Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 9, no. 3-4 (2016) pp. 37–49

Топологічні властивості частково метричних просторів

Вадим Мироник, Володимир Михайлюк

Abstract. We study topological properties of partial metrics and partial metric spaces. In particular, we investigate relations between the regularity of a partial metric space and continuity type properties of the corresponding partial metric. For mappings with values in a partial metric space we obtain an analogue of a theorem on G_δ-type of a set of the continuity points of mapping with values in a metrizable space and an analogue of a theorem on F_σ-measurability of a semicontinuous function.

Анотація. Ми вивчаємо топологічні властивості часткових метрик і частково метричних просторів, зокрема, досліджуємо зв'язок між регулярністю частково метричних просторів і різними аспектами неперервності часткової метрики. Для відображень зі значеннями у частково метричних просторах ми одержуємо аналоги теореми про G_δ-тип множини точок неперервності метризовнозначних відображень і теореми про F_σ-вимірність напівнеперервної функції.

1. Вступ

Поняття часткової метрики і частково метричного простору було введене С. Метьюсом [6], [7] у 1992 році. Це поняття виникло як певне послаблення поняття метричного простору і застосовувалось в дослідженнях семантики мов програмування, де виникають негаусдорфові топологічні моделі (дивись [10]).

Разом з тим частково метричні простори дістали широке застосування в теорії нерухомої точки (Fixed Point Theory) і інтенсивно використовуються для різних узагальнень теореми Банаха про нерухому точку [9], [2], [3], [5], [1].

2010 Mathematics Subject Classification: Mathematics Subject Classification: 54D10, 54E35

Ключові слова: часткова метрика, частково метричний простір, напівнеперервність, регулярність, метризовність

Слід зазначити, що загальні топологічні властивості частково метричних просторів у вищезгаданих роботах досліджені досить поверхово. Крім того, природно виникає питання про те, які з результатів з теорії метричних просторів переносяться без змін на випадок частково метричних просторів або мають свої аналоги у цьому загальнішому класі просторів.

В даній статті ми вивчаємо топологічні властивості часткових метрик, частково метричних просторів і зв'язок між ними. Також ми досліджуємо зв'язок між регулярністю частково метричних просторів і різними аспектами неперервності часткової метрики. Крім того, для відображень зі значеннями у частково метричних просторах ми доводимо аналоги теореми про G_δ-тип множини точок неперервності метризовно-значних відображень і теореми про F_σ-вимірність напівнеперервної функції.

2. Простіші топологічні властивості і приклади частково метричних просторів

Означення 2.1. Функція $p : X^2 \to \mathbb{R}$ називається *частковою метрикою на множині* X, якщо для довільних $x, y, z \in X$ виконуються наступні умови:

(p_1) $x = y \Leftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$;
(p_2) $p(x,x) \leq p(x,y)$;
(p_3) $p(x,y) = p(y,x)$;
(p_4) $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$.

Нехай (X,p) — частково метричний простір. Для кожного $x \in X$ і $\varepsilon > 0$ покладемо

$$B_p(x,\varepsilon) = \{y \in X : p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon\}.$$

Система $\{B_p(x,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ утворює базу околів деякої топології на просторі X, яка називається *топологією частково метричного простору.* При цьому всі множини $B_p(x,\varepsilon)$ є відкритими в частково метричному просторі (X,p).

Легко бачити, що часткова метрика p є метрикою, якщо $p(x,x) = 0$ для кожного $x \in X$. Крім того, у первісному означенні часткової метрики з [7] вимагається невід'ємність функції p, тобто $p(x,y) \geq 0$ для всіх $x, y \in X$. Але при введенні топології, породженої частковою метрикою p, невід'ємність функції p не використовується. Отже, з точки зору топології частково метричного простору (X,p) невід'ємність функції p є зайвою.

Будемо говорити, що точка x в топологічному просторі X *відокремлюється від точки* $y \in X$, якщо існує окіл U точки x такий, що $y \notin U$.

