Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 9, no. 3-4 (2016) pp. 17–36

Застосування просторів-склеювачів до класифікації Бера відображень однієї змінної

Олена Карлова

Abstract. We introduce a notion of a (locally) weak adhesive space and consider some applications of weak adhesives to Baire classification of Lebesgue and fragmented maps.

Анотація. Ми вводимо поняття (локально) слабкого простору-склеювача і розглядаємо застосування склеювачів до берівської класифікації відображень з класів Лебеґа, а також фрагментовних відображень.

1. Основні позначення та історичні зауваження

Через $\mathrm{C}(X,Y)$ ми позначаємо множину всіх неперервних відображень між топологічними просторами X та Y. Підмножина A простору X називається *функціонально відкритою (функціонально замкненою)*, якщо існує така функція $f \in \mathrm{C}(X,[0,1])$, що $A = f^{-1}\big((0,1]\big)$ (чи, відповідно, $A = f^{-1}(0)$).

Нехай $\mathscr{F}$ — сім'я всіх функціонально замкнених підмножин простору X. Визначимо індуктивно *функціональні борелівські класи* $\mathcal{M}_\alpha(X)$ та $\mathcal{A}_\alpha(X)$. Позначимо

$$\mathcal{M}_0(X) = \mathscr{F}, \quad \mathcal{A}_0(X) = \{X \setminus A : A \in \mathscr{F}\}$$

і для всіх ординалів $\alpha \in [1,\omega_1)$ покладемо

$$\mathcal{M}_\alpha(X) = \Big\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta(X),\ n = 1,2,\dots\Big\},$$

2010 Mathematics Subject Classification: 54C08, 26A21
Ключові слова: weak adhesive space, Lebesgue-Hausdorff Theorem, Baire classification, fragmented map

$$\mathcal{A}_\alpha(X) = \Big\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{M}_\beta(X),\ n = 1, 2, \dots \Big\}.$$

Елементи сімей $\mathcal{M}_\alpha(X)$ і $\mathcal{A}_\alpha(X)$ ми називаємо *множинами функціонально мультиплікативного класу* α чи *функціонально адитивного класу* α, відповідно; елементи сім'ї $\mathcal{M}_\alpha(X) \cap \mathcal{A}_\alpha(X)$ називаються *функціонально двосторонніми множинами класу* α, а при $\alpha = 1$ (функціонально) двосторонні множини першого класу називаються просто *(функціонально) двосторонніми.*

Зрозуміло, що в досконало нормальному просторі X клас $\mathcal{M}_\alpha(X)$ та клас $\mathcal{A}_\alpha(X)$ — це звичайний мультиплікативний клас α чи адитивний клас α підмножин простору X, відповідно.

Кажуть, що відображення $f : X \to Y$ належить до *(функціонального) класу* α *Лебеґа* і пишуть $f \in \mathrm{H}_\alpha(X, Y)$ (відповідно, $f \in \mathrm{K}_\alpha(X, Y)$), якщо прообраз $f^{-1}(V)$ довільної відкритої множини V в Y є множиною (функціонально) адитивного класу α в X.

Для множини $A \subseteq Y^X$ символом $\overline{A}^{\mathrm{p}}$ ми позначаємо множину усіх поточкових границь послідовностей відображень з A.

Нагадаємо також означення берівських класів функцій. *Нульовим класом Бера* $\mathrm{B}_0(X, Y)$ є сім'я всіх неперервних функцій $C(X, Y)$, а класи $\mathrm{B}_\alpha(X, Y)$ при $\alpha \in [1, \omega_1)$ визначаються індуктивно формулою

$$\mathrm{B}_\alpha(X, Y) = \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{B}_\beta(X, Y)}^{\mathrm{p}},$$

а елементи класу $\mathrm{B}_\alpha(X, Y)$ називаються *відображеннями* α*-го класу Бера.*

Послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ відображень $f_n : X \to Y$ між топологічними просторами X та Y називається *стабільно збіжною до відображення* $f : X \to Y$ *на просторі* X (цей факт ми позначаємо $f_n \xrightarrow{\mathrm{st}} f$), якщо для кожного $x \in X$ існує номер $k \in \mathbb{N}$, такий, що $f_n(x) = f(x)$ для всіх $n \geq k$.

Відображення $f : X \to Y$ належить до *першого стабільного класу Бера*, якщо існує послідовність неперервних відображень між X та Y, яка стабільно збігається до f на X. Для кожного ординалу $\alpha \in (0, \omega_1)$ через $\mathrm{B}^{\mathrm{st}}_\alpha(X, Y)$ ми позначаємо сім'ю всіх відображень α*-го стабільного класу Бера*, тобто,

$$\mathrm{B}^{\mathrm{st}}_\alpha(X, Y) = \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{B}^{\mathrm{st}}_\beta(X, Y)}^{\mathrm{st}},$$

де через $\overline{A}^{\mathrm{st}}$ позначено множину всіх стабільних границь послідовностей відображень з $A \subseteq Y^X$.

Зв'язок між класами відображень Бера і Лебеґа — це класична задача, яка глибоко вивчена для відображень, що діють між нормальним і метризовним просторами чи близькими до них. Ця задача бере свій початок з праць Р. Бера [1], А. Лебеґа [15], Ф. Гаусдорфа [8] і С. Банаха [2]. Теорема Лебеґа-Гаусдорфа-Банаха стверджує, що класи Бера і класи Лебеґа збігаються для певних просторів X та Y.

Теорема 1.1. *Нехай X — метризовний простір і $Y = [0,1]^{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{m} \leq \aleph_0$. Тоді*

$$\mathrm{B}_\alpha(X,Y) = \begin{cases} \mathrm{H}_\alpha(X,Y), & \text{при } \alpha < \omega_0, \\ \mathrm{H}_{\alpha+1}(X,Y), & \text{при } \alpha \geq \omega_0. \end{cases}$$

Ця теорема узагальнювалася впродовж XX-XXI століть багатьма математиками (див. статті [17], [18], [7], [5], [19], [10], [9], [11] і вказану там літературу).

Автором цієї статті були доведені найзагальніші аналоги теореми Лебеґа-Гаусдорфа-Банаха, для отримання яких було введено поняття сильно σ-функціонально дискретного відображення.

Сім'я $\mathscr{A} = (A_i : i \in I)$ підмножин простору X називається *сильно функціонально дискретною* або, скорочено, *sfd сім'єю*, якщо існує така дискретна сім'я $(U_i : i \in I)$ функціонально відкритих підмножин X, що $\overline{A_i} \subseteq U_i$ для кожного $i \in I$.

Сім'я $\mathscr{B}$ множин простору X називається *базою для відображення* $f : X \to Y$, [6], якщо прообраз $f^{-1}(V)$ довільної відкритої множини V з Y зображається у вигляді об'єднання множин з сім'ї $\mathscr{B}$. Якщо відображення $f : X \to Y$ має базу, яка є об'єднанням послідовності sfd-сімей підмножин X, то ми кажемо, що f є *σ-sfd відображенням.* Клас усіх таких відображень між X та Y позначатимемо символом $\Sigma^s(X,Y)$. Через $\Sigma^s_\alpha(X,Y)$ позначимо сукупність всіх відображень між X та Y, які мають σ-sfd базу, що складається з функціонально двосторонніх множин класу α. Для скорочення запису покладемо

$$\Sigma^s_{<\alpha}(X,Y) = \bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma^s_\beta(X,Y).$$

В [10] і [11] був доведений результат, який, зокрема, узагальнює теореми Фосґерау [5] і Веселого [19] на випадок довільного топологічного простору X.

