Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 10, no. 2 (2017) pp. 56–71

Посвящается 100-летию со дня рождения проф. Б. А. Розенфельда

Объем конечного ортогонального h-конуса в гиперболическом пространстве положительной кривизны

Л. Н. Ромакина

Abstract. The hyperbolic space $\widehat{H}^3$ of positive curvature is considered in the projective Cayley-Klein model, on the ideal domain of the Lobachevskii space. The basic notions of the volumes theory of the space $\widehat{H}^3$ are introduced through invariants of the fundamental group of the space. In the orthogonal curvilinear coordinate system the volume element is finded, the volume formulae for a finite orthogonal h-cone and bodies bounded by such cone and the sphere with centre at the vertex of this cone, are obtained.

Аннотация. Гиперболическое пространство $\widehat{H}^3$ положительной кривизны рассмотрено в проективной модели Кэли-Клейна, на идеальной области пространства Лобачевского. Введены основные понятия теории объемов пространства $\widehat{H}^3$ через инварианты фундаментальной группы пространства. В ортогональной криволинейной системе координат найден элемент объема, получены формулы объема для конечного ортогонального h-конуса и тел, ограниченных таким конусом и сферой с центром в вершине этого конуса.

2010 Mathematics Subject Classification: 51F10, 51M25
УДК 514.133
Ключевые слова: гиперболическое пространство положительной кривизны, объем ортогонального h-конуса, объем ортогональной h-пирамиды
DOI: http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v10i2.654

1. Введение

1.1. Гиперболическое пространство положительной кривизны. Гиперболическое пространство $\widehat{H}^3$ положительной кривизны [14, с. 210] может быть реализовано на гиперсфере вещественного радиуса с отождествленными диаметрально противоположными точками в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^4_1$. Но больший интерес, на наш взгляд, представляет интерпретация пространства $\widehat{H}^3$ в проективной схеме Кэли-Клейна, поскольку она может быть использована для описания взаимодействия атомных частиц [24]. В проективной модели пространство $\widehat{H}^3$ реализовано на идеальной области пространства Лобачевского Λ^3. Пространства $\widehat{H}^3$ и Λ^3 являются связными компонентами расширенного гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$, т. е. проективного пространства $\mathbb{P}^3$ с фиксированной в нем овальной поверхностью, которую считают бесконечно удаленной и называют *абсолютом* пространств $\widehat{H}^3$, Λ^3 и $\mathbb{H}^3$ [14], [18, с. 73]. Напомним, что *овальной поверхностью* пространства $\mathbb{P}^3$ называют невырожденную поверхность второго порядка сигнатуры 2 [10, §136]. Пространство Лобачевского реализуется на внутренней, а пространство $\widehat{H}^3$ — на внешней области пространства $\mathbb{H}^3$ относительно абсолюта. Группа G проективных автоморфизмов абсолюта является *фундаментальной группой* преобразований пространств $\widehat{H}^3$, Λ^3 и $\mathbb{H}^3$.

Каждая прямая пространства $\mathbb{H}^3$ в зависимости от количества и природы общих с абсолютом точек может быть отнесена к одному из трех типов. *Эллиптические* (*гиперболические*) *прямые* пересекают абсолют в двух мнимо сопряженных (вещественных) точках. *Параболические прямые* касаются абсолюта и являются изотропными. Тип прямой пространства $\widehat{H}^3$ определен типом содержащей ее прямой пространства $\mathbb{H}^3$. С каждой собственной точкой пространства $\widehat{H}^3$ связан конус вещественных изотропных образующих с вершиной в этой точке, названный *изотропным* или *световым конусом* данной точки [23, раздел 3]. Каждая эллиптическая (гиперболическая) прямая, проходящая через собственную точку пространства $\widehat{H}^3$, принадлежит внешней (внутренней) области относительно светового конуса данной точки.

В зависимости от типа линии пересечения плоскости с абсолютом различают три типа плоскостей пространства $\mathbb{H}^3$ (см. [23, раздел 1], [6]). *Эллиптические плоскости* пересекают абсолютную поверхность по нулевой линии (см. [10, §134]), т. е. по невырожденной линии второго порядка сигнатуры 0. *Расширенные гиперболические плоскости* имеют с абсолютом общую овальную линию (см. [10, §134]) и состоят из двух компонент. Внешняя относительно абсолюта компонента, собственная для пространства $\widehat{H}^3$, является *гиперболической плоскостью положительной кривизны* (см., например, [18], [19]), внутренняя компонента — *плоскостью Лобачевского. Коевклидовы плоскости* (см., например, [15], [16]) пересекают абсолют по вырожденной линии второго порядка — паре мнимо сопряженных прямых. Тип плоскости пространства $\widehat{H}^3$ определен типом содержащей ее плоскости пространства $\mathbb{H}^3$.

