A}_{B,C} = 0.$$

Это означает, что полукватернионное келерово пространство V_n представляет собой прямое произведение $V_n = V_m \times V_{n-m}$, где пространство $(V_m(x^a), g_{ab}(x^c))$ является обычным келеровым относительно аффинора $\overset{1}{F}{}^{a}_{b}(x^c)$, а пространство $(V_{n-m}(x^A), g_{AB}(x^C))$, соответственно, обычным келеровым относительно аффинора $\overset{1}{F}{}^{B}_{A}(x^C)$.

3. Геометрические объекты, инвариантные относительно 4КПО полукватернионных келеровых пространств

3.1. Рассмотрим полукватернионные келеровы пространства

$$(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F}), \qquad (\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overset{s}{\overline{F}}), \qquad s = 1, 2, 3,$$

находящиеся в 4КПО, сохраняющем структуру. При этом полагаем, что наряду с (1.1)-(1.6) в $\overline{V}_n$ выполняются аналогичные (1.5), (1.6) равенства

$$\overset{1}{\overline{F}}_{ij} = -\overset{1}{\overline{F}}_{ji}, \qquad \overset{2}{\overline{F}}_{ij} = -\overset{2}{\overline{F}}_{ji},$$

$$\overset{1}{\overline{F}}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{j}, \qquad \overset{2}{\overline{F}}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha}\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{j},$$

$$\overset{3}{\overline{F}}_{ij} = \overset{3}{\overline{F}}_{ji}, \qquad \overset{3}{\overline{F}}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha}\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{j}.$$

Свертывание основных уравнений 4КПО (1.7) по индексам i, j с учетом (1.4), (1.9) дает нам

$$2(m+2)\overset{\circ}{q}_i = \overline{\Gamma}^{\alpha}_{i\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{i\alpha}. \tag{3.18}$$

Отсюда следует, что вектор $\overset{\circ}{q}_i$ градиентен.

Далее, ввиду (3.18) уравнения (1.7) можно представить в форме

$$\overline{T}^h_{ij} = T^h_{ij},$$

где

$$T^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \frac{1}{2(m+2)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}Q^{\beta h}_{ij}, \tag{3.19}$$

$$Q^{kh}_{ij} = \delta^k_i\delta^h_j - \overset{1}{F}{}^k_i\overset{1}{F}{}^h_j - \overset{2}{F}{}^k_i\overset{2}{F}{}^h_j + \overset{3}{F}{}^k_i\overset{3}{F}{}^h_j. \tag{3.20}$$

Аналогично записываются компоненты $\overline{T}^h_{ij}$ в $\overline{V}_n$.

3.2. На основании (1.7) зависимость между компонентами тензоров Римана полукватернионных келеровых пространств

$$(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F}), \qquad (\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overset{s}{F}),$$

находящихся в 4КПО, имеет вид:

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + q_{\alpha[j}Q^{(h\alpha)}_{k]i}, \tag{3.21}$$

где

$$q_{ij} = \overset{\circ}{q}_{i,j} - \overset{\circ}{q}_{\alpha}\overset{\circ}{q}_{\beta}Q^{\alpha\beta}_{ij}, \tag{3.22}$$

$[\cdot,\cdot]$ обозначено альтернирование по соответствующим индексам.

Из градиентности $\overset{\circ}{q}_i$ очевидно, что $q_{ij} = q_{ji}$.

Свертывание (3.21) по индексам h, k дает нам

$$\overline{R}_{ij} = R_{ij} + (n+4)q_{ij} - 2q_{\alpha\beta}Q^{\alpha\beta}_{ij} + (2m-n)q_{\alpha i}\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{j}. \tag{3.23}$$

Отсюда с учетом градиентности $\overset{\circ}{q}_i$ находим, что

$$q_{\alpha i}\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{j} = q_{\alpha j}\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{i}$$

и, следовательно,

$$q_{\alpha\beta}\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{3}{F}{}^{\beta}_{j} = q_{ij}, \qquad q_{\alpha\beta}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{1}{F}{}^{\beta}_{j} = q_{\alpha\beta}\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{2}{F}{}^{\beta}_{j}. \tag{3.24}$$

Теперь (3.23) принимают вид

$$\overline{R}_{ij} = R_{ij} + nq_{ij} + 4q_{\alpha\beta}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{1}{F}{}^{\beta}_{j} + (2m-n)q_{\alpha i}\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{j}. \tag{3.25}$$