Твердження 2.2. *Нехай (X,p) — частково метричний простір. Тоді*

(1) *точка $x \in X$ відокремлюється від точки $y \in X$ тоді і тільки тоді, коли $p(x,y) > p(x,x)$;*
(2) *(X,p) — T_0-простір;*
(3) *(X,p) — T_1-простір тоді і тільки тоді, коли $p(x,y) > p(x,x)$ для довільних різних $x,y \in X$.*

Доведення. (1) З означення топологічної структури простору (X,p) випливає, що точка $x \in X$ відокремлюється від точки $y \in X$ тоді і тільки тоді, коли $p(x,y) \geq p(x,x) + \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$, тобто коли $p(x,y) > p(x,x)$.

(2) Виберемо довільні різні $x,y \in X$. Тоді з умов (p_1) і (p_2) випливає, що $p(y,x) > p(x,x)$ або $p(x,y) > p(y,y)$. Залишилось використати (1).

Умова (3) випливає безпосередньо з (1). □

Твердження 2.3. *Нехай (X,p) — частково метричний простір. Тоді функція $p : (X,p)^2 \to \mathbb{R}$ — сукупно напівнеперервна зверху на X^2 і неперервна відносно кожної змінної у всіх точках діагоналі*

$$\Delta = \{(x,x) : x \in X\}.$$

Доведення. Покажемо спочатку, що p — сукупно напівнеперервна функція. Зафіксуємо $x_0, y_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. Використовуючи умову (p_4) для довільних $x \in B_p(x_0,\varepsilon)$ і $y \in B_p(y_0,\varepsilon)$ одержимо

$$\begin{aligned} p(x,y) &\leq p(x,x_0) + p(x_0,y) - p(x_0,x_0) \\ &\leq p(x_0,x_0) + \varepsilon - p(x_0,x_0) + p(x_0,y_0) + p(y_0,y) - p(y_0,y_0) \\ &< p(x_0,y_0) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Нарізна неперервність функції p у точках діагоналі Δ випливає з нерівності

$$0 \leq p(x,y) - p(x,x) < \varepsilon$$

для довільних $x \in X$, $\varepsilon > 0$ і $y \in B_p(x,\varepsilon)$. □

Нехай S — довільна множина. Через $l_1(S)$ ми позначаємо множину всіх функцій $x : S \to \mathbb{R}$ таких, що носій $\operatorname{supp} x = \{s \in S : x(s) \neq 0\}$ не більш, ніж зліченний і ряд $\sum\limits_{s\in S} x(s) = \sum\limits_{s \in \operatorname{supp} x} x(s)$ абсолютно збіжний.

Приклад 2.4. Наступні функції p є частковими метриками на відповідних множинах X:

(a) $X \subseteq \mathbb{R}$ і $p(x,y) = \max\{x,y\}$ для довільних $x,y \in X$;
(b) $X \subseteq \mathbb{R}$ і $p(x,y) = -\min\{x,y\}$ для довільних $x,y \in X$;

(c) $X \subseteq L_1([0,1])$ і $p(x,y) = \int\limits_0^1 \max\{x(t), y(t)\} d\mu(t)$ для довільних $x, y \in X$;

(d) $X \subseteq l_1(S)$ і $p(x,y) = \sum\limits_{s \in S} \max\{x(s), y(s)\}$ для довільних $x, y \in X$.

Зауваження 2.5. Для довільного топологічного простору X функція $f : X \to \mathbb{R}$ напівнеперервна зверху чи знизу, якщо f неперервна, як функція зі значеннями у частково метричному просторі $(\mathbb{R}, p)$ з прикладу 2.4(a) чи (b) відповідно.

3. Метрика, породжена частковою метрикою, і регулярні частково метричні простори

Нехай (X, p) — частково метричний простір. Легко бачити [7], що функція $d_p : X^2 \to \mathbb{R}$,

$$d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

є метрикою на X, яку ми називатимемо *метрикою, породженою частковою метрикою p*. Тотожне відображення $\pi_p : (X,p) \to (X, d_p)$, $\pi_p(x) = x$, ми називатимемо *відображенням, асоційованим з частковою метрикою p*. Крім того, для кожного $x \in X$ і $\varepsilon > 0$ покладемо

$$B_{d_p}(x, \varepsilon) = \{y \in X : d_p(x,y) < \varepsilon\}.$$

Зауважимо, що $B_{d_p}(x,\varepsilon) \subseteq B_p(x,\varepsilon)$ для всіх $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Тому має місце наступний факт.