Все двугранные углы пространства $\widehat{H}^3$ как и все углы гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны образуют 15 типов, углы шести типов измеримы с помощью абсолюта, углы трех типов имеют вещественные меры (см. [17], [18], [6]). Каждый угол коевклидовой плоскости принадлежит одному из четырех типов, для углов между параболическими прямыми такой плоскости существует инвариант фундаментальной группы преобразований, а для конечных углов между эллиптическими прямыми существует инвариант группы движений. Фундаментальная группа преобразований коевклидовой плоскости на множестве пар эллиптических прямых транзитивна (см. [16]).

1.2. **Постановка задачи.** Теория объемов в пространстве Лобачевского с первых своих шагов обогащала математику новыми результатами и новыми методами. Она имеет давнюю историю и остается актуальной на современном этапе (см., например, [13], [12], [9], [28], [8], [26], [1], [2], [3], [4], [7]). Значительные трудности вычисления объемов многогранников в пространстве Лобачевского на протяжении двух веков поддерживают дух состязательности среди ученых, укрепляя их в стремлении получить наиболее компактные формулы объемов. Но само пространство будто подшучивает над исследователями, оставляя в лидерах первопроходцев и стимулируя тем самым их последователей к выходу на свою идеальную область.

В поисках аналогов простых формул объема из евклидовой и эллиптической геометрий, например, формулы $V = \frac{1}{6}abc$ объема евклидова тетраэдра с исходящими из одной вершины попарно ортогональными ребрами или формулы $V = \frac{1}{2}AD$ объема эллиптического тетраэдра с четырьмя прямыми двугранными углами (см., например, [8]), исследователь непременно задается вопросом об особенностях строения пространства Лобачевского, затрудняющих получение таких формул. Довольно простое объяснение этого вопроса дает проективная модель данного пространства.

Упрощение вычислений при выводе метрических формул достигается, как правило, использованием ортогональных систем координат, а сами метрические соотношения имеют более компактную запись, если содержащиеся в них величины характеризуют взаимно ортогональные объекты. В проективном смысле ортогональность объектов связана с понятием абсолютного поляритета. К примеру, ортогональность двух прямых на плоскости Лобачевского равносильна тому, что каждая из этих прямых проходит через полюс другой относительно абсолюта.

Приведенная компактная формула объема эллиптического тетраэдра характеризует тетраэдр, два противоположных ребра которого лежат на взаимно полярных относительно абсолюта прямых. Назовем такой тетраэдр *монополярным*, применяя термин, введенный в работе [26] для тетраэдра с аналогичным свойством в пространстве $\widehat{H}^3$. Ребра монополярного тетраэдра на взаимно полярных относительно абсолюта прямых назовем *базисными.* Если их длины равны a и b, то объем монополярного тетраэдра может быть вычислен по формуле $V = \frac{1}{2}\rho ab$, где ρ — радиус кривизны пространства, эллиптического $\mathbb{E}^3$ или гиперболического пространства $\widehat{H}^3$ положительной кривизны (см. [26]).

В отличие от пространств $\mathbb{E}^3$ и $\widehat{H}^3$, пространство Лобачевского, реализуясь внутри овальной поверхности проективного пространства, не содержит взаимно полярных относительно абсолюта прямых. Каждая прямая пространства Лобачевского принадлежит гиперболической прямой пространства $\mathbb{H}^3$. Абсолютная поляра такой прямой расположена за пределами пространства Λ^3, является эллиптической. Изучая конечные объекты в пространстве Лобачевского и используя объекты и системы координат в его собственной области, задействовать эллиптические прямые не удается, следовательно не удается максимально упростить вычисления и результирующие формулы.

Ситуация меняется принципиально после распространения исследований на идеальную область пространства Λ^3. Выход за пределы абсолюта, с одной стороны, значительно обогащает гиперболическую геометрию, а с другой — позволяет существенно упростить решение некоторых задач. В данной работе представлен пример одной из таких задач — вычисление в пространстве $\widehat{H}^3$ объемов конечного ортогонального h-конуса и тел, полученных его рассечением эллиптической сферой.

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, по схеме, предложенной в работах [21], [25], [26], определим основные понятия теории объемов пространства $\widehat{H}^3$ в проективной модели Кэли-Клейна и введем ортогональную криволинейную систему координат с базовой расширенной гиперболической плоскостью, определенную на внешней области относительно светового конуса своего полюса. Применяя введенную систему, установим зависимость объема конечного ортогонального h-конуса от площади его основания. Как следствия полученной зависимости найдем формулы объема конечной ортогональной пирамиды с гиперболическим основанием.