Вычитая из (3.25) результат их свертывания с $\overset{1}{F}{}^{i}_{k}\overset{1}{F}{}^{j}_{l}$ по индексам i, j, получим

$$(n-4)\Big(q_{ij} - q_{\alpha\beta}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{1}{F}{}^{\beta}_{j}\Big) + (2m-n)\Big(q_{\alpha j}\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{i} + q_{\alpha\beta}\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{1}{F}{}^{\beta}_{j}\Big) = 0.$$

Аналогично, складывая (3.25), свернутые с $\overset{3}{F}{}^{i}_{k}$ по индексу i, с результатом свертывания (3.25) с $\overset{2}{F}{}^{i}_{k}\overset{1}{F}{}^{j}_{l}$ по индексам i, j, имеем

$$(2m-n)\Big(q_{ij} - q_{\alpha\beta}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{1}{F}{}^{\beta}_{j}\Big) + (n-4)\Big(q_{\alpha j}\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{i} + q_{\alpha\beta}\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{1}{F}{}^{\beta}_{j}\Big) = 0.$$

Из двух последних равенств, соответственно, находим

$$q_{ij} = q_{\alpha\beta}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{1}{F}{}^{\beta}_{j}, \qquad q_{\alpha j}\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{i} = -q_{\alpha\beta}\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{1}{F}{}^{\beta}_{j}, \tag{3.26}$$

при $m \neq 2, n-m \neq 2$.

Наконец, (3.25) с учетом (3.26) дают нам

$$\big(\overline{R}_{\alpha j} - R_{\alpha j}\big)\Big((n+4)\delta^{\alpha}_{i} - (2m-n)\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{i}\Big) = 4(m+2)(n-m+2)q_{ij}.$$

На основании полученных соотношений (3.21) можно представить в форме

$$\overline{T}{}^{h}_{ijk} = T^{h}_{ijk},$$

где

$$T^{h}_{ijk} = R^{h}_{ijk} - \widetilde{R}_{\alpha[j}Q^{h\alpha}_{k]i} - 2\widetilde{R}_{\alpha k}\Big(\overset{1}{F}{}^{h}_{i}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{j} - \overset{2}{F}{}^{h}_{i}\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{j}\Big), \tag{3.27}$$

$$\widetilde{R}_{ij} = \frac{1}{4(m+2)(n-m+2)}R_{\alpha j}\Big((n+4)\delta^{\alpha}_{i} - (2m-n)\overset{3}{F}{}^{\alpha}_{i}\Big) \tag{3.28}$$

при $m \neq 2, n-m \neq 2$.

Аналогичным образом представляются в $\overline{V}_n$ компоненты $\overline{T}^h_{ijk}$.

Нами доказана

Теорема 3.3. *Геометрические объекты* (3.19) *и* (3.27) *инвариантны относительно* 4*КПО полукватернионных келеровых пространств.*

Объект (3.19) носит нетензорный характер и является аналогом известных параметров Томаса в теории геодезических отображений римановых пространств [7].

Его сохранение необходимо и достаточно для того, чтобы отображение между полукватернионными келеровыми пространствами было 4-квазипланарным.

Объект (3.27) — аналог тензора Вейля в теории геодезических отображений [7] и тензора голоморфно-проективной кривизны в теории HP-отображений келеровых пространств [1].

Сохранение объекта (3.27) — лишь необходимое условие для того, чтобы рассматриваемое отображение было 4-квазипланарным.

4. 4-квазиплоские полукватернионные келеровы пространства.

4.1. Будем называть полукватернионные келеровы пространства, допускающие 4КПО на плоское пространство, 4-*квазиплоскими.* Рассмотрим 4КПО полукватернионного келерова пространства $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$ на плоское $\overline{V}_n = E_n$. Тогда из $\overline{R}^h_{ijk} = 0$ следует $\overline{T}^h_{ijk} = T^h_{ijk} = 0$ и, значит, (3.27) принимают вид:

$$R^h_{ijk} = \widetilde{R}_{\alpha[j} Q^{h\alpha}_{k]i} + 2\widetilde{R}_{\alpha k}\Big(\overset{1}{F}{}^h_i \overset{1}{F}{}^\alpha_j - \overset{2}{F}{}^h_i \overset{2}{F}{}^\alpha_j\Big). \tag{4.29}$$

Опуская здесь индекс h в V_n и свертывая результат с g^{ij} по индексам i, j, с учетом (3.28) получаем:

$$\begin{aligned} 4(n - m^2 + mn)R_{hk} + 4(2m-n)R_{\alpha k}\overset{3}{F}{}^\alpha_h - \\ - \Big((n+4)\overset{3}{R} - (2m-n)R\Big)\overset{3}{F}_{hk} + \\ + \Big((2m-n)\overset{3}{R} - (n+4)R\Big)g_{hk} = 0, \end{aligned} \tag{4.30}$$

где $R = R^\alpha_\alpha$ — скалярная кривизна V_n и $\overset{3}{R} = R^\alpha_\beta \overset{3}{F}{}^\beta_\alpha$.

