Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 10, no. 3-4 (2017) pp. 29–43

Інваріантні об'єкти конформно голоморфно-проективних перетворень ЛКК-многовидів

Є. В. Черевко, О. Є. Чепурна

Abstract. The article is devoted to the problem of holomorphically projective transformations of locally conformal Kähler manifolds. J. Mikes and Z. Radulovich proved that a locally conformal Kähler manifold does not admit finite nontrivial holomorphically projective mappings for a Levi-Civita connection. Earlier we also shown that a locally conformal Kähler manifold does not admit as well nontrivial infinitesimal holomorphically projective transformations for the Levi-Civita connection. But since Weyl connection defined by Lee form on a locally conformal Kähler manifold is F-connection, it may have nontrivial infinitesimal holomorphically projective transformations.

In the present paper we rewrite the system of partial differential equations for Levi-Civita connection and introduce so called infinitesimal conformal holomorphically projective transformations. This allows us to obtain necessary and sufficient conditions for a locally conformal Kähler manifold to have a group of infinitesimal conformal holomorphically projective transformations. We also calculate the number of parameters for such group, and describe tensor and non-tensor invariants preserved by group tansformations. Finally, we show that a vector field generating infinitesimal conformal holomorphically projective transformations of a compact locally conformal Kähler manifold is contravariant almost analytic.

Ключові слова: ермітові многовиди, конформно келерові многовиди, форма Лі, конформно голоморфно-проективні перетворення.

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v10i3-4.772

Анотація. Статтю присвячено проблемі голоморфно-проективних перетворень. Й. Мікеш та Ж. Радулович показали, що локально конформно-келерові многовиди не дозволяють скінченних нетривіальних голоморфно проективних відображень для зв'язності Леві-Чівіта, а автори даної статті нещодавно довели, що ці многовиди не дозволяють також і нетривіальних інфінітезимальних голоморфно-проективних перетворень для зв'язності Леві-Чівіта. Але, оскільки зв'язність Вейля, що визначається на ЛКК-многовиді формою Лі, є F-зв'язністю, то нетривіальні інфінітезимальні голоморфно-проективні перетворення є можливими для неї. Якщо у такій системі диференціальних рівнянь у частинних похідних перейти до зв'зності Леві-Чівіта, то можна таким чином ввести конформно голоморфно-проективні перетворення.

В даній роботі отримано необхідні та достатні умови того, щоб локально конформно-келеровий многовид дозволяв нетривіальну групу конформно голоморфно проективних перетворень та обчислено максимальну кількість параметрів цієї групи. Також знайдено інваріантні об'єкти цих перетворень, один тензорного, другий нетензорного характеру, і доведено, що на компактному локально конформно-келеровому многовиді векторне поле, що генерує нетривіальні конформно голоморфно-проективні перетворення є контраваріантним майже аналітичним.

1. Вступ

Об'єктом дослідження в цій статті є локально конформно-келерові многовиди для яких $dim(M^n) = n = 2m > 2$. Конформно-келеровим многовидам присвячені роботи багатьох дослідників. Зокрема, локально конформно-келерові многовиди розглядались у роботах [4], [10], у монографії [1], голоморфно-проективні відображення многовидів досліджувалися у працях [12], [3]. Велику увагу інфінітезимальним голоморфно-проективним перетворенням майже комплексних многовидів приділено у монографії [6]. У роботі [13] доведено, що не існує інфінітезимальних голоморфно-проективних перетворень локально конформно-келерових многовидів у зв'язності Леві-Чівіта та введено конформно голоморфно-проективні перетворення. У цій роботі ми продовжуємо дослідження і отримуємо інваріантні об'єкти цих перетворень.

2. Попередні відомості

2.1. **ЛКК-многовиди.** Спочатку дамо декілька необхідних означень.

Означення 2.2. Майже комплексною структурою J називають такий афінор J^i_j, що:

$$J^i_\alpha J^\alpha_j = -\delta^i_j. \tag{2.1}$$

Тут δ^i_j – символ Кронекера.

Означення 2.3. Многовид, на якому задано майже комплексну структуру J, називають майже комплексним многовидом.

Означення 2.4. Майже комплексний многовид є майже ермітовим, якщо на ньому задано ермітову метрику:

$$J_i^\alpha J_j^\beta g_{\alpha\beta} = g_{ij}. \tag{2.2}$$

Майже ермітовий многовид позначаємо (M^n, J, g). Тут число n є дійсною розмірністю многовиду, m – комплексною, тому $n = 2m$.