1.3. **Основные метрические формулы.** Все вычисления в пространстве $\widehat{H}^3$ проводим в каноническом репере $R^* = \{A_1, A_2, A_3, A_4, E\}$ первого типа, вершины которого попарно сопряжены относительно абсолюта, вершина A_4 является внутренней по отношению к абсолюту, а единичная точка E служит пересечением трех коевклидовых плоскостей, каждая из которых содержит одну из координатных прямых A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3. Семейство всех канонических реперов первого типа в пространстве $\widehat{H}^3$ зависит от шести параметров. Уравнение абсолютной поверхности γ в каждом репере этого семейства имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

Квадратичная форма $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ является метрической формой в пространстве $\widehat{H}^3$. Для собственной (идеальной) точки A пространства $\widehat{H}^3$ с координатами (a_p), $p = 1, 2, 3, 4$, в репере R^* справедливо неравенство

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 > 0 \quad \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 < 0\right). \tag{1.1}$$

Если точки A и B эллиптической (гиперболической) прямой заданы в репере R^* координатами соответственно (a_p) и (b_p), $p = 1, 2, 3, 4$, то расстояние между ними может быть выражено по формуле

$$\cos\frac{|AB|}{\rho} = \pm\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_4^2}}, \tag{1.2}$$

$$\left(\cosh\frac{|AB|}{\rho} = \pm\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_4^2}}\right) \tag{1.3}$$

где ρ — радиус кривизны пространства $\widehat{H}^3$, $\rho \in \mathbb{R}_+$.

Билинейная форма $\overline{\varphi}$, полярная к форме φ, определяет условие ортогональности точек A и B в репере R^*:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4 = 0. \tag{1.4}$$

Тангенциальная метрическая форма пространства $\widehat{H}^3$ в репере R^* совпадает с формой φ. Для координат (α_p), $p = 1, 2, 3, 4$, расширенной гиперболической (эллиптической) плоскости α пространства $\widehat{H}^3$ в репере R^* выполняется неравенство

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 > 0, \qquad \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 < 0\right). \tag{1.5}$$

При вычислении в п. 4.2 объемов ортогональных h-пирамид пространства $\widehat{H}^3$ потребуются следующие две теоремы, доказательства которых можно найти в работах [5, теорема 3.1] и [21, теорема 3] соответственно.

Теорема 1. *Пусть на гиперболической плоскости* $\widehat{H}$ *радиуса кривизны* ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, *меры внутренних углов при вершинах* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *конечного* n*-реберника* F *без параболических ребер равны соответственно* $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \ldots, \widehat{A}_n$. *Тогда площадь* S n*-реберника* F *может быть вычислена по формуле*

$$S = \rho^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \widehat{A}_j - i\pi(n-2) \right).$$

Теорема 2. *На гиперболической плоскости* $\widehat{H}$ *радиуса кривизны* ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, *площадь* S *прямоугольного трехреберника с эллиптическим* (*гиперболическим*) *катетом длиной* a (b) *может быть вычислена по формуле*

$$S = \rho^2 \ln \frac{\sinh \frac{b}{\rho} + \cosh \frac{b}{\rho} \sin \frac{a}{\rho}}{\sin \frac{a}{\rho} + \cos \frac{a}{\rho} \sinh \frac{b}{\rho}}.$$

2. Основные положения теории объемов пространства $\widehat{H}^3$

По схеме из работ [21], [25], [26] определим в пространстве $\widehat{H}^3$ понятие объема тела через инварианты фундаментальной группы G.

2.1. **Собственные координаты точек в пространстве $\widehat{H}^3$.** Проективные координаты точек пространства $\widehat{H}^3$ определены с точностью до общего ненулевого множителя. Чтобы обеспечить однозначность вводимых понятий, проведем нормировку проективных координат точек, инвариантную относительно действий группы G.

Предположим, что в репере R^* вещественные числа (x_p), $p = 1, 2, 3, 4$, служат координатами собственной точки M пространства $\widehat{H}^3$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$. Тогда четверку чисел

$$\bar{x}_p = \pm \frac{\rho x_p}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}}, \tag{2.1}$$

определенных с точностью до знака, назовем *собственными координатами* точки M в репере R^*.

На основании условий (1.1) собственным (идеальным) точкам пространства $\widehat{H}^3$ в нормировке (2.1) соответствуют определенные с точностью до знака четверки вещественных (мнимых) чисел, а точкам абсолюта — четверки бесконечно больших величин.

Собственные координаты собственных точек пространства $\widehat{H}^3$ удовлетворяют равенству

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 - \bar{x}_4^2 = \rho^2. \tag{2.2}$$

2.2. **Элемент объема пространства $\widehat{H}^3$.** Рассмотрим в пространстве $\widehat{H}^3$ область Q, гомеоморфную открытому шару (или, на языке проективной геометрии, внутренности овальной поверхности проективного пространства $\mathbb{P}^3$). Пусть в репере R^* произвольная точка M из области Q имеет собственные координаты $(\bar{x}_p)$. Зададим на области Q криволинейную систему координат C^* гладкими функциями:

$$\bar{x}_p = \bar{x}_p(u, v, w), \ p = 1, 2, 3, 4, \ (u, v, w) \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^3.$$

Репер R^* будем называть *присоединенным* к системе C^*.

Условимся, что любые две координатные кривые в каждом семействе u, v, или w системы C^* принадлежат одному непараболическому типу кривых, определенному типом касательной к кривой в каждой ее точке (см. [25, раздел 3]). Систему C^* назовем *ортогональной*, если в каждой точке области Q координатные кривые попарно взаимно ортогональны.