Теорема 1.2. *Нехай X — топологічний простір і Y — метризовний простір. Якщо виконується одна з наступних умов:*

a) *Y — зв'язний і локально лінійно зв'язний, або*
b) $\dim X = 0$,

то $\mathrm{K}_1(X,Y) \cap \Sigma^s(X,Y) = \mathrm{B}_1(X,Y)$.

З узагальнення теореми Банаха [9, теорема 22] і теореми 1.2 випливає наступний факт.

Теорема 1.3. *Нехай* $\alpha \in [0, \omega_1)$, X *— топологічний простір,* Y *— метризовний зв'язний і локально лінійно зв'язний простір. Тоді*

$$\mathrm{B}_\alpha(X,Y) = \begin{cases} \Sigma^s_\alpha(X,Y), & \text{при } \alpha < \omega_0, \\ \Sigma^s_{\alpha+1}(X,Y), & \text{при } \alpha \geq \omega_0. \end{cases}$$

В цій статті ми спочатку узагальнюємо теорему 1.3 на випадок просторів Y, які не обов'язково задовольняють умови типу лінійної зв'язності. А саме, ми вводимо в пункті 2 поняття (локально) слабкого склеювача, яке охоплює поняття простору-склеювача, розглянутого в [12].

Далі, в пункті 3, розвиваючи методи з [5] і [10], ми доводимо теорему Лебеґа-Гаусдорфа для функцій між топологічним простором X та метризовним слабким і локально слабким склеювачем Y.

У четвертому пункті ми розглядаємо поняття Δ- та π-замкненої систем функцій і встановлюємо загальне технічне твердження про замкненість відносно рівномірних границь систем функцій, які є поточковими замиканнями Δ- та π-замкнених систем. З цього результату ми виводимо корисні твердження про замкненість відносно рівномірних границь системи усіх функцій першого класу Бера. Теорема 4.6 з пункту 4 є найзагальнішою на сьогодні версією теореми Лебеґа-Гаусдорфа-Банаха про рівність берівських та борелівських класів функцій.

Нарешті, в пункті 5 ми застосовуємо поняття слабкого склеювача до берівської класифікації фрагментовних відображень.

2. Поняття і приклади слабких склеювачів

Означення 2.1. Нехай X та Y — топологічні простори. Простір Y називається

- *склеювачем для простору* X, якщо для довільних двох неперетинних функціонально замкнених множин A та B в X і довільних неперервних відображень $f, g : X \to Y$ існує неперервне відображення $h : X \to Y$, таке, що $h|_A = f|_A$ і $h|_B = g|_B$;
- *слабким склеювачем для* X, якщо для довільних точок $y, z \in Y$ і довільних неперетинних функціонально замкнених множин A та B в X існує неперервне відображення $h : X \to Y$, таке, що $h|_A = y$ і $h|_B = z$;
- *локально слабким склеювачем для* X, якщо для довільних неперетинних функціонально замкнених множин A та B в X, довільної

точки $y \in Y$ і довільного околу $V \subseteq Y$ цієї точки існує окіл U точки y, такий, що $U \subseteq V$ і для кожного $z \in U$ існує неперервне відображення $h : X \to V$ з властивістю $h|_A = y$ і $h|_B = z$.

З означення склеювача негайно випливає, що кожний екстензор є склеювачем. Зрозуміло, що у випадку, коли будь-які два неперервні відображення між X та Y гомотопні, то Y є склеювачем для простору X. Приклад 2.9 (a) з [12] показує, що клас склеювачів строго ширший, ніж клас екстензорів. У прикладі 2.9 (b) з [12] наводиться склеювач Y для X і два неперервні відображення $f, g : X \to Y$, які не гомотопні.

Слід зазначити, що в [12, теорема 2.7] встановлено, що довільний топологічний простір Y є склеювачем для кожного сильно нульвимірного простору; лінійно зв'язний Y є склеювачем для довільного компакта X, кожна точка якого має базу околів з дискретною межею; Y є склеювачем для довільного топологічного простору X в тому і тільки тому випадку, коли Y — стягуванний.

Легко бачити, що (локально) лінійно зв'язний простір є (локально) слабким склеювачем для довільного топологічного простору X. Втім, з наступного зауваження випливає, що клас слабких склеювачів строго ширший, ніж клас лінійно зв'язних просторів.

Зауваження 2.2. Нехай Z — довільний регулярний простір, на якому кожна неперервна дійснозначна функція стала (див., наприклад, [4, 2.7.18]). Позначимо $X_1 = X_2 = Z$ і розглянемо пряму суму $X = X_1 \oplus X_2$. Тоді X — регулярний простір, в якому єдині нетривіальні функціонально замкнені множини — це X_1 та X_2, кожна з яких є відкрито-замкненою в X. Легко бачити, що довільний T_1-простір Y є слабким склеювачем для X.

Зауваження 2.3. Зрозуміло, що довільний континуум Пеано є слабким і локально слабким склеювачем для будь-якого топологічного простору. Але, незважаючи на лінійну і локальну лінійну зв'язність континуума Пеано, він може не бути склеювачем навіть для квадрату $X = [0, 1]^2$.

Справді, розглянемо килим Серпінського $Y \subseteq X$. Зафіксуємо $x^* \in Y$ і розглянемо відображення $f : X \to Y$, таке, що $f(x) = x$ при $x \in Y$ і $f(x) = x^*$ при $x \in X \setminus Y$. Покладемо $f_1(x) = x$ і $f_2(x) = x^*$ для всіх $x \in X$. Зауважимо, що множини $X_1 = Y$ і $X_2 = X \setminus Y$ є типу F_σ і G_δ в X, $X_1 \cup X_2 = X$ і $f|_{X_i} = f_i|_{X_i}$ при $i \in \{1, 2\}$, тобто, виконується умова (3) теореми 3.2 з [12]. Припустимо, що Y — склеювач для X. Тоді за теоремою 3.2 (1) з [12] функція f належить до першого стабільного класу Бера. Звідси випливає, що існує послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $g_n : X \to Y$ і замкнене покриття $(\widetilde{X}_n : n \in \mathbb{N})$ простору X,

таке, що $g_n|_{\widetilde{X}_n} = f|_{\widetilde{X}_n}$ і $\widetilde{X}_n \subseteq \widetilde{X}_{n+1}$ для кожного n. За теоремою Бера про категорію, виберемо таке $k \in \mathbb{N}$, що множина $\widetilde{X}_k \cap Y$ має непорожню внутрішність в Y. Тоді існує відкритий квадрат L в Y, такий, що його межа ∂L міститься в перетині $\widetilde{X}_k \cap Y$. Оскільки $g_k|_{\partial L}(x) = x$ для всіх $x \in \partial L$ і $g_k(\mathrm{int} L) \subseteq X \setminus \mathrm{int} L$, то ∂L є ретрактом $\overline{L}$, що неможливо. Отже, Y не є склеювачем для X.