Означення 2.5. Майже ермітовий многовид (M^n, J, g) є ермітовим, якщо майже комплексна структура є інтегровною [6].

Зауважимо, якщо майже комплексна структура J та многовид M^n будуть належати класу C^ω, достатньою умовою інтегровності майже комплексної структури є тотожна рівність нулю тензора Нейєнхейса:

$$N_{ij}^k = J_i^\alpha \left(\partial_j J_\alpha^k - \partial_\alpha J_j^k\right) - J_j^\alpha \left(\partial_i J_\alpha^k - \partial_\alpha J_i^k\right) = 0 \tag{2.3}$$

або, що еквівалентно

$$J_{i,j}^k = J_i^\alpha J_j^\beta J_{\alpha,\beta}^k. \tag{2.4}$$

Комою ми позначаємо коваріантну похідну у зв'язності, узгодженій з рімановою метрикою g_{ij}.

Якщо до того ж на ермітовому многовиді (M^n, J, g) має місце

$$J_{i,j}^k = 0, \tag{2.5}$$

то він є *келеровим.*

Означення 2.6. Ермітовий многовид M^n називається *локально конформно-келеровим* (коротше, ЛКК-) *многовидом*, якщо існує відкрите покриття $\mathfrak{U} = \left\{U_\alpha\right\}$ многовиду M та система $\Sigma = \{\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}\}$ гладких функцій таких, що $\left\{J|_{U_\alpha}, \hat{g}_\alpha = e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\right\}$ – келерова структура для будь якого α. Перехід від метрики $g|_{U_\alpha}$ до метрики $e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}$ має назву *локально конформного перетворення структури.* Функція σ має назву *визначальної функції* конформного перетворення [11].

Відомо, що на ЛКК-многовиді форма Лі (Lee form), компоненти якої визначаються формулою [9]

$$\omega = \frac{1}{m-1}\delta\Omega \circ J \qquad \text{або} \qquad \omega_i = -\frac{2}{n-2} J_{\beta,\alpha}^\alpha J_i^\beta, \tag{2.6}$$

має бути замкненою:

$$d\omega = 0.$$

Коваріантну похідну майже комплексної структури ЛКК-многовиду можна знайти за формулою:

$$J^k_{i,j} = \frac{1}{2}\big(\delta^k_j J^\alpha_i \omega_\alpha - \omega^k J_{ij} - J^k_j \omega_i + J^k_\alpha \omega^\alpha g_{ij}\big). \tag{2.7}$$

Має місце теорема [1, с. 2].

Теорема 2.7. *Локальна зв'язність Леві-Чівіта* $\hat{\nabla}^\alpha$ *локальної келерової метрики* $\hat{g}_\alpha$ *продовжується до глобально визначеної лінійної зв'язності без скруту*

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}\omega(X)Y - \frac{1}{2}\omega(Y)X + \frac{1}{2}g(X,Y)B \tag{2.8}$$

для будь яких $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. *Більше того, є справедливим, що*

$$\hat{\nabla} g = \omega \otimes g. \tag{2.9}$$

Зв'язність (2.8) називається *зв'язністю Вейля (Weyl connection)* ЛКК-многовиду (M^n, J, g). Вона є *майже комплексною* або *F-зв'язністю*, тобто такою, що

$$\hat{\nabla}_X J = 0,$$

або у локальних координатах

$$J^k_{i|j} = 0.$$

2.8. **Інфінітезимальні дифеоморфізми многовидів.**

Означення 2.9. Перетворення многовиду M^n

$$\overline{x}^h = x^h + \epsilon \xi^h(x^1, x^2, \ldots, x^n), \tag{2.10}$$

де ϵ – довільний малий параметр незалежний від x^i має назву *інфінітезимального перетворення* многовиду M^n. Вектор $\xi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ має назву *генератора перетворення.*