Согласно условиям (1.4) и (2.2) точки

$$M_u\left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial u}\right), \qquad M_v\left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial v}\right), \qquad M_w\left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial w}\right) \tag{2.3}$$

ортогональны точке M. Поэтому плоскость $M_uM_vM_w$ — полярная плоскость точки M относительно абсолюта.

Для значений форм $\overline{\varphi}$ и φ от координат точек (2.3) введем следующие обозначения:

$$\gamma_{uv} = \overline{\varphi}\left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial u}, \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial v}\right), \quad \gamma_{vw} = \overline{\varphi}\left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial v}, \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial w}\right), \quad \gamma_{uw} = \overline{\varphi}\left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial u}, \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial w}\right)$$

$$\gamma_{uu} = \varphi\left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial u}\right), \qquad \gamma_{vv} = \varphi\left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial v}\right), \qquad \gamma_{ww} = \varphi\left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial w}\right).$$

В системе C^* прямые MM_u, MM_v и MM_w являются касательными к координатным линиям u, v и, соответственно, w в точке M. Следовательно, ортогональность системы C^* равносильна системе условий:

$$\gamma_{uv} = \gamma_{vw} = \gamma_{uw} = 0.$$

Непосредственная проверка показывает, что для числа

$$J = \begin{vmatrix} \gamma_{uu} & \gamma_{uv} & \gamma_{uw} \\ \gamma_{uv} & \gamma_{vv} & \gamma_{vw} \\ \gamma_{uw} & \gamma_{vw} & \gamma_{ww} \end{vmatrix}$$

справедливо равенство $J = -\Phi$, где Φ — значение метрической формы φ от координат плоскости $M_uM_vM_w$ в репере R^*. Следовательно, число J — инвариант группы G, характеризующий сопровождающий четырехвершинник $MM_uM_vM_w$ точки M. Поскольку M — собственная точка пространства $\widehat{H}^3$, ее абсолютная полярная плоскость $M_uM_vM_w$

является расширенной гиперболической. Согласно условию (1.5) для плоскости $M_uM_vM_w$ справедливо неравенство $\Phi > 0$. Таким образом, для каждой точки M области Q пространства $\widehat{H}^3$ выполняется неравенство $J < 0$. При измерении объемов конечных тел мы стремимся использовать вещественные положительные числа, поэтому в качестве *элемента объема* пространства $\widehat{H}^3$ примем число

$$dV = \sqrt{-J}\, du\, dv\, dw, \tag{2.4}$$

учитывая, что число $\sqrt{J}\, du\, dv\, dw$ является элементом объема в пространстве Лобачевского.

2.3. **Формула объема тела в пространстве $\widehat{H}^3$.** Зададим в области Q пространства $\widehat{H}^3$ конечное тело F, гомеоморфное замыканию внутренности овальной поверхности пространства $\mathbb{P}^3$. Условимся, что числовая область $\overline{F}$, где $\overline{F} \subset \overline{Q} \subset \mathbb{R}^3$, определяет тело F в координатной системе C^* на области Q. Тогда согласно формуле (2.4) объем V тела F может быть выражен по формуле

$$V = \iiint\limits_{\overline{F}} \sqrt{-J}\, du\, dv\, dw. \tag{2.5}$$

Заметим, что при вычислении по формуле (2.5) объемов конечных тел пространства Λ^3 будем получать вещественные отрицательные значения. Этот факт особенно важен при измерении объемов тел, принадлежащих частично каждому из пространств $\widehat{H}^3$ и Λ^3. Скоординировать вычисления объемов таких тел можно с помощью формулы

$$V_{\Lambda^3}(F) = -V_{\widehat{H}^3}(F),$$

где через $V_{\Lambda^3}(F)$ и $V_{\widehat{H}^3}(F)$ обозначен объем тела F пространства $\mathbb{H}^3$, вычисленный в геометрии пространства Λ^3 и $\widehat{H}^3$ соответственно. Доказательство этой формулы мы не приводим, поскольку в данной работе все вычисления проводим для конечных тел пространства $\widehat{H}^3$.

3. Ортогональная криволинейная система координат $C_{2,E}$

3.1. **Построение.** Выберем в пространстве $\widehat{H}^3$ произвольный канонический репер $R^* = \{A_1, A_2, A_3, A_4, E\}$ первого типа, его координатную плоскость $A_1A_2A_4$ обозначим α. Вершина A_4 репера R^* расположена внутри абсолюта, поэтому α — расширенная гиперболическая плоскость. Пусть E_3 — ортогональная проекция точки E на плоскость α: $E_3 = A_3E \cap \alpha$, (Рис. 3.1). Прямой квазиугол (см. [18, п. 4.3.4]) плоскости α между прямыми A_1A_2 и A_1A_4, содержащий точку E_3, обозначим β_1. Прямую полуплоскость (см. там же) между прямыми A_1A_4 и A_2A_4, содержащую E_3, обозначим β_2. Пусть ξ — прямой двугранный квазиугол (см. [6]) между плоскостями α и $A_1A_2A_3$, содержащий точку E.