Твердження 2.4. *Зв'язний локально слабкий склеювач Y для X є слабким склеювачем для X.*

Доведення. Візьмемо неперетинні функціонально замкнені множини $A, B \subseteq X$ і нехай $f, g : X \to [0,1]$ — такі дві неперервні функції, що $A = f^{-1}(0)$ і $B = g^{-1}(0)$. Визначимо неперервну функцію $\varphi : X \to [0,1]$,

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)}, \qquad x \in X.$$

Очевидно, що $A = \varphi^{-1}(0)$, $B = \varphi^{-1}(1)$. Нехай $C = \varphi^{-1}(\frac{1}{2})$.

Зафіксуємо точку $a \in Y$. Розглянемо максимальну з множин вигляду

$$\{y \in Y : \forall F_1, F_2 \in \mathcal{M}_0(X), F_1 \cap F_2 = \emptyset, \\ \exists h \in \mathrm{C}(X, Y) \mid h|_{F_1} = a \text{ і } h|_{F_2} = y\}$$

і позначимо її G_a. Зауважимо, що $a \in G_a$.

Покажемо, що множина G_a відкрита в Y. Дійсно, нехай $y \in G_a$ і $h_1 : X \to Y$ — неперервне відображення, таке, що $h_1|_A = a$ і $h_1|_C = y$. Оскільки Y — локально слабкий склеювач, то існує окіл U точки y, такий, що для кожного $u \in U$ можна вибрати неперервне відображення $h : X \to Y$, таке, що $h|_C = y$ і $h|_B = u$. Нехай $u \in U$ і $h_2 : X \to Y$ — неперервне відображення, таке, що $h_2|_C = y$ і $h_2|_B = u$. Покладемо $h(x) = h_1(x)$, якщо $x \in \varphi^{-1}\big([0, \frac{1}{2})\big)$, і $h(x) = h_2(x)$, якщо $x \in \varphi^{-1}\big([\frac{1}{2}, 1]\big)$. Тоді відображення $h : X \to Y$ неперервне, причому $h|_A = a$ і $h|_B = u$. З максимальності множини G_a випливає, що $u \in G_a$. Отже, $U \subseteq G_a$.

Розглянемо на просторі Y відношення $a \sim b \Leftrightarrow a \in G_b$. Зрозуміло, що $a \in G_b$ тоді і тільки тоді, коли $b \in G_a$ для довільних $a, b \in Y$. Нескладно перевіряється, що якщо $a \sim b$ і $b \sim c$, то $a \sim c$ для всіх $a, b, c \in Y$. Отже, $\sim$ є відношенням еквівалентності на Y. Звідси випливає, що для будь-яких різних $a, b \in Y$ множини G_a та G_b або збігаються, або не перетинаються.

Таким чином, G_a — це компонента зв'язності простору Y для довільного $a \in Y$. Оскільки простір Y зв'язний, то $G = Y$. Звідси випливає, що Y — слабкий склеювач для простору X. $\square$

3. Узагальнення теореми Лебеґа-Гаусдорфа для відображень першого класу

Лема 3.1. *Нехай X — топологічний простір, (Y,d) — метричний простір і $f : X \to Y$ — деяке відображення. Припустимо, що для деякого $n \geq 2$ існують sfd сім'ї $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \dots, \mathscr{A}_n$ функціонально замкнених множин в X і відображення $p_k : \mathscr{A}_k \to Y$, які для задовольняють умови:*

(A) *$\mathscr{A}_0$ складається з однієї множини X;*

(B) *$\mathscr{A}_{k+1} \prec \mathscr{A}_k$ для кожного $k < n$;*

(C) *$\sup\limits_{x\in A} d\big(f(x), p_k(A)\big) < \frac{1}{2^{k+2}}$ для всіх $k \leq n$ та $A \in \mathscr{A}_k$;*

(D) *для всіх $A \in \mathscr{A}_{k+1}$ та $A' \in \mathscr{A}_k$ з умовою $A \subseteq A'$ існує неперервна функція $h : X \to Y$, така, що $h|_A = p_{k+1}(A)$ і $h|_{A'} = p_k(A')$, причому $\operatorname{diam} h(X) < \frac{1}{2^{k+2}}$ якщо $k \in \{1, \dots, n-1\}$.*

Тоді існує неперервне відображення $g : X \to Y$, таке, що з включення $x \in \cup\mathscr{A}_k$ для $k \in \{1, \dots, n\}$ випливає нерівність

$$d\big(f(x), g(x)\big) < \frac{1}{2^k}. \tag{3.1}$$

Доведення. Для кожного $k \in \{1, \dots, n\}$ та $A \in \mathscr{A}_k$ виберемо неперервну функцію $\psi_{A,k} : X \to [0,1]$, таку, щоб $A \subseteq \psi_{A,k}^{-1}(0)$, а сім'я

$$\big(\psi_{A,k}^{-1}\big([0,1)\big) : A \in \mathscr{A}_k\big)$$

була дискретною. Покладемо $\varphi_{A,1} = \psi_{A,1}$ для кожного $A \in \mathscr{A}_1$. Тепер для кожного $A \in \mathscr{A}_2$ виберемо $A' \in \mathscr{A}_1$, таке, що $A \subseteq A'$ і покладемо

$$U_{A,2} \;=\; \psi_{A,2}^{-1}\big([0,1)\big) \;\cap\; \varphi_{A',1}^{-1}\big([0,\tfrac{1}{2})\big).$$

Існує неперервна функція $\varphi_{A,2} : X \to [0,1]$, така, що

$$\varphi_{A,2}^{-1}(0) = \psi_{A,2}^{-1}(0), \qquad\qquad \varphi_{A,2}^{-1}\big([0,1)\big) = U_{A,2}.$$

Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми отримаємо послідовність сімей $(\varphi_{A,k} : A \in \mathcal{A}_k)_{1\leq k\leq n}$ неперервних функцій $\varphi_{A,k} : X \to [0,1]$, таку, що для всіх $k \in \{2, \dots, n\}$ та $A \in \mathscr{A}_k$ існує $A' \in \mathscr{A}_{k-1}$, таке, що $A \subseteq A'$ і

$$A \;\subseteq\; \varphi_{A,k}^{-1}(0) \;\subseteq\; \varphi_{A,k}^{-1}\big([0,1)\big) \;\subseteq\; \varphi_{A',k-1}^{-1}\big([0,\tfrac{1}{2})\big), \tag{3.2}$$

і сім'я $(U_{A,k} : A \in \mathscr{A}_k)$ дискретна, де $U_{A,k} = \varphi_{A,k}^{-1}\big([0,1)\big)$. Для кожного k покладемо

$$U_k = \bigcup_{A\in\mathscr{A}_k} U_{A,k}, \qquad\qquad E_k = X \setminus U_k$$

і для кожного $x \in X$ нехай

$$g_0(x) = p_0(X).$$

Припустимо, що при $k < n$ вже визначені неперервні відображення

$$g_1, \dots, g_k : X \to Y$$

такі, що $g_k(x) = g_{k-1}(x)$ для $x \in E_k$ і $g_k(x) = p_k(A)$, якщо $x \in \varphi_{A,k}^{-1}\big([0, \frac{1}{2}]\big)$ для деякого $A \in \mathscr{A}_k$. З умови (D) випливає, що для кожного $A \in \mathscr{A}_{k+1}$ існують множина $A' \in \mathscr{A}_k$ з властивістю $A \subseteq A'$, і неперервне відображення $h_{A,k+1} : X \to Y$ з діаметром образу меншим за $\frac{1}{2^{k+2}}$, такі, що

$$h_{A,k+1}|_A = p_{k+1}(A), \qquad h_{A,k+1}|_{X \setminus U_{A,k+1}} = p_k(A').$$