Твердження 3.1. *Відображення $\pi_p^{-1} : (X, d_p) \to (X, p)$ неперервне.*

Наступне твердження дає зв'язок неперервності асоційованого відображення π_p з неперервністю часткової метрики.

Твердження 3.2. *Для частково метричного простору (X,p) і точки $x_0 \in X$ наступні умови є рівносильними:*

(1) *часткова метрика p є неперервною в точці (x_0, x_0);*
(2) *звуження часткової метрики p на діагональ $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ є неперервним в точці (x_0, x_0);*
(3) *асоційоване відображення $\pi_p : (X,p) \to (X, d_p)$ є неперервним в точці x_0.*

Доведення. Імплікація (1)⇒(2) є очевидною.

(2)⇒(3). Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і знайдемо окіл U_1 точки x_0 в (X,p) такий, що

$$|p(x,x) - p(x_0,x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

для кожного $x \in U_1$. Тепер для кожного $x \in U_1 \cap B_p(x_0, \frac{\varepsilon}{3})$ маємо

$$d_p(x, x_0) = 2(p(x, x_0) - p(x_0, x_0)) + (p(x_0, x_0) - p(x, x)) < 2 \cdot \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отже, відображення π_p неперервне в точці x_0.

(3)⇒(1). Згідно з твердженням 2.3 достатньо довести, що функція p напівнеперервна знизу в точці (x_0, x_0). Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо окіл U точки x_0 в (X, p) такий, що $d_p(x, x_0) < \varepsilon$ для кожного $x \in U$. Тоді використовуючи умову (p_2) для довільних $x, y \in U$ одержимо

$$\begin{aligned} p(x, y) \geq p(x, x) &= (p(x, x) - p(x, x_0)) + (p(x, x_0) - p(x_0, x_0)) + p(x_0, x_0) \\ &\geq (p(x, x) - p(x, x_0)) + (p(x_0, x_0) - p(x, x_0)) + p(x_0, x_0) \\ &= -d_p(x, x_0) + p(x_0, x_0) > p(x_0, x_0) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Твердження доведено. □

Наслідок 3.3. *Нехай (X, p) — частково метричний простір. Тоді наступні умови рівносильні:*

(1) *часткова метрика p є неперервною;*
(2) *звуження часткової метрики p на діагональ $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ є неперервним;*
(3) *асоційоване відображення $\pi_p : (X, p) \to (X, d_p)$ є неперервним;*
(4) *топологічні простори (X, p) і (X, d_p) збігаються.*

Для топологічного простору X, функції $f : X \to \mathbb{R}$ і точки $x_0 \in X$ через $\omega_f(x_0)$ ми позначаємо коливання функції f в точці x_0. Тобто

$$\omega_f(x_0) = \inf_{U \in \mathcal{U}} \sup_{u,v \in U} |f(u) - f(v)|,$$

де $\mathcal{U}$ — система всіх околів точки x_0.

Наступна властивість для напівнеперервних функцій дійсної змінної, як функцій першого класу Бера, є добре відомою [8, Глава XV, § 3-4].

Твердження 3.4. *Нехай X — топологічний простір, $f : X \to [0, 1]$ — напівнеперервна зверху функція і $\varepsilon > 0$. Тоді існує ніде не щільна множина $A \subseteq X$ така, що $\omega_f(x) < \varepsilon$ для кожного $x \in X \setminus A$.*

Доведення. Виберемо $n \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4} = \delta$ і для кожного $k \in \{1, \ldots, n\}$ покладемо

$$A_k = \{x \in X : \omega_f(x) \geq \varepsilon\} \cap f^{-1}\big([\tfrac{k-1}{n}, \tfrac{k}{n}]\big).$$

Достатньо показати, що всі множини A_k ніде не щільні.