Похідна Лі (Lie derivative) тензора $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ типу (p,q) уздовж векторного поля ξ в координатах має вигляд [8, с. 196]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\xi T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q,s}\xi^s + T^{i_1\ldots i_p}_{k j_2\ldots j_q}\xi^k{}_{,j_1} + \ldots + T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots k}\xi^k{}_{,j_q} - \\ - T^{l i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\xi^{i_1}{}_{,l} - \ldots - T^{i_1 i_2\ldots l}_{j_1\ldots j_q}\xi^{i_p}{}_{,l}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Зокрема, для похідної Лі метричного тензора g отримуємо:

$$\mathfrak{L}_\xi g_{ij} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i}. \tag{2.12}$$

Якщо многовид M^n зазнав перетворення (2.10), то метричний тензор $\overline{g}$ перетвореного $\overline{M}^n$ матиме вигляд [14, с. 275]

$$\overline{g}_{ij} = g_{ij} + h_{ij}\epsilon, \tag{2.13}$$

де $h_{ij} = \mathfrak{L}_\xi g_{ij} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i}$. В той самий час, похідна Лі об'єкту зв'язності Γ^h_{jk} може бути знайдена за формулою [5, с. 8]

$$\mathfrak{L}_\xi \Gamma^h_{jk} = \xi^h{}_{,jk} + \xi^m R^h_{jmk}. \tag{2.14}$$

Ми можемо у (2.14) опустити індекс h, згорнувши з g_{hi}, і таким чином отримати одне з центральних рівнянь теорії інфінітезимальних перетворень:

$$\xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + g_{hi}\mathfrak{L}_\xi \Gamma^h_{jk}. \tag{2.15}$$

Вигляд доданку $g_{hi}\mathfrak{L}_\xi \Gamma^h_{jk}$ залежатиме від конкретного типу інфінітезимальних перетворень. Нас цікавить випадок, коли векторне поле

$$\xi(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

породжує перетворення, що зберігає комплексну структуру [6]:

$$\mathfrak{L}_\xi J^i_j = J^i_{j,k}\xi^k - J^\alpha_j \xi^i{}_{,\alpha} + J^i_\alpha \xi^\alpha{}_{,j} = 0. \tag{2.16}$$

Таке поле має назву *контраваріантного аналітичного* векторного поля, а інфінітезимальне перетворення називають *голоморфним.* Варто зауважити, що оскільки диффеpенціювання Лі комутує з операцією зовнішнього диффеpенціювання

$$d\mathfrak{L}_\xi \omega = \mathfrak{L}_\xi d\omega, \tag{2.17}$$

то будь-які інфінітезимальні перетворення зберігають замкненість форми Лі.

3. Конформно голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення

3.1. **Алгебра Лі векторних полів, що визначають конформно голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення.** Стосовно голоморфно-проективних інфінітезимальних перетворень, у роботі [13] було доведено теорему.

Теорема 3.2. *ЛКК-многовид M^n не має нетривіальних інфінітезимальних перетворень із збереженням комплексної структури та її коварінтної похідної у зв'язності Леві-Чівіта, зокрема таких, що*

$$\mathfrak{L}_\xi \Gamma^h_{ij} = \rho_j \delta^h_i + \rho_i \delta^h_j - \rho_t J^t_i J^h_j - \rho_t J^t_j J^h_i.$$

У роботі [13] було запропоновано, користуючись ідеями викладеними в [2], ввести інфінітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення ЛКК-многовидів. Система рівнянь, які на ЛКК-многовиді (M^n, J, g) визначають конформно голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення із збереженням комплексної структури має вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\xi_{i,j} = \xi_{ij},\\
&\rho_{,i} = \rho_i,\\
&\xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \tfrac{1}{2}\Big(\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k} g_{ij} + \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j} g_{ik} - \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i} g_{jk} -\\
&\qquad - \omega_i \mathfrak{L}_\xi g_{jk} + \omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{i\alpha}) g_{jk}\Big) +\\
&\qquad + \rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} - \rho_t J^t_j J_{ki} - \rho_t J^t_k J_{ji},\\
&\rho_{i,j} = \tfrac{1}{2}\omega^t\rho_t g_{ij} - \tfrac{1}{2}\rho_i\omega_j - \tfrac{1}{2}\rho_j\omega_i +\\
&\qquad + \tfrac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi\Big(R_{ij} - \tfrac{n-2}{2}\big(\omega_{i,j} + \frac{\omega_i\omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{ij}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\Big),\\
&\mathfrak{L}_\xi J^i_j = \xi^k J^i_{j,k} - J^\alpha_j \xi^i_{,\alpha} + J^i_\alpha \xi^\alpha_{,j} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

де $||\omega||^2 = \omega_i\omega_j g^{ij}$ та $\Delta_2\omega = \omega_{i,j}g^{ij}$. Дійсно, оскільки на ЛКК-многовиді існує F-зв'язність Вейля, то у цій зв'язності можна визначити голоморфно-проективні перетворення. У відповідній системі рівнянь голоморфно-проективних перетворень у F-зв'язності Вейля ми перейшли до зв'язності Леві-Чівіта ЛКК-многовиду і таким чином отримали систему (3.1).