Визначимо неперервне відображення $g_{k+1} : X \to Y$ формулою

$$g_{k+1}(x) = \begin{cases} g_k(x), & \text{якщо } x \in E_{k+1}, \\ h_{A,k+1}(x), & \text{якщо } x \in U_{A,k+1} \text{ для деякого } A \in \mathscr{A}_{k+1}. \end{cases}$$

Зауважимо, що має місце нерівність

$$d\big(g_{k+1}(x), g_k(x)\big) < \frac{1}{2^{k+2}} \tag{3.3}$$

для всіх $1 \le k < n$ і $x \in X$. Справді, очевидно, що (3.3) вірна при $x \in E_{k+1}$. Якщо $x \in U_{A,k+1}$ для $A \in \mathscr{A}_{k+1}$, то $x \in \varphi_{A',k}^{-1}\big([0, \frac{1}{2})\big)$ і тоді

$$g_{k+1}(x) = h_{A,k+1}(x), \qquad g_k(x) = p_k(A') \in h_{A,k+1}(X).$$

Отже, з властивості (D) випливає нерівність (3.3).

Продовжуючи індуктивно, ми отримаємо неперервні відображення $g_1, \dots, g_n : X \to Y$, такі, що $g_k|_A = p_k(A)$ для всіх $k \in \{0, \dots, n\}$ та $A \in \mathscr{A}_k$.

Покладемо $g = g_n$ і покажемо, що виконується нерівність (3.1). Нехай $1 \le k \le n$ і $x \in \cup \mathscr{A}_k$. Тоді $x \in A$ для деякого $A \in \mathscr{A}_k$. Звідси випливає, що $g_k(x) = p_k(A)$, тому

$$d\big(f(x), g_k(x)\big) \le \frac{1}{2^{k+2}}$$

за умовою (C). Врахувавши (3.3), ми одержимо нерівність

$$\begin{aligned} d\big(f(x), g_n(x)\big) &\le d\big(f(x), g_k(x)\big) + \sum_{i=k}^{n-1} d\big(g_i(x), g_{i+1}(x)\big) \\ &< \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}, \end{aligned}$$

яка і завершує доведення леми. □

Теорема 3.2. *Нехай X — топологічний простір і Y — метризовний слабкий склеювач і локально слабкий склеювач для X. Тоді*

$$\Sigma_1^s(X,Y) \subseteq \mathrm{B}_1(X,Y). \tag{3.4}$$

Доведення. Нехай d — метрика на просторі Y, яка породжує його топологічну структуру. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ виберемо покриття $\mathscr{U}_k$ простору Y відкритими множинами діаметру $< \frac{1}{2^{k+2}}$.

Розглянемо відображення $f \in \Sigma_1^s(X,Y)$ і σ-sfd базу $\mathscr{B}$ цього відображення, що складається з функціонально замкнених підмножин простору X. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ покладемо

$$\mathscr{B}_k = \{B \in \mathscr{B} : B \subseteq f^{-1}(U) \text{ для деякого } U \in \mathscr{U}_k\}.$$

Тоді $\mathscr{B}_k$ — це σ-sfd сім'я, причому $X = \cup\mathscr{B}_k$ для кожного k. Згідно з [9, лема 13] для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує послідовність $(\mathscr{B}_{k,n})_{n=1}^{\infty}$ sfd сімей функціонально замкнених множин в X, така, що для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_{k,n} \prec B_k, \qquad \mathscr{B}_{k,n} \prec \mathscr{B}_{k,n+1}, \qquad \bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_{k,n} = X.$$

Для довільних $k, n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$\mathscr{A}_{k,n} = \{B_1 \cap \cdots \cap B_k : B_m \in \mathscr{B}_{m,n}, 1 \le m \le k\}.$$

Зауважимо, що кожна сім'я $\mathscr{A}_{k,n}$ сильно функціонально дискретна, складається з функціонально замкнених множин, причому

(a) $\mathscr{A}_{k+1,n} \prec \mathscr{A}_{k,n}$,

(b) $\mathscr{A}_{k,n} \prec \mathscr{A}_{k,n+1}$,

(c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathscr{A}_{k,n} = X$.

Зафіксуємо $n \ge 2$ і для кожного $k = 1, \ldots, n$ позначимо $\mathscr{A}_k = \mathscr{A}_{k,n}$ і $\mathscr{A}_0 = \{X\}$. Виберемо довільне $y_0 \in Y$ і покладемо $p_0(X) = y_0$. Для кожного $A \in \mathscr{A}_1$ виберемо $U_A \in \mathscr{U}_1$, таке, що $f(A) \subseteq U_A$. Візьмемо довільне $y_A \in U_A$ і покладемо $p_1(A) = y_A$.

Тепер для кожного $A \in \mathscr{A}_2$ виберемо $A' \in \mathscr{A}_1$, таке, що $f(A) \subseteq f(A')$ і $U_A \in \mathscr{U}_2$, таке, що $f(A) \subseteq U_A$. Зафіксуємо довільну точку $y_A \in U_A \cap U_{A'}$ і покладемо $p_2(A) = y_A$.

Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми отримаємо відображення $p_k : \mathscr{A}_k \to Y$, які для кожного $k \in \{0, \ldots, n\}$ задовольняють умови леми 3.1. Таким чином, існує неперервне відображення $g_n : X \to Y$, таке, що з включення $x \in \cup\mathscr{A}_{k,n}$ при $k \le n$ випливає нерівність

$$d\big(f(x), g_n(x)\big) < \frac{1}{2^k}.$$

Доведемо, що послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ поточково збігається до відображення f на X. Зафіксуємо $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Знайдемо таке $k \in \mathbb{N}$, що $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. З умов (b) і (c) випливає, що існує таке $n_0 \geq k$, що $x \in \mathscr{A}_{k,n}$ для всіх $n \geq n_0$. Тоді для всіх $n \geq n_0$ маємо, що $d\big(f(x), g_n(x)\big) < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$.

Оскільки g_n неперервне, то $f \in \mathrm{B}_1(X, Y)$. □

З теореми 3.2 і [10, теорема 2.5] ми отримуємо наступне узагальнення теореми Лебеґа-Гаусдорфа для відображень зі значеннями у просторах-склеювачах.

Теорема 3.3. *Нехай X — топологічний простір і Y — метризовний слабкий склеювач і слабкий локальний склеювач для X. Тоді*

$$\mathrm{K}_1(X, Y) \cap \Sigma^s(X, Y) = \mathrm{B}_1(X, Y).$$

4. Δ-замкнені системи і випадок нескінченного α

Для відображень f, g між топологічними просторами X та Y визначимо відображення $f\Delta g : X \to Y^2$ наступним чином:

$$(f\Delta g)(x) = \big(f(x), g(x)\big)$$

для кожного $x \in X$.

Для $i \in \{0, 1\}$ розглянемо проекцію $\pi_i : Y^2 \to Y$, яка діє за правилом $\pi_i(y_0, y_1) = y_i$ для всіх $y_0, y_1 \in Y$.