Припустимо, що деяка множина A_k щільна у непорожній відкритій множині $U \subseteq X$. Зафіксуємо $x_0 \in U \cap A_k$ і виберемо відкритий окіл U_1 точки x_0 такий, що $f(x) < f(x_0) + \delta$ для кожного $x \in U_1$. Оскільки

$\omega_f(x_0) \geq 4\delta$, то існує $x_1 \in U \cap U_1$ таке, що $f(x_1) < f(x_0) - 2\delta \leq \frac{k-1}{n} - \delta$. Тоді для довільного околу U_2 точки x_1 існує $x_2 \in U_2 \cap U$ і, зокрема,

$$f(x_2) \geq \tfrac{k-1}{n} \geq f(x_1) + \delta,$$

що суперечить напівнеперервності зверху f у точці x_1. □

Тепер з твердження 2.3, наслідку 3.3 і твердження 3.4 випливає наступний факт.

Наслідок 3.5. *Нехай (X, p) — частково метричний простір. Тоді існує множина A першої категорії в (X, p) така, що простори $(X \setminus A, p)$ і $(X \setminus A, d_p)$ збігаються, зокрема, $X \setminus A$ — метризовний підпростір простору X.*

4. Регулярність частково метричних просторів

Топологічний простір X називатимемо *регулярним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного околу U точки x_0 в X існує замкнений окіл V точки x_0 такий, що $V \subseteq U$. Як випливає з наслідку 3.3, якщо відображення π_p неперервне, то простір (X, p) — метризовний, зокрема регулярний. Тому природно виникає питання про точковий варіант цієї властивості. Тобто чи випливає з неперервності в точці x_0 асоційованого відображення π_p регулярність частково метричного простору (X, p) в точці x_0? Разом з тим, постає питання про зворотній зв'язок. А саме, чи випливає з регулярності (в точці) простору (X, p) неперервність (в точці) відображення π_p? Наступні два приклади показують, що ці питання мають негативні відповіді.

Твердження 4.1. *Існує частково метричний простір (X, p) такий, що асоційоване відображення π_p неперервне в точці $x_0 \in X$, але (X, p) не є регулярним в точці x_0.*

Доведення. Нехай $S = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2$. Побудуємо сім'ю $(x_s : s \in S)$ функцій $x_s : S \to \mathbb{R}$. Покладемо

$$x_0(s) = \begin{cases} 1, & s = 0, \\ 0, & s \in S \setminus \{0\}, \end{cases}$$

$$x_n(s) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & s = 0, \\ 1 + \frac{1}{n}, & s = n, \\ 0, & s \in S \setminus \{0, n\}, \end{cases}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$ і

$$x_{(n,m)}(s) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & s = 0, \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, & s = n, \\ \frac{1}{m}, & s = (n,m), \\ 0, & s \in S \setminus \{0, n, (n,m)\}, \end{cases}$$

для довільних $n, m \in \mathbb{N}$.

Тепер розглянемо простір $X = \{x_s : s \in S\}$ з частковою метрикою

$$p(x,y) = \sum_{s \in S} \max\{x(s), y(s)\},$$

тобто (X,p) є підпростором $l_1(S)$.

Зауважимо, що $p(x_0, x_0) = p(x_{n,m}, x_{n,m}) = 1$ для довільних $n, m \in \mathbb{N}$. Оскільки $p(x_0, x_n) \geq 2$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то

$$U_0 = B_p(x_0, \tfrac{1}{2}) \subseteq \{x_0\} \cup \{x_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Тому $p(x,x) = 1$ для кожного $x \in U_0$. Отже, звуження часткової метрики p на діагональ $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ є неперервним в точці(x_0, x_0) і згідно з твердженням 3.2 звуження π_p неперервне в точці x_0.

Тепер покажемо, що $\overline{B_p(x_0, \varepsilon)} \not\subseteq U_0$ для довільного $\varepsilon > 0$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо $n \in \mathbb{N}$ так, що $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Тоді для довільного $m \geq n$ маємо

$$p(x_{n,m}, x_0) = 1 + \tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m} = 1 + \tfrac{1}{n} < p(x_0, x_0) + \varepsilon.$$

Тому $x_{n,m} \in B_p(x_0, \varepsilon)$.