Исключая из (4.30) и результата их свертывания с $\overset{3}{F}{}^h_l$ по индексу h слагаемое $R_{\alpha k}\overset{3}{F}{}^{\alpha}_h$, находим:

$$4m(n-m)R_{hk} = \Big(nR - (2m-n)\overset{3}{R}\Big)g_{hk} - \Big((2m-n)R - n\overset{3}{R}\Big)\overset{3}{F}_{hk}. \quad (4.31)$$

Продифференцируем это равенство ковариантно по x^l:

$$4m(n-m)R_{hk,l} = \big(nR_{,l} - (2m-n)\overset{3}{R}_{,l}\big)g_{hk} - \\ - \big((2m-n)R_{,l} - n\overset{3}{R}_{,l}\big)\overset{3}{F}_{hk}. \quad (4.32)$$

Сравнивая результат поочередного свертывания (4.32) с g^{hl} и $\overset{3}{F}{}^{hl}$ по индексам h, l, обнаруживаем, что $R_{,k} = 0$ и $\overset{3}{R}_{,l} = 0$, то есть R и $\overset{3}{R}$ — константы.

Учитывая вышесказанное, из (4.31) и (3.28) получаем

$$\widetilde{R}_{hk} = \Big(C_1R - C_2\overset{3}{R}\Big)g_{hk} - \Big(C_2R - C_1\overset{3}{R}\Big)\overset{3}{F}_{hk}, \quad (4.33)$$

где

$$C_1 = \frac{n^2+2n+2m^2-2mn}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)},$$
$$C_2 = \frac{(2m-n)(n+2)}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)}$$

— константы при $m \neq 2$, $n-m \neq 2$.

Нами доказана

Теорема 4.2. *Тензор Римана 4-квазиплоского полукватернионного келерова пространства $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$ по необходимости имеет структуру*

$$R^h_{ijk} = \widetilde{R}_{\alpha[j}Q^{h\alpha}_{k]i} + 2\widetilde{R}_{\alpha k}\Big(\overset{1}{F}{}^h_i\overset{1}{F}{}^{\alpha}_j - \overset{2}{F}{}^h_i\overset{2}{F}{}^{\alpha}_j\Big),$$
$$\widetilde{R}_{hk} = \Big(C_1R - C_2\overset{3}{R}\Big)g_{hk} - \Big(C_2R - C_1\overset{3}{R}\Big)\overset{3}{F}_{hk},$$

где

$$C_1 = \frac{n^2+2n+2m^2-2mn}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)},$$
$$C_2 = \frac{(2m-n)(n+2)}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)}$$

— константы при $m \neq 2, n-m \neq 2$.

4.3. Если V_n — 4-квазиплоское полукватернионное пространство, то, в соответствии с теоремой 4.2, его тензор Римана имеет структуру (4.29), (4.33). Подставляя эти соотношения в выражение (3.27) для T^h_{ijk}, получаем что в V_n имеет место $T^h_{ijk} = 0$.

Пусть полукватернионное келерово пространство $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$ допускает 4КПО на 4-квазиплоское полукватернионное келерово $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overset{s}{F})$. Тогда в $\overline{V}_n$ тензор Римана имеет структуру, указанную в (4.29), (4.33) и, следовательно, $\overline{T}^h_{ijk} = 0$. В силу инвариантности, $T^h_{ijk} = \overline{T}^h_{ijk} = 0$ в V_n. Отсюда, в свою очередь, вытекают (4.29), (4.33).

Таким образом, справедлива

Теорема 4.4. *Если полукватернионное келерово пространство*

$$(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$$

допускает 4*КПО на* 4*-квазиплоское полукватернионное келерово*

$$(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overset{s}{F}),$$

то тензор Римана V_n по необходимости удовлетворяет (4.29)*,* (4.33)*.*

Эта теорема по сути говорит о том, что класс полукватернионных келеровых пространств, тензор Римана которых имеет структуру (4.29), (4.33), замкнут относительно 4КПО.