Нехай контраваріантний аналітичний вектор ξ породжує інфінітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення на ЛКК-многовиді (M^n, g, J). Похідна Лі об'єкту зв'язності Леві-Чівіта матиме вигляд

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}_\xi\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2}\Big(&\delta^h_j\big(\mathfrak{L}_\xi\omega_i\big) + \delta^h_i\big(\mathfrak{L}_\xi\omega_j\big) -\\
&- g^{hr}\big(\mathfrak{L}_\xi\omega_r\big)g_{ij} - \omega^h\mathfrak{L}_\xi g_{ij} + g^{h\beta}\omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{\beta\alpha})g_{ij}\Big) +\\
&+ \rho_j\delta^h_i + \rho_i\delta^h_j - \rho_t J^t_i J^h_j - \rho_t J^t_j J^h_i.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Ковектор ρ з системи (3.1) має назву *асоційованого ковектору* до вектору ξ. Припустимо, що існують два контраваріантних аналітичних вектори ξ та η, кожен з яких породжує інфінітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення. Їхніми асоційованими ковекторами нехай є відповідно ρ та μ. Причому, поле ζ є комутатором полів ξ та η:

$$\zeta^i = [\xi, \eta]^i = \xi^t\partial_t\eta^i - \eta^t\partial_t\xi.$$

Відомо, що для будь-якого геометричного об'єкту Λ є справедливою формула [6, p. 20]

$$\mathfrak{L}_{[\xi,\eta]}\Lambda = \mathfrak{L}_\xi\mathfrak{L}_\eta\Lambda - \mathfrak{L}_\eta\mathfrak{L}_\xi\Lambda. \tag{3.3}$$

У нашому випадку (3.3) дає

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{[\xi,\eta]}\Gamma^h_{ij} &= \mathfrak{L}_\xi\mathfrak{L}_\eta\Gamma^h_{ij} - \mathfrak{L}_\eta\mathfrak{L}_\xi\Gamma^h_{ij} = \\
&= \frac{1}{2}\Big(\delta^h_j\big(\mathfrak{L}_\xi\mathfrak{L}_\eta\omega_i\big) + \delta^h_i\big(\mathfrak{L}_\xi\mathfrak{L}_\eta\omega_j\big) - \\
&\qquad - g^{hr}\big(\mathfrak{L}_\xi\mathfrak{L}_\eta\omega_r\big)g_{ij} - \omega^h\mathfrak{L}_\xi\mathfrak{L}_\eta g_{ij} + g^{h\beta}\omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi\mathfrak{L}_\eta g_{\beta\alpha})g_{ij}\Big) + \\
&\qquad + \mathfrak{L}_\xi\mu_j\delta^h_i + \mathfrak{L}_\xi\mu_i\delta^h_j - \mathfrak{L}_\xi\mu_t J^t_i J^h_j - \mathfrak{L}_\xi\mu_t J^t_j J^h_i - \\
&\quad - \frac{1}{2}\Big(\delta^h_j\big(\mathfrak{L}_\eta\mathfrak{L}_\xi\omega_i\big) + \delta^h_i\big(\mathfrak{L}_\eta\mathfrak{L}_\xi\omega_j\big) - \\
&\qquad\quad - g^{hr}\big(\mathfrak{L}_\eta\mathfrak{L}_\xi\omega_r\big)g_{ij} - \omega^h\mathfrak{L}_\eta\mathfrak{L}_\xi g_{ij} + g^{h\beta}\omega^\alpha(\mathfrak{L}_\eta\mathfrak{L}_\xi g_{\beta\alpha})g_{ij}\Big) - \\
&\qquad\quad - \mathfrak{L}_\eta\rho_j\delta^h_i - \mathfrak{L}_\eta\rho_i\delta^h_j + \mathfrak{L}_\eta\rho_t J^t_i J^h_j + \mathfrak{L}_\eta\rho_t J^t_j J^h_i,
\end{aligned}
$$