Означення 4.1. Систему $\mathscr{F}$ відображень між топологічними просторами X та Y назвемо

- *Δ-замкненою*, якщо $h \circ (f\Delta g) \in \mathscr{F}$ для довільного неперервного відображення $h : Y^2 \to Y$ і довільних $f, g \in \mathscr{F}$;
- *π-замкненою*, якщо для довільної відкритої множини $V \subseteq Y$ і довільних $f, g, \varphi \in \mathscr{F}$ відображення $h = \pi_{\chi_{X \setminus \varphi^{-1}(V)}} \circ (f\Delta g) : X \to Y$, яке задається формулою

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \varphi^{-1}(V), \\ g(x), & x \in X \setminus \varphi^{-1}(V), \end{cases}$$

  також належить до системи $\mathscr{F}$.

Приклади Δ-замкнених і π-замкнених систем.

- $\mathrm{B}_\alpha(X, Y)$ та $\Sigma^s_\alpha(X, Y)$ — π-замкнені системи для всіх $\alpha \in [0, \omega_1)$.
- $\Sigma_{<\alpha}(X, Y)$ при $\alpha \in (0, \omega_1)$, а також система всіх скінченнозначних неперервних відображень між X та Y є Δ-замкненими і π-замкненими системами.

- $\mathrm{B}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ не є π-замкненою системою: нехай $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — функція Рімана, $\varphi(x)=\frac{1}{n}$ при $x=q_n\in\mathbb{Q}=\{q_k : k\in\mathbb{N}\}$, і $\varphi(x)=0$ при $x\notin\mathbb{Q}$, $f\equiv 1$ і $g\equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Тоді для $V=(0,2)$ ми маємо, що $h=\pi_{\chi_{X\setminus\varphi^{-1}(V)}}\circ(f\Delta g)=\chi_{\mathbb{Q}}\notin\mathrm{B}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Означення 4.2. Метричний простір (Y,d) називається *R-простором*, якщо для кожного $\varepsilon>0$ існує неперервне відображення $r_\varepsilon : Y\times Y\to Y$, яке задовольняє умови

$$d(y,z)\le\varepsilon \implies r_\varepsilon(y,z)=y, \tag{4.1}$$

$$d(r_\varepsilon(y,z),z)\le\varepsilon \tag{4.2}$$

для всіх $y,z\in Y$.

Зауважимо, що довільний опуклий підпростір Y нормованого простору $(Z,\|\cdot\|)$ є R-простором, де відображення r_ε визначається так:

$$r_\varepsilon(y,z)=\begin{cases} z+(\varepsilon/\|y-z\|)\cdot(y-z), & \|y-z\|>\varepsilon,\\ y, & \text{інакше.}\end{cases}$$

Теорема 4.3. *Нехай X — топологічний простір, (Y,d) — метричний простір, відображення $f:X\to Y$ є рівномірною границею послідовності відображень $f_n:X\to Y$ і $\mathscr{F}$ — π-замкнена система відображень між X та Y. Якщо виконується одна з наступних умов:*

(1) *$f_n\in\overline{\mathscr{F}}^{\mathrm{st}}(X,Y)$ для кожного $n\in\mathbb{N}$ і $\mathscr{F}$ — π-замкнена, або*

(2) *$f_n\in\overline{\mathscr{F}}^{\mathrm{p}}(X,Y)$ для кожного $n\in\mathbb{N}$ і (Y,d) — R-простір,*

то $f\in\overline{\mathscr{F}}^{\mathrm{p}}$.

Доведення. (1) Без обмеження загальності можемо вважати, що

$$d\big(f_n(x),f(x)\big)<\frac{1}{2^{n+1}}$$

для всіх $x\in X$ та $n\in\mathbb{N}$. Для кожного $n\in\mathbb{N}$ виберемо послідовність відображень $f_{n,m}\in\mathscr{F}$, таку, що

$$f_{n,m}\xrightarrow[m\to\infty]{\mathrm{st}}f_n$$

на X.

Для кожного $x\in X$ покладемо $h_{1,m}(x)=f_{1,m}(x)$ при $m\in\mathbb{N}$.

Нехай для деякого $n\in\mathbb{N}$ вже визначені послідовності $(h_{k,m})_{m=1}^{\infty}$ для всіх $1\le k\le n$ відображень, такі, що

(*a*) $h_{k,m}\xrightarrow{\mathrm{st}}f_k$ для всіх $1\le k\le n$;

(*b*) $h_{k,m}\in\mathscr{F}$ для всіх $1\le k\le n$ та $m\in\mathbb{N}$;

(*c*) $d\big(h_{k+1,m}(x),h_{k,m}(x)\big)<\frac{1}{2^k}$ для всіх $1\le k<n$, $m\in\mathbb{N}$ та $x\in X$.

Для кожного $m \in \mathbb{N}$ розглянемо відображення $\varphi_m = d \circ (f_{n+1,m} \Delta h_{n,m})$ і зауважимо, що $\varphi_m \in \mathscr{F}$, оскільки система $\mathscr{F}$ є π-замкненою. Покладемо

$$A_m = \varphi_m^{-1}\big((-\infty, \tfrac{1}{2^n})\big)$$

і для всіх $x \in X$ визначимо

$$h_{n+1,m}(x) = \begin{cases} f_{n+1,m}(x), & \text{якщо } x \in A_m, \\ h_{n,m}(x), & \text{якщо } x \notin A_m. \end{cases}$$

Перевіримо умову (a) для послідовності $(h_{n+1,m})_{m=1}^{\infty}$. Якщо $x \in X$, то існує номер m_0, такий, що $f_{n+1,m}(x) = f_{n+1}(x)$ і $f_{n,m}(x) = f_n(x)$ для всіх $m \geq m_0$. Тоді

$$d\big(f_{n+1,m}(x), h_{n,m}(x)\big) = d\big(f_{n+1}(x), f_n(x)\big) < \frac{1}{2^n}$$

для всіх $m \geq m_0$. Отже, $x \in A_m$ для всіх $m \geq m_0$. Тому

$$h_{n+1,m}(x) = f_{n+1,m}(x),$$

звідки випливає, що

$$h_{n+1,m} \xrightarrow[m\to\infty]{\text{st}} f_{n+1}$$

на X.

Умова (b) для послідовності $(h_{n+1,m})_{m=1}^{\infty}$ випливає з π-замкненості системи $\mathscr{F}$.

Перевіримо умову (c). Нехай $x \in X$ і $m \in \mathbb{N}$. Якщо $x \in A_m$, то $h_{n+1,m}(x) = f_{n+1,m}(x)$, а якщо $x \notin A_m$, то $h_{n+1,m}(x) = h_{n,m}(x)$. В обох випадках

$$d\big(h_{n+1,m}(x), h_{n,m}(x)\big) < \tfrac{1}{2^n}.$$

Таким чином, ми побудували послідовності відображень $(h_{n,m})_{m=1}^{\infty}$, які задовольняють умови (a)-(c) для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Доведемо тепер, що $h_{n,n} \longrightarrow f$ поточково на X. Зафіксуємо $x \in X$ та $\varepsilon > 0$. Виберемо таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що

$$d\big(f(x), f_{n_0}(x)\big) < \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Крім того, існує таке $n_1 \geq n_0$, що

$$h_{n_0,n}(x) = f_{n_0}(x)$$

для всіх $n \geq n_1$. Таким чином, для всіх $n \geq n_1$ маємо

$$d\big(f(x), h_{n,n}(x)\big) \leq d\big(f(x), f_{n_0}(x)\big) + \sum_{k=n_0}^{n-1} d\big(h_{k,n}(x), h_{k+1,n}(x)\big) <$$

$$< \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

Отже, $f \in \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{p}}$.