4.5. Естественно возникает вопрос о том, допускает ли полукватернионное келерово пространство V_n, в котором имеют место (4.29),(4.33), нетривиальное 4КПО.

Предположим, что 4-квазиплоское полукватернионное келерово пространство $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$ нам задано. Если существует полукватернионное келерово относительно той же аффинорной структуры пространство $\overline{V}_n$ с метрическим тензором $\overline{g}_{ij}(x)$, на которое пространство V_n допускает 4КПО соответствующее вектору $\overset{\circ}{q}_i \neq 0$, то, ввиду инвариантности T^h_{ijk}, имеем $T^h_{ijk} = \overline{T}^h_{ijk} = 0$. Тогда после свертывания (3.27) по h, k ввиду (3.22), (4.31), (4.33) следует, что

$$\overset{\circ}{q}_{i,j} - \overset{\circ}{q}_\alpha \overset{\circ}{q}_\beta Q^{\alpha\beta}_{ij} = (\overline{r_1}\overline{g}_{ij} - r_1 g_{ij}) + (\overline{r_2}\overset{3}{\overline{F}}_{ij} - r_2 \overset{3}{F}_{ij}), \tag{4.34}$$

где $\overline{r_1}, \overline{r_2}, r_1, r_2$ — некоторые константы.

Далее, ввиду (1.1)-(1.6), (1.8) и (1.9) основные уравнения 4КПО (1.7) можно представить в эквивалентной форме:

$$\overline{g}_{ij,k} = 2\overset{\circ}{q}_k \overline{g}_{ij} + 2\overset{\circ}{q}_\alpha \overset{3}{F}{}^\alpha_k \overset{3}{\overline{F}}_{ij} + \overset{\circ}{q}_\alpha \overline{g}_{\beta k} Q^{\alpha\beta}_{(ij)}. \tag{4.35}$$

Совокупность уравнений (4.34), (4.35) образует систему Коши в ковариантных производных первого порядка в V_n относительно $\overline{g}_{ij}(x)$ и $\overset{\circ}{q}_k$. Кроме этого в $\overline{V}_n$ мы также должны требовать выполнения условий

$$\begin{aligned} &\overline{g}_{i\alpha} \overset{1}{F}{}^\alpha_j + \overline{g}_{j\alpha} \overset{1}{F}{}^\alpha_i = 0,\\ &\overline{g}_{i\alpha} \overset{2}{F}{}^\alpha_j + \overline{g}_{j\alpha} \overset{2}{F}{}^\alpha_i = 0,\\ &\overline{g}_{i\alpha} \overset{3}{F}{}^\alpha_j - \overline{g}_{j\alpha} \overset{3}{F}{}^\alpha_i = 0. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Исследуем смешанную систему (4.34), (4.35), (4.36) в V_n. Заметим, что при этих условиях в $\overline{V}_n$ автоматически следует $\overset{s}{F}{}^i_{k|l} \equiv 0$. Существование решения

$$\overline{g}_{ij}(x) \equiv \overline{g}_{ji}(x), \qquad (\det \|\overline{g}_{ij}\| \neq 0), \qquad \overset{\circ}{q}_k(x) \neq 0 \tag{4.37}$$

системы уравнений (4.34), (4.35), (4.36) в 4-квазиплоском полукватернионном келеровом пространстве V_n необходимо и достаточно, чтобы это пространство допускало 4КПО.

Условия интегрируемости (4.34) и (4.35) имеют вид:

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{q}_\alpha R^\alpha_{ijk} - \overset{\circ}{q}_{\alpha,k} \overset{\circ}{q}_\beta Q^{\alpha\beta}_{ij} - \overset{\circ}{q}_\alpha \overset{\circ}{q}_{\beta,k} Q^{\alpha\beta}_{ij} = \\ &\qquad + \overset{\circ}{q}_{\alpha,j} \overset{\circ}{q}_\beta Q^{\alpha\beta}_{ik} + \overset{\circ}{q}_\alpha \overset{\circ}{q}_{\beta,j} Q^{\alpha\beta}_{ik} = \overline{g}_{\alpha[j,k]} \Big(\overline{r}_1 \delta^\alpha_i + \overline{r}_2 \overset{3}{F}{}^\alpha_i \Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overline{g}_{\alpha j} R^\alpha_{ikl} + \overline{g}_{i\alpha} R^\alpha_{jkl} = 2\overline{g}_{ij,[l} \overset{\circ}{q}_{k]} + 2\overset{\circ}{q}_{\alpha,[l} \overset{3}{F}{}^\alpha_{k]} \overset{3}{\overline{F}}_{ij} + \\ &\qquad + 2\overset{3}{F}{}^\beta_j \overline{g}_{\beta i,[l} \overset{3}{F}{}^\alpha_{k]} \overset{\circ}{q}_\alpha + \overset{\circ}{q}_{\alpha,[l} \overline{g}_{k]\beta} Q^{\alpha\beta}_{(ij)} + \overset{\circ}{q}_\alpha \overline{g}_{\beta[k,l]} Q^{\alpha\beta}_{(ij)} \end{aligned}$$