Нехай $U = B_p(x_n, \delta)$, де $\delta > 0$, — довільний базисний окіл точки x_n. Зауважимо, що

$$p(x_{n,m}, x_n) = 1 - \tfrac{1}{n} + 1 + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m} = 2 + \tfrac{1}{m} = p(x_n, x_n) + \tfrac{1}{m}.$$

Тому $x_{n,m} \in U$ при $m \geq \frac{1}{\delta}$.

Отже, $U \cap B_p(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$ і $x_n \in \overline{B_p(x_0, \varepsilon)} \setminus U_0$. □

Теорема 4.2. *Існує метризовний частково метричний простір (X,p) такий, що асоційоване відображення π_p є розривним у кожній точці $x \in X$.*

Доведення. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ через S_n ми позначимо множину всіх наборів $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ таких, що $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n$. Крім того, для довільних $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ з $m \geq n$ і $(k_1, k_2, \ldots, k_m) \in S_m$ покладемо $s|_n = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Зрозуміло, що при цьому $s|_n \in S_n$.

Покладемо $\alpha_0 = 1$. Індукцією відносно n легко побудувати послідовність сімей $(\alpha_s : s \in S_n)$ чисел $\alpha_s \in (0,1)$, яка задовольняє такі умови:

(a) послідовність $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ строго зростає і $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k < 1$;

(b) для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $(k_1, \dots, k_n) \in S_n$ послідовність $(\alpha_{(k_1,\dots,k_n,k_n+k)})_{k=0}^{\infty}$ строго зростає і $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{(k_1,\dots,k_n,k_n+k)} < \alpha_{(k_1,\dots,k_n)}$;

(c) $\alpha_{(k_1,\dots,k_n,k_n)} > \alpha_{(k_1,\dots,k_n-1)}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $(k_1, \dots, k_n) \in S_n$ таких, що $(k_1, \dots, k_n - 1) \in S_n$.

Позначимо $S_0 = \{0\}$, $S = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} S_n$. і побудуємо сім'ю $(x_s : s \in S)$ функцій $x_s : S \to \mathbb{R}$. Покладемо

$$x_0(s) = \begin{cases} 1, & s = 0, \\ 0, & s \in S \setminus \{0\}, \end{cases}$$

$$x_{(k_1,\dots,k_n)}(s) = \begin{cases} \alpha_{(k_1,\dots,k_n)} - \frac{1}{k_1}, & s = 0, \\ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}, & s = k_1, \\ \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3}, & s = (k_1, k_2), \\ \dots & \\ \frac{1}{k_{n-1}} - \frac{1}{k_n}, & s = (k_1, k_2, \dots, k_{n-1}), \\ \frac{1}{k_n}, & s = (k_1, k_2, \dots, k_n), \\ 0, & s \in S \setminus \{0, k_1, (k_1, k_2), \dots, (k_1, \dots, k_n)\}, \end{cases}$$

для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $(k_1, \dots, k_n) \in S_n$.

Тепер, як і в доведенні попереднього твердження, розглянемо простір $X = \{x_s : s \in S\}$ з частковою метрикою

$$p(x, y) = \sum_{s \in S} \max\{x(s), y(s)\}.$$

Зауважимо, що $p(x_0, x_0) = 1$ і $p(x_s, x_s) = \alpha_s$ для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $s \in S_n$.

Зафіксуємо $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ і $s = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n$. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ покладемо $t_m = (k_1, k_2, \dots, k_n, k_n + m)$.

Легко бачити, що $x_{t_m} \to x_s$ в X. Але згідно з умовами (a) та (b) маємо

$$\lim_{m\to\infty} p(x_{t_m}, x_{t_m}) = \lim_{m\to\infty} \alpha_{t_m} < \alpha_s = p(x, x).$$

Тому згідно з твердженням 3.2 відображення π_p не є неперервним в точці x.

Залишилось перевірити, що X — метризовний. Оскільки простір X зліченний з першою аксіомою зліченності, то згідно з [4, Теорема 4.2.9] достатньо показати, що X регулярний.