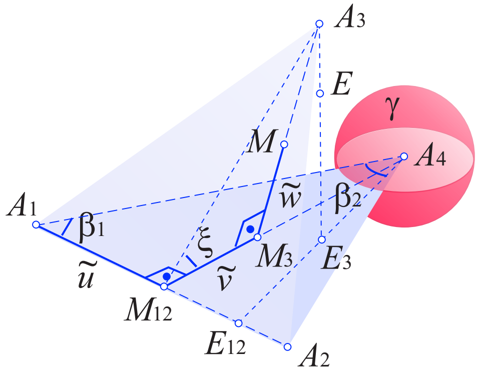

Рис. 3.1. Абсолют γ, система координат $C_{2,E}$

Набор фигур $\{A_1, A_1A_2, \alpha, \beta_1, \beta_2, \xi\}$ назовем *эллиптической системой координат второго рода* и обозначим $C_{2,E}$. Точку A_1, прямую A_1A_2 и плоскость α назовем соответственно *началом*, *осью* и *базой* системы координат $C_{2,E}$. Точку A_3 назовем *полюсом*, углы β_1, β_2, ξ — *координатными углами* этой системы.

Для произвольной точки M, лежащей во внешней области пространства $\widehat{H}^3$ относительно светового конуса точки A_3, введем следующие обозначения:

- M_3 — ортогональная проекция точки M на плоскость α:
$$M_3 = A_3M \cap \alpha;$$
- M_{12} — ортогональная проекция в плоскости α точки M_3 на прямую A_1A_2:
$$M_{12} = A_4M_3 \cap A_1A_2;$$
- $\widetilde{u}$ — эллиптический отрезок между точками A_1, M_{12}, полностью или большей своей частью принадлежащий полуплоскости β_2;
- $\widetilde{v}$ — гиперболический отрезок между точками M_3, M_{12};
- $\widetilde{w}$ — эллиптический отрезок между точками M, M_3, полностью или большей своей частью принадлежащий двугранному квазиуглу ξ.

Координатами точки M в системе $C_{2,E}$ назовем тройку чисел

$$u = \frac{|\widetilde{u}|}{\rho}, \qquad v = \varepsilon\frac{|\widetilde{v}|}{\rho}, \qquad w = \frac{|\widetilde{w}|}{\rho}, \tag{3.1}$$

где $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$), если точка M_3 принадлежит (не принадлежит) квазиуглу β_1. Координаты (u, v, w) точки M удовлетворяют условия:

$$u \in [0, \pi), \qquad v \in \mathbb{R}, \qquad w \in [0, \pi).$$

3.2. **Связь между криволинейными и собственными координатами точки.** Приведем вывод формул параметризации области Q в системе координат $C_{2,E}$, представленных в тезисах [27].

Пусть точка M, принадлежащая внешней области пространства $\widehat{H}^3$ относительно светового конуса точки A_3, задана в системе $C_{2,E}$ координатами (u, v, w). В репере $R^* = \{A_1, A_2, A_3, A_4, E\}$, присоединенном к системе $C_{2,E}$, точку M зададим проективными координатами $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ и соответствующими им по формулам (2.1) собственными координатами $(\bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3 : \bar{x}_4)$. Тогда проективные координаты точек M_3 и M_{12} в репере R^* можно записать в виде $(x_1 : x_2 : 0 : x_4)$ и $(x_1 : x_2 : 0 : 0)$ соответственно.

По формулам (1.2), (1.3) выразим длины отрезков $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ и $\widetilde{w}$ через координаты точек A_1, M, M_3, M_{12}. С учетом обозначений (3.1) получаем:

$$\cos u = \pm \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \qquad \cosh v = \pm \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_4^2}},$$
$$\cos w = \pm \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}}. \tag{3.2}$$

Из выражений (3.2) находим зависимости между проективными координатами точки M:

$$x_2^2 = x_1^2 \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}, \qquad x_4^2 = x_1^2 \frac{\sinh^2 v}{\cos^2 u \cosh^2 v},$$
$$x_3^2 = x_1^2 \frac{\sin^2 w}{\cos^2 u \cosh^2 v \cos^2 w}. \tag{3.3}$$

Очевидно, что в репере R^* условия (3.3) выполняются и для собственных координат $(\bar{x}_p)$ точки M, определенных равенствами (2.1). Кроме того, собственные координаты подчинены условию (2.2).

Из системы требований (2.2), (3.3) находим выражения собственных координат точки M в репере R^* через ее криволинейные координаты в системе $C_{2,E}$:

$$\bar{x}_1 = \rho \cos u \cosh v \cos w, \qquad \bar{x}_2 = \rho \sin u \cosh v \cos w,$$
$$\bar{x}_3 = \rho \sin w, \qquad \bar{x}_4 = \rho \sinh v \cos w, \tag{3.4}$$

где $u \in [0, \pi)$, $v \in \mathbb{R}$, $w \in [0, \pi)$.