тобто,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{[\xi,\eta]}\Gamma^h_{ij} = \mathfrak{L}_\zeta\Gamma^h_{ij} = \tfrac{1}{2}\Big(&\delta^h_j\big(\mathfrak{L}_\zeta\omega_i\big) + \delta^h_i\big(\mathfrak{L}_\zeta\omega_j\big) - g^{hr}\big(\mathfrak{L}_\zeta\omega_r\big)g_{ij} - \\
&- \omega^h\mathfrak{L}_\zeta g_{ij} + g^{h\beta}\omega^\alpha(\mathfrak{L}_\zeta g_{\beta\alpha})g_{ij}\Big) + \\
&+ \theta_j\delta^h_i + \theta_i\delta^h_j - \theta_t J^t_i J^h_j - \theta_t J^t_j J^h_i.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Тут $\theta_i = \mathfrak{L}_\xi\mu_i - \mathfrak{L}_\eta\rho_i$ – асоційований ковектор до поля $\zeta^i = [\xi,\eta]^i$. З (3.4) ми бачимо, що $\zeta^i = [\xi,\eta]^i$ також породжує інфінітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення. Звідси випливає теорема.

Теорема 3.3. *На ЛКК-многовиді (M^n, g, J) множина контраваріантних аналітичних векторних полів, що породжують інфінітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення, утворює алгебру Лі.*

Розглянемо випадок, коли конформно голоморфно-проективні перетворення є такими, що зберігають форму Лі, тобто

$$\mathfrak{L}_\xi\omega_i = 0.$$

У такому разі (3.2) матиме вигляд

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}_\xi\Gamma^h_{ij} = \tfrac{1}{2}\big(&-\omega^h\mathfrak{L}_\xi g_{ij} + g^{h\beta}\omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{\beta\alpha})g_{ij}\big) + \\
&+ \rho_j\delta^h_i + \rho_i\delta^h_j - \rho_t J^t_i J^h_j - \rho_t J^t_j J^h_i.
\end{aligned}
$$

Якщо η також є контраваріантним аналітичним векторним полем, що породжує конформно голоморфно-проективні перетворення, зберігаючи при цьому форму Лі

$$\mathfrak{L}_\eta\omega_i = 0,$$

то очевидно, що

$$\mathfrak{L}_{[\xi,\eta]}\omega_i = 0$$

та

$$\mathfrak{L}_{[\xi,\eta]}\Gamma^h_{ij} = \tfrac{1}{2}\big(-\omega^h\mathfrak{L}_{[\xi,\eta]}g_{ij} + g^{h\beta}\omega^\alpha(\mathfrak{L}_{[\xi,\eta]}g_{\beta\alpha})g_{ij}\big)+ \\ + \theta_j\delta^h_i + \theta_i\delta^h_j - \theta_t J^t_i J^h_j - \theta_t J^t_j J^h_i,$$

де коваріантні поля μ_i та $\theta_i = \mathfrak{L}_\xi\mu_i - \mathfrak{L}_\eta\rho_i$ є відповідно асоційованими до векторних полів η_i та $\zeta^i = [\xi,\eta]^i$. Звідси випливає теорема.

Теорема 3.4. *На ЛКК-многовиді (M^n, g, J) множина контраваріантних аналітичних векторних полів, що породжують інфінітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення, зберігаючи форму Лі*

$$\mathfrak{L}_\xi\omega_i = 0$$

утворює алгебру Лі.

Зрозуміло, що ця алгебра є підалгеброю згаданої у попередній теоремі алгебри Лі контраваріантних аналітичних векторних полів, що породжують інфінітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення.