Спочатку перевіримо регулярність простору X в точці x_0. Зауважимо, що
$$p(x_0, x_s) = 1 + \tfrac{1}{k_1} = p(x_0, x_0) + \tfrac{1}{k_1}$$
для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $s = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in S_n$. Зафіксуємо $m \in \mathbb{N}$ і розглянемо окіл
$$U = B_p(x_0, \tfrac{1}{m}) = \{x_0\} \cup \{x_{(k_1,\ldots,k_n)} : k_1 > m\}$$
точки x_0.

Нехай $x = x_{(k_1,\ldots,k_n)} \in X \setminus U$. Тоді $k_1 \le m$ і $\alpha_{(k_1,\ldots,k_n)} \le \alpha_{k_1} \le \alpha_m$ згідно з умовою (b). Розглянемо окіл $V = B_p(x, \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1})$ точки x. Для довільного $y \in V$ маємо
$$y(0) < x(0) + \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{m+1} = \alpha_{(k_1,\ldots,k_n)} - \tfrac{1}{k_1} + \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{m+1} \le \alpha_m - \tfrac{1}{m+1}.$$
З іншого боку, для довільного $z = x_{(l_1,\ldots,l_i)} \in U$ маємо $l_1 \ge m+1$ і $\alpha_{(l_1,\ldots,l_i)} > \alpha_m$ згідно з (c). Тому
$$z(0) = \alpha_{(l_1,\ldots,l_i)} - \tfrac{1}{l_1} > \alpha_m - \tfrac{1}{m+1}.$$
Отже, $V \cap U = \emptyset$ і множина U — відкрито-замкнена. Таким чином, простір X регулярний в точці x_0. Крім того, для кожного $k \in \mathbb{N}$ множина
$$G_k = \{x \in X : x = x_{(k,k_2,\ldots,k_n)}\} = \{x_s \in X \setminus \{x_0\} \ : \ s|_1 = k\}$$
відкрито-замкнена, як різниця відкрито-замкнених множин.

Покажемо регулярність простору X в кожній точці $x \in \{x_s : s \in S_1\}$. Зафіксуємо $k \in S_1$. Зауважимо, що
$$p(x_k, x_s) = \alpha_k + \tfrac{1}{k_2} = p(x_k, x_k) + \tfrac{1}{k_2}$$
для кожного $x_s \in G_k \setminus \{x_k\}$, де $s = (k, k_2, \ldots, k_n) \in S_n$ і $n \ge 2$. Зафіксуємо $m \ge k$ і розглянемо окіл
$$U = G_k \cap B_p(x_k, \tfrac{1}{m}) = \{x_k\} \cup \{x_{(k,k_2,\ldots,k_n)} : k_2 > m\}$$
точки x_k.

Нехай $x = x_{(k,k_2,\ldots,k_n)} \in G_k \setminus U$. Тоді $k \le k_2 \le m$ і
$$\alpha_{(k,k_2,\ldots,k_n)} \le \alpha_{(k,k_2)} \le \alpha_{(k,m)}$$
згідно з умовою (b). Розглянемо окіл $V = G_k \cap B_p(x, \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1})$ точки x. Для довільного $y \in V$ маємо
$$\begin{aligned} y(0) + y(k) &< x(0) + x(k) + \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{m+1} \\ &= \alpha_{(k,k_2,\ldots,k_n)} - \tfrac{1}{k_2} + \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{m+1} \\ &\le \alpha_{(k,m)} - \tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{m+1} \\ &= \alpha_{(k,m)} - \tfrac{1}{m+1}. \end{aligned}$$

З іншого боку, для довільного $z = x_{(k,l_2,\dots,l_i)} \in U$ маємо $l_2 \geq m+1$ і $\alpha_{(k,l_2,\dots,l_i)} > \alpha_{(k,m)}$ згідно з (c). Тому

$$z(0) + z(k) = \alpha_{(k,l_2,\dots,l_i)} - \tfrac{1}{l_2} > \alpha_{(k,m)} - \tfrac{1}{m+1}.$$