3.3. Элемент объема пространства $\widehat{H}^3$ в системе $C_{2,E}$. Выражение элемента объема пространства $\widehat{H}^3$ в координатах системы $C_{2,E}$ представлено в тезисах [27], дадим его обоснование.

Пусть параметризация (3.4) определяет в репере R^* собственные координаты точки M из внешней относительно светового конуса точки A_3 области пространства $\widehat{H}^3$. Тогда точки M_u, M_v и M_w в репере R^* заданы координатами:

$$M_u(-\rho \sin u \, \cosh v \, \cos w : \rho \cos u \, \cosh v \, \cos w : 0 : 0),$$
$$M_v(\rho \cos u \, \sinh v \, \cos w : \rho \sin u \, \sinh v \, \cos w : 0 : \rho \cosh v \, \cos w),$$
$$M_w(-\rho \cos u \, \cosh v \, \sin w : -\rho \sin u \, \cosh v \, \sin w : \rho \cos w : -\rho \sinh v \, \sin w).$$

Вычисляя в параметризации (3.4) значения форм φ и $\overline{\varphi}$ от координат точек M_u, M_v, M_w, получаем равенства

$$\gamma_{uu} = \rho^2 \cosh^2 v \, \cos^2 w, \qquad \gamma_{vv} = -\rho^2 \cos^2 w, \qquad \gamma_{ww} = \rho^2,$$
$$\gamma_{uv} = \gamma_{uw} = \gamma_{vw} = 0,$$

из которых следует, что система координат $C_{2,E}$ является ортогональной, а элемент объема пространства $\widehat{H}^3$ задан формулой

$$dV = \rho^3 \cosh v \, \cos^2 w \, du \, dv \, dw. \tag{3.5}$$

Учитывая формулу (3.5) и ограничения на область Q задания системы $C_{2,E}$, объем V тела F, заданного во внешней области относительно светового конуса точки A_3 областью $\overline{F}$, $\overline{F} \subset \overline{Q} \subset \mathbb{R}^3$, найдем по формуле

$$V = \rho^3 \iiint\limits_{\overline{F}} \cosh v \, \cos^2 w \, du \, dv \, dw. \tag{3.6}$$

4. Вычисление объемов тел пространства $\widehat{H}^3$ в системе $C_{2,E}$

4.1. Основные определения. Пусть α — расширенная гиперболическая плоскость пространства $\mathbb{H}^3$, A — полюс плоскости α относительно абсолютной овальной поверхности γ. В собственной для пространства $\widehat{H}^3$ компоненте плоскости α зададим замкнутую двустороннюю линию σ. Линия σ разбивает α на две компоненты, одна из которых гомеоморфна диску (или, на языке проективной геометрии, внутренней области проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ относительно овальной линии). Назовем эту компоненту *внутренностью* линии σ, ее замыкание обозначим σ_o и условимся, что σ_o не содержит точек абсолюта. Коническая поверхность с вершиной A и направляющей σ, образованная ортогональными к плоскости α эллиптическими прямыми, разбивает пространство $\widehat{H}^3$ на две компоненты. Рассмотрим ту из этих компонент, которая не содержит абсолют γ. Плоскость α разбивает эту компоненту на две конгруэнтные части, замыкание каждой из них назовем *конечным ортогональным h-конусом* с *основанием* σ_o и *вершиной* A, указывая символом h тип плоскости основания конуса.

По определению каждая прямолинейная образующая конечного ортогонального h-конуса пространства $\widehat{H}^3$ равна половине эллиптической прямой, следовательно, ее длина равна $\pi\rho/2$ (см., например, [18, п. 4.4.1]), где ρ — радиус кривизны пространства $\widehat{H}^3$.

Если, в частности, в данном определении область σ_o является n-реберником (см. [23, раздел 2]), т. е. двусторонним n-вершинником с ограниченной им областью плоскости, то ортогональный h-конус назовем *конечной ортогональной h-пирамидой*.

В пространстве $\widehat{H}^3$ существуют четыре типа сфер: *гиперсферы* с комплексными радиусами и центрами в идеальных точках; *эллиптические сферы* с вещественными эллиптическими радиусами и центрами в собственных точках пространства $\widehat{H}^3$; *гиперболические сферы* с вещественными гиперболическими радиусами и центрами в собственных точках; *орисферы* с центрами на абсолюте.