(2) Нехай $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність неперервних функцій

$$r_n : Y \times Y \to Y,$$

яка задовольняє умови

$$d(y,z) \le \frac{1}{2^n} \implies r_n(y,z) = y, \tag{4.3}$$

$$d(r_n(y,z),z) \le \frac{1}{2^n} \tag{4.4}$$

для всіх $y, z \in Y$ та $n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо довільну послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ відображень $f_n \in \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{p}}$, яка рівномірно збігається до відображення $f : X \to Y$. Виділяючи при необхідності підпослідовність, вважатимемо, що

$$d\big(f_n(x), f_{n+1}(x)\big) \le \frac{1}{2^{n+1}}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Виберемо для кожного n таку послідовність відображень $f_{n,m} \in \mathscr{F}$, що $\lim\limits_{m\to\infty} f_{n,m}(x) = f_n(x)$ для всіх $x \in X$.

Для $x \in X$ і $m \in \mathbb{N}$ покладемо

$$h_{1,m}(x) = f_{1,m}(x),$$

$$h_{n,m}(x) = r_{n-1}\big(f_{n,m}(x), h_{n-1,m}(x)\big),$$

при $n > 1$. Тоді $h_{n,m} \in \mathcal{F}$ для всіх n, m. Крім того, для кожного $n \in \mathbb{N}$ і для всіх $x \in X$ виконується нерівність

$$d\big(h_{n+1,m}(x), h_{n,m}(x)\big) \le \frac{1}{2^n}.$$

Нехай $x \in X$. Покажемо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує номер m_n, такий, що $h_{n,m}(x) = f_{n,m}(x)$ для всіх $m \ge m_n$. При $n = 1$ твердження виконується.

Припустимо, що $n > 1$ і $h_{n-1,m}(x) = f_{n-1,m}(x)$ при $m \ge m_{n-1}$. Оскільки $f_{n,m}(x) \to f_n(x)$, а $f_{n-1,m}(x) \to f_{n-1}(x)$, то існує номер m_0, такий, що для всіх $m \ge m_0$

$$d\big(f_{n,m}(x), f_n(x)\big) < \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$d\big(f_{n-1,m}(x), f_{n-1}(x)\big) < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Покладемо $m_n = \max\{m_0, m_{n-1}\}$. Тоді

$$d\big(f_{n,m}(x), h_{n-1,m}(x)\big) = d\big(f_{n,m}(x), f_{n-1,m}(x)\big) \le$$

$$\le d\big(f_{n,m}(x), f_n(x)\big) + d\big(f_n(x), f_{n-1}(x)\big) + d\big(f_{n-1}(x), f_{n-1,m}(x)\big) \le$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

для всіх $m \geq m_n$. Звідси випливає, що

$$h_{n,m}(x) = r_{n-1}\big(f_{n,m}(x), h_{n-1,m}(x)\big) = f_{n,m}(x)$$

для всіх $m \geq m_n$. Отже, $\lim\limits_{m\to\infty} h_{n,m}(x) = f_n(x)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Далі, покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} h_{n,n}(x) = f(x)$. Візьмемо $\varepsilon > 0$. Існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$, такий, що $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \frac{\varepsilon}{3}$ і $d\big(f_{n_0}(x), f(x)\big) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} h_{n_0,n}(x) = f_{n_0}(x),$$

то існує $m_0 > n_0$, таке, що для всіх $n \geq m_0$ виконується нерівність $d\big(h_{n_0,n}(x), f_{n_0}(x)\big) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Тоді при $n \geq m_0$ маємо

$$d\big(h_{n,n}(x), f(x)\big) \leq$$

$$\leq \sum_{i=n_0}^{n-1} d\big(h_{i+1,n}(x), h_{i,n}(x)\big) + d\big(h_{n_0,n}(x), f_{n_0}(x)\big) + d\big(f_{n_0}(x), f(x)\big) <$$

$$< \sum_{i=n_0}^{n-1} \frac{1}{2^i} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{1}{2^{n_0-1}} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Таким чином, $f \in \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{p}}$. □

Теорема 4.4. *Нехай X — топологічний простір і (Y, d) — метричний простір. Якщо*

(1) *Y — слабкий склеювач і локально слабкий склеювач для X, або*
(2) *Y — R-простір,*

то клас $\mathrm{B}_1(X, Y)$ замкнений відносно рівномірних границь.

Доведення. Нехай $(f_n)_{n\in\omega} \subset \mathrm{B}_1(X, Y)$ — послідовність відображень, яка поточково збігається до f на просторі X.

У випадку (1) маємо включення $f_n \in \Sigma_1^s(X, Y) = \mathrm{K}_1(X, Y) \cap \Sigma^s(X, Y)$. Оскільки клас функцій $\mathrm{K}_1(X, Y)$ замкнений відносно рівномірних границь, а клас $\Sigma^s(X, Y)$ замкнений навіть відносно поточкових границь, то $f \in \mathrm{K}_1(X, Y) \cap \Sigma^s(X, Y)$. Залишилось застосувати теорему 3.3.

У другому випадку необхідно застосувати теорему 4.3(2). □

Розглянемо деякий клас відображень $\mathscr{F} = \mathscr{F}(X, Y)$ між просторами X та Y. Покладемо

$$\Pi_1(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$$

і визначимо індуктивно класи $\Pi_\alpha(\mathscr{F})$ для всіх $\alpha \in [1, \omega_1)$ наступним чином:

$$\Pi_\alpha(\mathscr{F}) = \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} \Pi_\beta(\mathscr{F})}^{\mathrm{p}}.$$

- Якщо $\mathscr{F}(X,Y) = \Sigma_1^s(X,Y)$, то класи $\Pi_\alpha(\mathscr{F})$ ми будемо позначати символом $\Lambda_\alpha(X,Y)$.
- Якщо $\mathscr{F}(X,Y) = \mathrm{H}_1(X,Y)$, то класи $\Pi_\alpha(\mathscr{F})$ позначаються через $\Phi_\alpha^*(X,Y)$ [7, с. 196].
- Якщо $\mathscr{F}(X,Y) = \overline{\mathrm{C}(X,Y)}^{\mathrm{p}}$, то класи $\Pi_\alpha(\mathscr{F})$ при $\alpha \in [1, \omega_1)$ — це класи Бера.

Виведемо тепер з теореми 4.3 наступний результат, який є узагальненням теореми Банаха про аналітично зображувані функції для нескінченного ординала α (див. також [9, теорема 22]).

Теорема 4.5. *Нехай X — топологічний простір, (Y,d) — метричний простір і $\alpha \in [\omega_0, \omega_1)$. Тоді*

$$\Sigma_{\alpha+1}^s(X,Y) \subseteq \Lambda_\alpha(X,Y). \tag{4.5}$$

Доведення. Розглянемо випадок, коли $\alpha \geq \omega_0$ — граничний ординал.