Ввиду (4.29), (4.33), (4.34), (4.35), эти условия интегрируемости выполняются тождественно.

Дифференцируя ковариантно в V_n (4.36) и используя (4.35), убеждаемся, что первое дифференциальное продолжение условий (4.37) выполняется.

Из вышесказанного и из теории дифференциальных уравнений следует, что смешанная система уравнений (4.34), (4.35), (4.36) имеет в 4-квазиплоском полукватернионном келеровом пространстве V_n решение для любых начальных значениях искомых функций (4.37), удовлетворяющих в точке M_0 условиям (4.36).

Итак, нами доказана

Теорема 4.6. *Любое* 4*-квазиплоское полукватернионное келерово пространство допускает нетривиальные* 4*КПО.*

Две последние теоремы представляют собой аналог теоремы Бельтрами в теории геодезических отображений римановых пространств.

5. Строение 4-квазиплоских полукватернионных келеровых пространств

Рассмотрим тензор Римана 4-квазиплоского полукватернионного келерова пространства

$$R^h_{ijk} = \widetilde{R}_{\alpha[j} Q^{h\alpha}_{k]i} + 2\widetilde{R}_{\alpha k}\Big(\overset{1}{F}{}^h_i \overset{1}{F}{}^\alpha_j - \overset{2}{F}{}^h_i \overset{2}{F}{}^\alpha_j\Big),$$

$$\widetilde{R}_{hk} = \Big(C_1 R - C_2 \overset{3}{R}\Big) g_{hk} - \Big(C_2 R - C_1 \overset{3}{R}\Big) \overset{3}{F}_{hk}$$

в адаптированной к аффинору $\overset{3}{F}$ системе координат. Тогда, как указывалось ранее, имеем

$$(\overset{3}{F}{}^h_i) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix},$$

$$\overset{3}{F}{}^a_b = \delta^a_b, \qquad \overset{3}{F}{}^A_B = \delta^A_B, \qquad \overset{3}{F}{}^A_b = \overset{3}{F}{}^a_B = 0,$$

$$g_{ab} = g_{ab}(x^c), \qquad g_{AB} = g_{AB}(x^C), \qquad g_{aB}(x) = 0,$$

$$\overset{1}{F}{}^a_B = \overset{1}{F}{}^A_b = 0, \qquad \overset{2}{F}{}^a_B = \overset{2}{F}{}^A_b = 0,$$

$$\overset{2}{F}{}^a_b = -\overset{1}{F}{}^a_b = F^a_b, \qquad \overset{2}{F}{}^A_B = \overset{1}{F}{}^A_B = F^A_B,$$

$$F^a_c F^c_b = -\delta^a_b, \qquad g_{ac} F^c_b = -g_{bc} F^c_a, \qquad F^a_{b,c} = 0,$$

$$F^A_C F^C_B = -\delta^A_B, \qquad g_{AC} F^C_B = -g_{BC} F^C_A, \qquad F^A_{B,C} = 0,$$

где $a, b = 1, 2, \dots, m$, $A, B = m+1, m+2, \dots, n$.

Учитывая все это, при $h = a, i = b, j = c, k = d$ получим, что

$$R^a_{bcd} = C_3\Big(\delta^a_{[c} g_{d]b} + \overset{1}{F}{}^a_{[c} \overset{1}{F}{}_{d]b} + 2\overset{1}{F}{}^a_b \overset{1}{F}{}_{cd}\Big), \tag{5.38}$$

а при $h = A, i = B, j = C, k = D$ — что

$$R^A_{BCD} = C_4\Big(\delta^A_{[C} g_{D]B} + \overset{1}{F}{}^a_{[c} \overset{1}{F}{}_{d]b} + 2\overset{1}{F}{}^A_B \overset{1}{F}{}_{cd}\Big), \tag{5.39}$$

где C_3, C_4 — некоторые константы. Остальные компоненты тензора Римана равны нулю.