Гиперсферы, гиперболические сферы и орисферы проективно эквивалентны, они являются овальными поверхностями. Эллиптические сферы являются кольцевыми поверхностями, т. е. невырожденными поверхностями второго порядка сигнатуры 0 (см. [10, §136]), они сплошь покрыты прямолинейными образующими двух семейств. В евклидовом пространстве кольцевые поверхности представлены однополостными гиперболоидами и гиперболическими параболоидами. В пространстве $\widehat{H}^3$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, эллиптические сферы могут быть определены метрически как множества точек этого пространства, удаленных от собственной точки, называемой *центром* сферы, на эллиптическое расстояние r, $r \in (0, \pi\rho/2)$, называемое *радиусом* сферы. Абсолютную полярную плоскость центра эллиптической сферы назовем *базой* этой сферы. Поскольку эллиптическое расстояние от собственной точки пространства $\widehat{H}^3$ до ее абсолютной полярной плоскости равно $\pi\rho/2$, эллиптическая сфера радиуса r является эквидистантной поверхностью *высоты* $\pi\rho/2 - r$.

Рассмотрим в пространстве $\widehat{H}^3$ конечный ортогональный h-конус F с основанием σ_o и вершиной A. Эллиптическая сфера с центром A

рассекает h-конус F на две связные компоненты. Ту компоненту, которая содержит основание σ_o (вершину A), назовем *сферическим h-бочонком* (*сферическим h-сектором*) h-конуса F. Высоту (радиус) секущей эллиптической сферы назовем *высотой* (*радиусом*) сферического h-бочонка (сферического h-сектора).

4.2. **Объемы тел, ограниченных ортогональным h-конусом.** Установим зависимость объема конечного ортогонального h-конуса пространства $\widehat{H}^3$ от площади его основания. Для этого рассмотрим конечный ортогональный h-конус F с вершиной A и основанием σ_o в плоскости α. Все прямолинейные образующие конуса F принадлежат внешней относительно светового конуса точки A области пространства $\widehat{H}^3$. Выберем на этой области координатную систему $C_{2,E}$ с полюсом в точке A и базой α. Пусть область σ_o задана в системе $C_{2,E}$ числовой областью $\overline{S}$ изменения параметров u, v. Полагая в формулах (3.4) $w = 0$, вычислим по схеме из работы [25] площадь S области σ_o:

$$S = \rho^2 \iint\limits_{\overline{S}} \cosh v \, du \, dv. \tag{4.1}$$

Для области $\overline{F_k}$, определяющей в системе $C_{2,E}$ сферический h-бочонок F_k с основанием σ_o и высотой m, выполняются условия: $(u, v) \in \overline{S}$ и $w \in [0, m/\rho]$. По формулам (3.6) и (4.1) находим:

$$\begin{aligned} V(F_k) &= \rho^3 \iiint\limits_{\overline{F_k}} \cosh v \, \cos^2 w \, du \, dv \, dw \\ &= \rho S \int_0^{m/\rho} \cos^2 w dw = \frac{\rho S}{4} \left(\frac{2m}{\rho} + \sin \frac{2m}{\rho} \right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

По формуле (4.2) при $m = \pi\rho/2$ получим объем $V(F)$ ортогонального h-конуса. Объем сферического h-сектора F_s радиуса $r = \pi\rho/2 - m$ найдем по формуле $V(F_s) = V(F) - V(F_k)$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *В пространстве $\widehat{H}^3$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, объемы ортогонального h-конуса F, сферического h-бочонка F_k высотой m и сферического сектора F_s радиуса r могут быть вычислены соответственно по формулам*

$$\begin{gathered} V(F) = \frac{\pi \rho S}{4}, \qquad V(F_k) = \frac{\rho S}{4} \left(\frac{2m}{\rho} + \sin \frac{2m}{\rho} \right), \\ V(F_s) = \frac{\rho S}{4} \left(\frac{2r}{\rho} - \sin \frac{2r}{\rho} \right), \end{gathered} \tag{4.3}$$

где S — площадь основания тела.

Первая формула из (4.3) позволяет, в частности, вычислить объем конечной ортогональной h-пирамиды пространства $\widehat{H}^3$. Например, согласно теоремам 1, 2 справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *В гиперболическом пространстве $\widehat{H}^3$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, объем V конечной ортогональной h-пирамиды с мерами $\widehat{A}_1, \ldots, \widehat{A}_n$ плоских углов основания, не содержащего параболических ребер, может быть вычислен по формуле*

$$V = \frac{\pi\rho^3}{4}\left(\sum_{j=1}^{n}\widehat{A}_j - i\pi(n-2)\right).$$

Если в основании конечной ортогональной h-пирамиды пространства $\widehat{H}^3$ лежит прямоугольный трехреберник с длиной a (b) эллиптического $($гиперболического$)$ катета, то ее объем V может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{\pi\rho^3}{4}\ln\frac{\sinh\frac{b}{\rho} + \cosh\frac{b}{\rho}\sin\frac{a}{\rho}}{\sin\frac{a}{\rho} + \cos\frac{a}{\rho}\sinh\frac{b}{\rho}}.$$

При вычислении в пространстве $\widehat{H}^3$ объемов пирамид с гиперболическим основанием могут быть полезны формулы площадей n-реберников различных видов в гиперболической плоскости положительной кривизны из работ [11], [21], [20], [22].