3.5. **Геометричні об'єкти, що є інваріантними при конформно голоморфно-проективних інфінітезимальних перетвореннях.** Згорнемо (3.2) за індексами h та j.

$$\mathfrak{L}_\xi\Gamma^s_{is} = \frac{n}{2}\big(\mathfrak{L}_\xi\omega_i\big) + (n+2)\rho_i.$$

Виразимо звідси асоційований ковектор ρ_i

$$\rho_i = \frac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi\Gamma^s_{is} - \frac{n}{2(n+2)}\big(\mathfrak{L}_\xi\omega_i\big),$$

та підставимо його у (3.2)

$$\mathfrak{L}_\xi\Gamma^h_{ij} = \tfrac{1}{2}\Big(\delta^h_j(\mathfrak{L}_\xi\omega_i) + \delta^h_i(\mathfrak{L}_\xi\omega_j) - \\ - g^{hr}(\mathfrak{L}_\xi\omega_r)g_{ij} - \omega^h\mathfrak{L}_\xi g_{ij} + g^{h\beta}\omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{\beta\alpha})g_{ij}\Big) + \\ + \tfrac{1}{n+2}\Big(\big(\mathfrak{L}_\xi\Gamma^s_{js} - \tfrac{n}{2}(\mathfrak{L}_\xi\omega_j)\big)\delta^h_i + \big(\mathfrak{L}_\xi\Gamma^s_{is} - \tfrac{n}{2}(\mathfrak{L}_\xi\omega_i)\big)\delta^h_j \\ - \big(\mathfrak{L}_\xi\Gamma^s_{ts} - \tfrac{n}{2}(\mathfrak{L}_\xi\omega_t)\big)J^t_i J^h_j - \big(\mathfrak{L}_\xi\Gamma^s_{ts} - \tfrac{n}{2}(\mathfrak{L}_\xi\omega_t)\big)J^t_j J^h_i\Big).$$

Розкриваючи дужки та зводячи подібні, отримуємо

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi \Gamma^h_{ij} + \tfrac{1}{2}\Big(g^{hr}(\mathfrak{L}_\xi \omega_r) g_{ij} + \omega^h \mathfrak{L}_\xi g_{ij} - g^{h\beta}\omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{\beta\alpha}) g_{ij}\Big) - \\ - \tfrac{1}{n+2}\Big(\big(\mathfrak{L}_\xi \Gamma^s_{js} + (\mathfrak{L}_\xi \omega_j)\big)\delta^h_i + \big(\mathfrak{L}_\xi \Gamma^s_{is} + (\mathfrak{L}_\xi \omega_i)\big)\delta^h_j + \\ + \big(\mathfrak{L}_\xi \Gamma^s_{ts} - \tfrac{n}{2}(\mathfrak{L}_\xi \omega_t)\big) J^t_i J^h_j + \big(\mathfrak{L}_\xi \Gamma^s_{ts} - \tfrac{n}{2}(\mathfrak{L}_\xi \omega_t)\big) J^t_j J^h_i\Big) = 0.\end{aligned} \tag{3.5}$$

З (3.5) ми бачимо, що об'єкт

$$\begin{aligned}\Pi^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \tfrac{1}{2}\omega^h g_{ij} - \tfrac{1}{n+2}\Big((\Gamma^s_{js} + \omega_j)\delta^h_i + (\Gamma^s_{is} + \omega_i)\delta^h_j + \\ + (\Gamma^s_{ts} - \tfrac{n}{2}\omega_t) J^t_i J^h_j + (\Gamma^s_{ts} - \tfrac{n}{2}\omega_t) J^t_j J^h_i\Big)\end{aligned}$$

є інваріантним під час інфінітезимальних конформно голоморфно-проективних перетворень.

Теорема 3.6. *Якщо на ЛКК-многовиді* (M^n, g, J) *контраваріантне аналітичне векторне поле* ξ *породжує інфінітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення, то об'єкт*

$$\begin{aligned}\Pi^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \tfrac{1}{2}\omega^h g_{ij} - \tfrac{1}{n+2}\Big((\Gamma^s_{js} + \omega_j)\delta^h_i + (\Gamma^s_{is} + \omega_i)\delta^h_j + \\ + (\Gamma^s_{ts} - \tfrac{n}{2}\omega_t) J^t_i J^h_j + (\Gamma^s_{ts} - \tfrac{n}{2}\omega_t) J^t_j J^h_i\Big)\end{aligned}$$

є інваріантним відносно цих перетворень:

$$\mathfrak{L}_\xi \Pi^h_{ij} = 0.$$

Далі, знайдемо ще один інваріант. Має місце тотожність [5, с. 16], яка для метричного тензору g набуває вигляду

$$\big(\mathfrak{L}_\xi g_{ij}\big)_{,k} - \mathfrak{L}_\xi g_{ij,k} = g_{is}\mathfrak{L}_\xi \Gamma^s_{kj} + g_{sj}\mathfrak{L}_\xi \Gamma^s_{ki}. \tag{3.6}$$