Соотношения (5.38) свидетельствуют о том, что компонента V_m представляет собой классическое келерово пространство постоянной голоморфной кривизны [1] относительно аффинора $\overset{1}{F}{}^a_b(x^c)$.

Аналогично (5.39) говорит о том, что компонента V_{n-m} представляет собой классическое келерово пространство постоянной голоморфной кривизны относительно аффинора $\overset{1}{F}{}^A_B(x^C)$.

Нами доказана

Теорема 5.1. *4-квазиплоское полукватернионное келерово пространство* $\Big(V_n, g_{ij}(x^i), \overset{s}{F}(x^i)\Big)$ *есть прямое произведение* $V_n = V_m \times V_{n-m}$, *где* $\Big(V_m(x^a), g_{ab}(x^c), \overset{1}{F}{}^a_b(x^c)\Big)$ *является келеровым относительно аффинора* $\overset{1}{F}{}^a_b(x^c)$ *пространством постоянной голоморфной кривизны, а* $\Big(V_{n-m}(x^A), g_{AB}(x^C), \overset{1}{F}{}^B_A(x^C)\Big)$ *— соответственно, келеровым относительно аффинора* $\overset{1}{F}{}^B_A(x^C)$ *пространством постоянной голоморфной кривизны.*

6. Заключение

В настоящей статье мы решаем задачи, традиционные для любого типа отображений аффинносвязных и римановых пространств, а именно, построение геометрических объектов, инвариантных относительно рассматриваемых отображений, и нахождение классов пространств, их допускающих.

Мы построили геометрические объекты, инвариантные относительно 4-квазипланарных отображений полукватернионных келеровых пространств.

Один из них T^h_{ij} носит нетензорный характер (типа проективных параметров Томаса в теории геодезических отображений римановых пространств), в чем состоит неудобство его применения. Сохранение этого объекта является необходимым и достаточным условием того, чтобы отображение одного полукватернионного келерова пространства на другое было 4-квазипланарным.

Другой объект T^h_{ijk} — тензорный (типа тензора Вейля в теории геодезических отображений римановых пространств или тензора голоморфно проективной кривизны в теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств). Его сохранение является лишь необходимым условием того, чтобы соответствие между двумя полукватернионными келеровыми пространствами было 4-квазипланарным.

Мы выделили класс пространств, названных 4-*квазиплоскими*, которые допускают 4-квазипланарное отображение на плоское пространство. С помощью объекта T^h_{ijk} получен внутренний тензорный признак этих пространств и доказано, что любое 4-квазиплоское пространство допускает нетривиальные 4-квазипланарные отображения на другие 4-квазиплоские пространства (это аналог теоремы Бельтрами из теории геодезических отображений римановых пространств).

Показано, что 4-квазиплоское пространство представляет собою прямое произведение двух келеровых пространств постоянной голоморфной кривизны.

Литература

[1] J. Mikeš, A. Vanžurová,, I. Hinterleitner. *Geodesic mappings and some generalizations.* Olomouc: Palacký University, Faculty of Science, 2009.

[2] T. Otsuki, Y. Tashiro. On curves in kaehlerian spaces. *J. Okayama Univ.*, 4:57–78, 1954.

[3] Д. В. Беклемишев. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. In *Итоги науки: Геометрия*, pages 165–212. М.: ВИНИТИ, 1965.

[4] И. Н. Курбатова. О 4-квазипланарных отображениях почти кватернионных многообразий. *Известия ВУЗов. Математика.*, (1):75–78, 1986.

[5] И. Н. Курбатова. О диффеоморфизмах почти кватернионных многообразий. *Мат. Студiї*, 40(1):95–103, 2013.

[6] И. Н. Курбатова. 4-квазипланарные отображения почти кватернионных и полукватернионных многообразий. *Труды международного геометрического центра*, 8(1):63–73, 2015.

[7] Н. С. Синюков. *Геодезические отображения римановых пространств.* М.: Наука, 1979.

Поступило в редакцию 28 марта 2016, принято к печати 12 мая 2016.

Ирина Николаевна Курбатова
ОНУ, Одесса, Украина
Email: irina.kurbatova27@gmail.com