5. Благодарности

Автор выражает благодарность проф. Макарову Виталию Сергеевичу за обсуждение работы и полезные советы, направленные на ее усовершенствование.

Литература

[1] J. Bolyai. *Appendix. The theory of space.* Budapest : Akadémiai Kiadó, 1987.

[2] R. Kellerhals. On the volume of hyperbolic polyhedra. *Math. Ann.*, 285:541–569, 1989.

[3] J. H. Lambert. *Die Theorie der Parallellinien.* Leipziger : Leipziger Magazin für Reine und Angewandte Mathematik, 1786.

[4] J. Murakami, A. Ushijima. A volume formula for hyperbolic tetrahedral in terms of edge lengths. *Journal of Geometry*, 83(1-2):153–163, 2005.

[5] L. N. Romakina. The area of a generalized polygon without parabolic edges of a hyperbolic plane of positive curvature. *Asian Journal of Mathematics and Computer*, 10(4):293–310, 2016.

[6] L. N. Romakina. Dihedrons of a hyperbolic three-space of positive curvature. *International Electronic Journal of Geometry*, 9(2):50–58, 2016.

[7] L. Schläfli. *Theorie der vielfachen Kontinuität. Gesammelte mathematishe Abhandlungen.* Basel : Birkhauser, 1950.
[8] Н. В. Абросимов. Об объемах многогранников в пространствах постоянной кривизны. *Вестник Кем. ун-та*, 3(1):7–13, 2011.
[9] Э. Б. Винберг. Объемы неевклидовых многогранников. *Успехи мат. наук*, 48(2(290)):17–46, 1993.
[10] Н. В. Ефимов. *Высшая геометрия.* М. : Наука, 1971.
[11] В. А. Клычкова. Трипрямоугольник гиперболической плоскости положительной кривизны. *Современный взгляд на будущее науки: сб. ст. междунар. научно-практ. конф. (25 мая, 2016). Томск*, pages 14–17, 2016.
[12] Б. Л. Лаптев. Объем пирамиды в пространстве Лобачевского. *Учен. зап. Казан. ун-та*, 114(2):53–77, 1954.
[13] Н. И. Лобачевский. Воображаемая геометрия. *Учен. зап. Казан. ун-та*, 1:3–88, 1835.
[14] Б. А. Розенфельд. *Неевклидовы пространства.* М. : Наука, 1969.
[15] Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский. *Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства.* М. : МЦНМО, 2003.
[16] Л. Н. Ромакина. *Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей.* Саратов : Научная книга, 2008.
[17] Л. Н. Ромакина. Аналоги формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны. *Сиб. электрон. матем. изв.*, 10:393–407, 2013.
[18] Л. Н. Ромакина. *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 частях. Ч. 1: Тригонометрия.* Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013.
[19] Л. Н. Ромакина. *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 частях. Ч. 2: Преобразования и простые разбиения.* Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013.
[20] Л. Н. Ромакина. О площади эллиптического четырехугольника Саккери на гиперболической плоскости положительной кривизны. *Математика. Механика*, 15:66–69, 2013.
[21] Л. Н. Ромакина. Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны. *Дальневост. матем. журн.*, 13(1):127–147, 2013.
[22] Л. Н. Ромакина. Аналоги формулы Герона для трехреберников типов $eee(i)$, $eee(iii)$ гиперболической плоскости положительной кривизны. *Математика. Механика*, 17:52–55, 2015.
[23] Л. Н. Ромакина. Классификация тетраэдров с негиперболическими гранями в гиперболическом пространстве положительной кривизны. *Чебышевский сб.*, 16(2):208–221, 2015.
[24] Л. Н. Ромакина. Развитие представлений о геометрии окружающего пространства. *Сборник научных работ X Междунар. научн. конф. Евразийского Научного Объединения. М. : ЕНО*, 1(10):18–21, 2015.
[25] Л. Н. Ромакина. К теории площадей гиперболической плоскости положительной кривизны. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, 99(113):139–154, 2016.
[26] Л. Н. Ромакина. Объем монополярного тетраэдра в гиперболическом пространстве положительной кривизны. *Сборник научных работ XXVII Междунар. научн. конф. Евразийского Научного Объединения. М. : ЕНО*, 1(5(27)):27–30, 2017.
[27] Л. Н. Ромакина. Элементы объема в гиперболическом пространстве положительной кривизны. *Algebraic and geometric methods of analysis: book of abstracts of*

International scientific conference (May 31 - June 5, 2017). Odessa, Ukraine, pages 135–136, 2017.

[28] И. Х. Сабитов. Алгебраические методы решения многогранников. *Успехи мат. наук*, 66(3):445–505, 2011.

Поступила в редакцию 26 мая 2017, принята к печати 17 августа 2017.

Людмила Николаевна Ромакина
Саратовский государственный университет, Россия
Email: romakinaln@mail.ru
ORCID: orcid.org/0000-0002-3695-2076