Враховуючи рівняння (3.6) та те, що у випадку зв'язності Леві-Чівіта $g_{ij,k} = 0$, матимемо:

$$\begin{aligned}\big(\mathfrak{L}_\xi g_{ij}\big)_{,k} = \big(\omega_\alpha \xi^\alpha\big)_{,k} g_{ij} - \omega_i \mathfrak{L}_\xi g_{jk} + \omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{i\alpha}) g_{jk} - \\ - \omega_j \mathfrak{L}_\xi g_{ik} + \omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{j\alpha}) g_{ik} + \\ + 2\rho_k g_{ij} + \rho_j g_{ki} + \rho_i g_{jk} - \rho_t J^t_j J_{ki} - \rho_t J^t_i J_{kj}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Далі, згідно з [5, с. 17], для зв'язності Леві-Чівіта має місце тотожність:

$$\mathfrak{L}_\xi R^h_{ijk} = \big(\mathfrak{L}_\xi \Gamma^h_{ik}\big)_{,j} - \big(\mathfrak{L}_\xi \Gamma^h_{ij}\big)_{,k}. \tag{3.8}$$

Підставивши (3.2) в (3.8), отримуємо

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}_\xi R^h_{ijk} = \frac{1}{2}\Big(&\delta^h_k(\omega_\alpha\xi^\alpha)_{,ij} - g^{hr}(\omega_\alpha\xi^\alpha)_{,rj}g_{ik} - \\
&- \delta^h_j(\omega_\alpha\xi^\alpha)_{,ik} + g^{hr}(\omega_\alpha\xi^\alpha)_{,rk}g_{ij} - \\
&- \big(\omega^h\mathfrak{L}_\xi g_{ik} - g^{h\beta}\omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{\beta\alpha})g_{ik}\big)_{,j} + \\
&+ \big(\omega^h\mathfrak{L}_\xi g_{ij} - g^{h\beta}\omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{\beta\alpha})g_{ij}\big)\Big)_{,k} + \\
&+ \rho_{i,j}\delta^h_k - \rho_{i,k}\delta^h_j - \\
&- \rho_{t,j}J^t_iJ^h_k - \rho_tJ^t_{i,j}J^h_k - \rho_tJ^t_iJ^h_{k,j} - \\
&- \rho_{t,j}J^t_kJ^h_i - \rho_tJ^t_{k,j}J^h_i - \rho_tJ^t_kJ^h_{i,j} + \\
&+ \rho_{t,k}J^t_iJ^h_j + \rho_tJ^t_{i,k}J^h_j + \rho_tJ^t_iJ^h_{j,k} + \\
&+ \rho_{t,k}J^t_jJ^h_i + \rho_tJ^t_{j,k}J^h_i + \rho_tJ^t_jJ^h_{i,k}.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Тепер підставимо $(3.1)_4$ в (3.9). Тоді, використовуючи (2.7) та (3.7), матимемо