Отже, $V \cap U = \emptyset$ і множина U — відкрито-замкнена. Таким чином, простір X регулярний в точці x_k. Зауважимо, що, крім того, для кожного $s \in S_2$ множина

$$G_s = \{x_t \in X : t|_2 = s\}$$

відкрито-замкнена, як різниця відкрито-замкнених множин. Тепер для кожного $n \geq 3$ і $s \in S_n$ покладемо

$$G_s = \{x_t \in X : t|_n = s\}.$$

Далі, використовуючи індукцію відносно n нескладно можна довести регулярність простору X в кожній точці $x \in \{x_s : s \in S_n\}$ і відкрито-замкненість кожної множини G_s, де $s \in S_n$. При цьому індуктивний перехід доводиться повністю аналогічно, як у випадку $n = 2$. $\square$

5. Відображення зі значеннями у частково метричних просторах

Для топологічних просторів X і Y через $C(f)$ ми позначатимемо множину точок неперервності відображення $f : X \to Y$, а через $D(f)$ ми позначатимемо множину точок розриву відображення f. Добре відомо, що множина точок неперервності відображення зі значеннями у метризовному просторі має тип G_δ, а множина точок розриву має тип F_σ. Наступний результат є певним аналогом цього факту для відображень зі значеннями у частково метричному просторі.

Теорема 5.1. *Нехай X — топологічний простір, (Y, p) — частково метричний простір і $f : X \to Y$ такі, що для довільної ніде не щільної множини $B \subseteq Y$ множина $f^{-1}(B)$ ніде не щільна в X. Тоді існують G_δ-множина C в X і множина A першої категорії в X такі, що $C(f) = C \cup A$.*

Доведення. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ і позначимо через B_n множину всіх точок $y \in Y$ таких, що $p(y, y) \leq n$ і коливання звуження часткової метрики p на діагональ $\Delta = \{(y, y) : y \in Y\}$ у точці (y, y) не менше, ніж $\frac{1}{n}$. Застосуємо твердження 3.4 до функції $\varphi_n : Y \to [-(n+1), n+1]$,

$$\varphi_n(y) = \begin{cases} -(n+1), & p(y,y) < -(n+1), \\ n+1, & p(y,y) > n+1, \\ p(y,y), & |p(y,y)| \leq n+1, \end{cases}$$

і одержимо, що множина B_n ніде не щільна в Y. Тому множина

$$A_n = f^{-1}(\overline{B_n})$$

також ніде не щільна в X. Далі покладемо $G_n = X \setminus \overline{A_n}$ і розглянемо відображення $f_n : G_n \to (Y, d_p)$. Позначимо через C_n множину всіх точок $x \in G_n$ таких, що $\omega_{f_n}(x) < \frac{1}{n}$.

Тепер покладемо $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ і $A = C(f) \bigcap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \right)$. Оскільки всі множини G_n відкриті, то відображення $g : X \to (Y, d_p)$, $g(x) = f(x)$, неперервне в кожній точці множини C. Тому і відображення f неперервне в кожній точці множини C. Залишилось показати, що f розривне в кожній точці

$$x_0 \in \left(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \right) \setminus C = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \setminus C.$$

Зауважимо, що g розривне в точці x_0 і $y_0 = f(x_0) \in Y \setminus \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \right)$. Тому звуження часткової метрики на Δ є неперервним в точці (y_0, y_0) і згідно з твердженням 3.2 асоційоване з p відображення π_p неперервне в точці y_0. Отже, відображення f розривне в точці x_0. $\square$

Наступний приклад вказує на істотність додаткових умов на відображення f у теоремі 5.1.

Твердження 5.2. *Існує регулярний частково метричний простір (Y, p) і відображення $f : [0, 1] \to Y$ такі, що множина $C(f)$ невимірна за Борелем.*

Доведення. Нехай $A \subseteq [0, 1]$ — невимірна за Лебеґом множина така, що множини A і $B = [0, 1] \setminus A$ щільні в $[0, 1]$. Для кожного $a \in A$ розглянемо функцію $y_a : [0, 2] \to \mathbb{R}$,

$$y_a(t) = \begin{cases} 2, & t \in [a, a+1], \\ 0, & t \in [0, 2] \setminus [a, a+1], \end{cases}$$

а для кожного $b \in B$ розглянемо функцію $y_b : [0, 2] \to \mathbb{R}$,

$$y_b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [b, b+1], \\ 0, & t \in [0, 2] \setminus [b, b+1]. \end{cases}$$

Покладемо $Y = \{y_x : x \in [0,1]\}$ і розглянемо простір Y з частковою метрикою

$$p(y,z) = \int\limits_0^2 \max\{y(t), z(t)\} d\mu(t).$$

Зауважимо, що

$$p(y_u, y_v) - p(y_u, y_u) \geq |u - v|$$

для довільних $u, v \in [0,1]$. Тому простір (Y,p) регулярний.