Нехай $f \in \Sigma_{\alpha+1}^s(X,Y)$. Згідно з [9, лема 15] існує послідовність відображень $f_n \in \overline{\Sigma_{<\alpha}^s(X,Y)}^{\mathrm{st}}$, яка рівномірно прямує до f на X. Оскільки система $\Sigma_{<\alpha}^s(X,Y)$ є Δ-замкненою і π-замкненою, то $f \in \overline{\Sigma_{<\alpha}^s(X,Y)}^{\mathrm{p}}$ за теоремою 4.3. Отже, у випадку граничного α існує послідовність відображень $(g_n)_{n=1}^\infty$, яка поточково збігається до f на просторі X, і кожне відображення g_n належить до класу $\Sigma_{<\alpha}^s(X,Y)$.

Тоді при $\alpha = \omega_0$ з [9, теорема 17(i)] випливає, що $g_n \in \Lambda_{<\omega_0}(X,Y)$ для кожного n, звідки $f \in \Lambda_{\omega_0}(X,Y)$.

Припустимо, що включення (4.5) вірне для всіх $\beta \in [\omega_0, \alpha)$ і доведемо його для $\alpha > \omega_0$.

Якщо α — граничне, то $g_n \in \Sigma_{<\alpha}^s(X,Y) \subseteq \Sigma_{<\alpha+1}^s(X,Y) \subseteq \Lambda_{<\alpha}(X,Y)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ за індуктивним припущенням. Отже, $f \in \Lambda_\alpha(X,Y)$. Звідси випливає, що включення (4.5) вірне для граничних ординалів α.

Нехай $\alpha = \beta + m$, де β — граничний ординал і $m \in \mathbb{N}$ і $f \in \Sigma_{\alpha+1}^s(X,Y)$. Тоді міркуючи аналогічно як при доведенні потрібного включення для скінченних α (див. [9, теорема 17(i)]), можна показати, що існує послідовність відображень $g_n \in \Sigma_{\beta+m}^s(X,Y)$, яка поточково збігається до відображення f на X. За індуктивним припущенням, $g_n \in \Lambda_{\beta+m-1}(X,Y)$, звідки випливає, що $f \in \Lambda_\alpha(X,Y)$. $\square$

Наступний результат є найзагальнішою на сьогодні версією теореми Лебеґа-Гаусдорфа-Банаха про рівність берівських та борелівських класів функцій.

Теорема 4.6. *Нехай $\alpha \in [0, \omega_1)$, X — топологічний простір, Y — метризовний слабкий склеювач і локально слабкий склеювач для X. Тоді*

$$\mathrm{B}_\alpha(X, Y) = \begin{cases} \Sigma^s_\alpha(X, Y), & \text{якщо } \alpha \in [0, \omega_0), \\ \Sigma^s_{\alpha+1}(X, Y), & \text{якщо } \alpha \in [\omega_0, \omega_1). \end{cases}$$

Доведення. При $\alpha = 0$ твердження очевидне.

Випадок $\alpha = 1$ доведений в теоремі 3.3. Зауважимо, що з нього випливає рівність $\mathrm{B}_1(X, Y) = \Lambda_1(X, Y)$, якщо Y — метризовний слабкий склеювач і локально слабкий склеювач для X, з якої, в свою чергу, випливає рівність $\mathrm{B}_\alpha(X, Y) = \Lambda_\alpha(X, Y)$ для всіх $\alpha \in [1, \omega_1)$. Залишилось застосувати [9, теорема 22]. □

5. Застосування склеювачів до берівської класифікації фрагментовних функцій

Нехай X та Y — топологічні простори.

Означення 5.1. Відображення $f : X \to Y$ називається

- *насичено неперервним*, якщо звуження $f|_F$ на довільну замкнену непорожню множину $F \subseteq X$ має точку неперервності;
- *точково розривним*, якщо множина $C(f)$ всіх точок неперервності відображення f є всюди щільною в X.

Означення 5.2. Відображення $f : X \to Y$ між топологічним простором X і метричним простором Y називається *фрагментовним* [14], якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільної непорожньої замкненої множини $F \subseteq X$ існує така відносно відкрита множина $U \subseteq F$, що $\mathrm{diam} f(U) < \varepsilon$.

Очевидно, що кожне насичено неперервне відображення між топологічним і метричним просторами фрагментовне. Якщо X — спадково берівський простір, то кожне фрагментовне відображення є насичено неперервним. При цьому умова беровості є істотною, як показує приклад функції $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(r_n) = 1/n$, де $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ — множина всіх раціональних чисел. Ця функція є фрагментовною і скрізь розривною.

Зауважимо також, що для спадково берівського простору X поняття точкової розривності звуження відображення f на довільну замкнену множину $F \subseteq X$ рівносильне фрагментовності цього відображення.

Якщо ж X — не берівський, то поняття фрагментовності є слабшим, ніж точкова розривність на кожній замкненій множині.

Справді, розглянемо топологію τ на числовій прямій, базу околів $\mathscr{U}_x$ точки $x \in \mathbb{R}$ в якій утворюють множини вигляду

$$\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} : \varepsilon > 0\},$$

якщо $x \in \mathbb{Q}$, і

$$\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\},$$

якщо $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тоді $\mathbb{Q}$ — це відкритий щільний в $X = (\mathbb{R}, \tau)$ підпростір першої категорії. Нехай тепер $f : X \to \mathbb{R}$ — це функція Рімана. Тоді $\overline{C(f)} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, отже, f не є точково розривним. З іншого боку, якщо F — замкнена підмножина простору X, яка перетинається з множиною ірраціональних чисел, то $C(f|_F) \cap C(f) \neq \emptyset$, а якщо $F \subseteq \mathbb{Q}$, то ця множина замкнена в звичайній топології на $\mathbb{R}$, звідки випливає, що F має ізольовану точку, яка і є точкою неперервності звуження $f|_F$. Таким чином, f — фрагментовне.

Лема 5.3. *Нехай X — топологічний простір, Y — метризовний слабкий і локально слабкий склеювач для X, $G \subseteq X$ — функціонально відкрита множина, $y_0 \in Y$ і $g \in \mathrm{B}_1(G, Y)$. Тоді формулою*

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{якщо } x \in G, \\ y_0, & \text{якщо } x \in X \setminus G \end{cases}$$

визначається продовження $f \in \mathrm{B}_1(X, Y)$ відображення g.

Доведення. Покажемо, що $f \in \Sigma_1^s(X, Y)$. Згідно з [3, с. 88] існує банаховий простір Z і гомеоморфне вкладення $\varphi : Y \to Z$. Застосувавши [13, лема 8], ми отримаємо існування відображення $\widetilde{f} : X \to Z$ першого класу Бера, яке є продовженням g. Тоді $\widetilde{f} \in \Sigma_1^s(X, Z)$, а, отже, $f \in \Sigma_1^s(X, Y)$. Таким чином, $f \in \mathrm{B}_1(X, Y)$ за теоремою 4.6. □

Означення 5.4. Нехай X — топологічний простір, (Y, d_Y) — метричний простір і $\varepsilon > 0$. Ми кажемо, що відображення $f : X \to Y$

- *наближається на ε функцією першого класу Бера на X*, якщо існує таке відображення $g \in \mathrm{B}_1(X, Y)$, що $d_Y\big(f(x), g(x)\big) \leq \varepsilon$ для кожного $x \in X$;
- *локально наближається на ε функціями першого класу Бера на X*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U_x, що звуження $f|_{U_x}$ наближається на ε функцією першого класу Бера на U_x.

Аналоги леми 5.5 і теореми 5.6 для стягуванного простору Y були доведені в [13].

Лема 5.5. *Нехай X — паракомпакт, (Y, d_Y) — метричний слабкий і локально слабкий склеювач для X, $\varepsilon > 0$ і функція $f : X \to Y$ локально наближається на ε функціями першого класу Бера. Тоді f наближається на ε функцією першого класу Бера на X.*

Доведення. З паракомпактності простору X випливає, що існує σ-дискретне покриття $\mathscr{U}$ простору X функціонально відкритими множинами [16], таке, що для кожного $U \in \mathscr{U}$ існує відображення $f_U \in \mathrm{B}_1(U, Y)$ з умовою $d_Y(f(x), f_U) \leq \varepsilon$ для всіх $x \in U$. Нехай $\mathscr{U} = \bigcup_n \mathscr{U}_n$, де $\mathscr{U}_n$ — дискретна сім'я функціонально відкритих множин в X. Позначимо $U_n = \cup\mathscr{U}_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і зауважимо, що кожна множина U_n функціонально відкрита. Тому за лемою 5.3 для кожного $n \in \mathbb{N}$ відображення $f_n \in \mathrm{B}_1(U_n, Y)$, яке визначається рівністю

$$f_n(x) = f_U(x), \text{ якщо } x \in U \in \mathscr{U}_n,$$

можна продовжити до відображення $g_n \in \mathrm{B}_1(X, Y)$.

Покладемо

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{U}_1 \text{ і } \mathscr{A}_{n+1} = (U \setminus \cup\mathscr{U}_n : U \in \mathscr{U}_{n+1}) \text{ при } n \geq 1.$$

Тоді кожна множина $A_n = \cup\mathscr{A}_n$ є функціонально двосторонньою в X, причому сім'я $(A_n : n \in \mathbb{N})$ утворює розбиття простору X. Застосувавши [9, твердження 8], ми отримаємо, що формулою

$$g(x) = g_n(x), \text{ якщо } x \in A_n \text{ для деякого } n \in \mathbb{N}$$

визначається відображення $g \in \Sigma_1^s(X, Y)$. Таким чином, $g \in \mathrm{B}_1(X, Y)$ за теоремою 4.6. Крім того, для кожного $x \in X$ виконується нерівність

$$d_Y\big(f(x), g(x)\big) \leq \varepsilon,$$

оскільки g є продовженням g_n, а g_n є продовженням f_n. □

Теорема 5.6. *Нехай X — досконалий паракомпакт, (Y, d) — метричний слабкий і локально слабкий склеювач для X і $f : X \to Y$ — фрагментовне відображення. Тоді $f \in \mathrm{B}_1(X, Y)$.*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і покажемо, що відображення f локально наближається на ε функціями першого класу Бера. Нехай $\mathscr{G}$ — сукупність усіх відкритих підмножин простору X, на яких відображення f наближається на ε функціями першого класу, і $G = \cup\mathscr{G}$. Оскільки множина G є типу F_σ в X, то, використовуючи паракомпактність підпростору G і лему 5.5, ми отримаємо існування відображення $h \in \mathrm{B}_1(G, Y)$, такого, що

$$d_Y\big(h(x), f(x)\big) \leq \varepsilon$$

для всіх $x \in G$.

Покладемо $F = X \setminus G$ і покажемо, що $F = \emptyset$. Припустимо, що це не так. Виберемо точку $x_0 \in F$ і відкритий окіл U_0 цієї точки, такий, що

$$d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

для всіх $x \in U_0 \cap F$. Позначимо $y_0 = f(x_0)$. Згідно з лемою 5.3, відображення $g : X \to Y$, яке задається формулою

$$g(x) = \begin{cases} h(x), & x \in G, \\ y_0, & x \in F, \end{cases}$$

належить до першого класу Бера. Зауважимо, що

$$d_Y\big(f(x), g(x)\big) \leq \varepsilon$$

для всіх $x \in U_0$. Таким чином, $U_0 \subseteq G$. Зокрема, $x_0 \in G$, звідки випливає суперечність. Отже, $G = X$.

Таким чином, з леми 5.5 випливає, що існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ відображень першого класу Бера, така, що

$$d_Y\big(f(x), f_n(x)\big) \leq \frac{1}{n}.$$

Отже, f є рівномірною границею послідовності відображень першого класу Бера. Залишилось застосувати теорему 4.4. □

6. Подяка

Автор висловлює вдячність анонімному рецензентові за корисні зауваження, які дозволили покращити виклад матеріалу статті.

Література

[1] R. Baire. Sur les fonctions de variables reélles. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 3(3):1–123, 1899.
[2] S. Banach. Über analytisch darstellbare operationen in abstrakten räumen. *Fund. Math.*, 17(1):283–295, 1931.
[3] K. Borsuk. *Theory of retracts.* PWN - Polish Scientific Publisher, 1967.
[4] R. Engelking. *General Topology*, volume 46 of *Pure and applied mathematics.* Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
[5] M. Fosgerau. When are Borel functions Baire functions? *Fund. Math.*, 143(2):137–152, 1993.
[6] R. W. Hansell. Borel measurable mappings for nonseparable metric spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 161(1):145–169, 1971.
[7] R. W. Hansell. On Borel mappings and Baire functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 194(1):195–211, 1974.
[8] F. Hausdorff. *Set Theory*, volume 46 of *Pure and applied mathematics.* Amer. Math. Soc., 1957.
[9] O. Karlova. Functionally σ-discrete mappings and a generalization of Banach's theorem. *Top. Appl.*, 189(1):92–106, 2015.
[10] O. Karlova. On Baire classification of mappings with values in connected spaces. *Eur. J. Math.*, 2(2):526–538, 2016.

[11] O. Karlova. On Baire-one mappings with zero-dimensional domains. *Colloq. Math.*, 147(1):129–142, 2017.
[12] O. Karlova, V. Mykhaylyuk. On stable Baire classes. *Acta Math. Hungar.*, 150(1):36–48, 2016.
[13] O. Karlova, V. Mykhaylyuk. On composition of Baire functions. *Top. Appl.*, 216(2):8–24, 2017.
[14] G. Koumoullis. A generalization of functions of the first class. *Top. Appl.*, 50(2):217–239, 1993.
[15] H. Lebesgue. Sur l'approximation des fonctions. *Bull. Sci. Math.*, 22(3):278–287, 1898.
[16] K. Morita. Paracompactness and product spaces. *Fund. Math.*, 50(2):223–236, 1962.
[17] S. Rolewicz. On inversion of non-linear transformations. *Studia Math.*, 17(2):79–83, 1958.
[18] C. Stegall. Functins of the first baire class with values in banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 111(2):981–991, 1991.
[19] L. Veselý. Characterization of Baire-one functions between topological spaces. *Acta Univ. Carol., Math. Phys.*, 33(2):143–156, 1992.

Надійшла до редакції 15 листопада 2016, прийнята до друку 16 січня 2017.

Карлова Олена Олексіївна
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Email: maslenizza.ua@gmail.com