Розглянемо відображення $f : [0,1] \to Y$, $f(x) = y_x$. Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що $C(f) = A$. $\square$

Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y називається F_σ-*вимірною*, якщо для кожної відкритої в X множини G множина $f^{-1}(G)$ має тип F_σ в X.

Наступний результат узагальнює теорему про F_σ-вимірність напівнеперервної функції (дивись [8, Глава XV, § 3-4]).

Теорема 5.3. *Припустимо, що X — досконало нормальний простір, (Y,p) — частково метричний простір, такий що (Y,d_p) сепарабельний, і $f : X \to (Y,p)$ — неперервне відображення. Тоді відображення $g : X \to (Y,d_p)$, $g(x) = f(x)$, є F_σ-вимірним.*

Доведення. Для довільних $y_0 \in Y$ і $\varepsilon > 0$ покладемо

$$G(y_0,\varepsilon) = B_p(y_0,\varepsilon) \setminus \{y \in Y : p(y,y) < p(y_0,y_0) + \varepsilon\}.$$

Зауважимо, що

$$B_{d_p}(y_0,\varepsilon) \subseteq G(y_0,\varepsilon) \subseteq B_{d_p}(y_0,3\varepsilon).$$

Тому довільну відкриту множину G в просторі (Y,d_p) можна подати у вигляді об'єднання множин $G(y,\varepsilon)$. Причому, оскільки простір (Y,d_p) сепарабельний, то множину G можна подати у вигляді

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G(y_n,\varepsilon_n).$$

Залишилось зауважити, що кожна множина $f^{-1}(G(y_n,\varepsilon_n))$ має тип F_σ, як прообраз при неперервному відображенні різниці двох відкритих множин. $\square$

Література

[1] I. Altun, H. P. Masiha, F. Sabetghadam. Fixed point theorems for integral type contractions on partial metric spaces. *Ukr. Mat. Zhurn.*, 68(6):826–834, 2016.

[2] I. Altun, F. Sola, H. Simsek. Generalized contractions on partial metric spaces. *Topology and its Applications*, 157(18):2778–2785, 2010.

[3] L. Ciric, B. Samet, H. Aydi, Vetro C. Common fixed points of generalized contractions on partial metricc spaces and an application. *Appl. Math. Comput.*, 218:2398–2406, 2011.
[4] R. Engelking. *General Topology.* Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
[5] E. Karapinar, I. M. Erhan. Fixed point theorems for operators on partial metricc spaces. *Appl. Math. Lett.*, 24:1894–1899, 2011.
[6] S. G. Matthews. Partial metric space. *8th British Colloquium for Theoretical Computer Science, March 1992. In Research Report 212, Dept. of Computer Science, University of Warwick*, 1992.
[7] S. G. Matthews. Partial metric topology. *Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications, Ann. New York Acad. Sci.*, 728:183–197, 1994.
[8] I. P. Natanson. *Theory of Functions of a real variable.* Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2016.
[9] S. Romaguera. A kirk type characterization of completeness for partial metric spaces. *Fixed Points Theory Appl.*, page 10 p., 2010.
[10] J. E. Stoy. Denotational semantics: the Scott-Strachey approach to programming language theory. *MIT Press. Cambridge Massachusetts*, 1977.

Надійшла до редакції 16 листопада 2016, прийнята до друку 12 січня 2017.

Мироник Вадим Ілліч
58012, кафедра алгебри та інформатики, Чернівецький національний університет, вул. Коцюбинського 2, м. Чернівці, Україна
Email: vadmyron@gmail.com

Михайлюк Володимир Васильович
58012, кафедра математичного аналізу, Чернівецький національний університет, вул. Коцюбинського 2, м. Чернівці, Україна
Email: vmykhaylyuk@ukr.net