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}_\xi R^h_{ijk} = {}& \tfrac{1}{2}\delta^h_k\mathfrak{L}_\xi\big(\omega_{i,j} + \tfrac{1}{2}\omega_i\omega_j - \tfrac{1}{2}||\omega||^2g_{ij}\big) - \\
&- \tfrac{1}{2}\delta^h_j\mathfrak{L}_\xi\big(\omega_{i,k} + \tfrac{1}{2}\omega_i\omega_k - \tfrac{1}{2}||\omega||^2g_{ik}\big) + \\
&+ \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}_\xi\Big(\big(\omega^h{}_{,k} + \tfrac{1}{2}\omega^h\omega_k\big)g_{ij}\Big) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}_\xi\Big(\big(\omega^h{}_{,j} + \tfrac{1}{2}\omega^h\omega_j\big)g_{ik}\Big) + \\
&+ \tfrac{1}{n+2}\bigg(\delta^h_k\mathfrak{L}_\xi\Big(R_{ij} - \tfrac{n-2}{2}\Big(\omega_{i,j} + \tfrac{\omega_i\omega_j}{2} - \tfrac{||\omega||^2g_{ij}}{2}\Big) - \tfrac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\Big) \\
&\qquad - \delta^h_j\mathfrak{L}_\xi\Big(R_{ik} - \tfrac{n-2}{2}\Big(\omega_{i,k} + \tfrac{\omega_i\omega_k}{2} - \tfrac{||\omega||^2g_{ik}}{2}\Big) - \tfrac{\Delta_2\omega g_{ik}}{2}\Big) + \\
&\qquad + J^h_kJ^t_i\mathfrak{L}_\xi\Big(R_{tj} - \tfrac{n-2}{2}\Big(\omega_{t,j} + \tfrac{\omega_t\omega_j}{2} - \tfrac{||\omega||^2g_{tj}}{2}\Big) - \tfrac{\Delta_2\omega g_{tj}}{2}\Big) - \\
&\qquad - J^h_jJ^t_i\mathfrak{L}_\xi\Big(R_{tk} - \tfrac{n-2}{2}\Big(\omega_{t,k} + \tfrac{\omega_t\omega_k}{2} - \tfrac{||\omega||^2g_{tk}}{2}\Big) - \tfrac{\Delta_2\omega g_{tk}}{2}\Big) + \\
&\qquad + J^h_iJ^t_j\mathfrak{L}_\xi\Big(R_{tk} - \tfrac{n-2}{2}\Big(\omega_{t,k} + \tfrac{\omega_t\omega_k}{2} - \tfrac{||\omega||^2g_{tk}}{2}\Big) - \tfrac{\Delta_2\omega g_{tk}}{2}\Big) - \\
&\qquad - J^h_iJ^t_k\mathfrak{L}_\xi\Big(R_{tj} - \tfrac{n-2}{2}\Big(\omega_{t,j} + \tfrac{\omega_t\omega_j}{2} - \tfrac{||\omega||^2g_{tj}}{2}\Big) - \tfrac{\Delta_2\omega g_{tj}}{2}\Big)\bigg).
\end{aligned}
$$

Перегрупуємо та зведемо подібні доданки. В результаті матимемо

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}_\xi R^h_{ijk} - \delta^h_k \mathfrak{L}_\xi\big(2\omega_{i,j} + \omega_i\omega_j - ||\omega||^2 g_{ij}\big) + \\
&\quad + \delta^h_j \mathfrak{L}_\xi\big(2\omega_{i,k} + \omega_i\omega_k - ||\omega||^2 g_{ik}\big) - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}_\xi\Big(\big({\omega^h}_{,k} + \tfrac{1}{2}\omega^h\omega_k\big)g_{ij}\Big) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}_\xi\Big(\big({\omega^h}_{,j} + \tfrac{1}{2}\omega^h\omega_j\big)g_{ik}\Big) - \\
&\quad - \tfrac{1}{n+2}\Bigg(\delta^h_k \mathfrak{L}_\xi\big(R_{ij} - \tfrac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\big) - \delta^h_j \mathfrak{L}_\xi\big(R_{ik} - \tfrac{\Delta_2\omega g_{ik}}{2}\big) + \\
&\qquad + (J^h_k J^t_i - J^h_i J^t_k)\mathfrak{L}_\xi\Big(R_{tj} - \tfrac{\Delta_2\omega g_{tj}}{2} - \\
&\qquad\qquad - \tfrac{n-2}{2}\big(\omega_{t,j} + \tfrac{\omega_t\omega_j}{2} - \tfrac{||\omega||^2 g_{tj}}{2}\big)\Big) - \\
&\qquad - (J^h_j J^t_i - J^h_i J^t_j)\mathfrak{L}_\xi\Big(R_{tk} - \tfrac{\Delta_2\omega g_{tk}}{2} - \\
&\qquad\qquad - \tfrac{n-2}{2}\big(\omega_{t,k} + \tfrac{\omega_t\omega_k}{2} - \tfrac{||\omega||^2 g_{tk}}{2}\big)\Big)\Bigg) = 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

З (3.10) ми бачимо, що тензор

$$\begin{aligned}
P^h_{ijk} &= R^h_{ijk} - \delta^h_k\big(2\omega_{i,j} + \omega_i\omega_j - ||\omega||^2 g_{ij}\big) + \\
&\quad + \delta^h_j\big(2\omega_{i,k} + \omega_i\omega_k - ||\omega||^2 g_{ik}\big) - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\big({\omega^h}_{,k} + \tfrac{1}{2}\omega^h\omega_k\big)g_{ij} + \tfrac{1}{2}\big({\omega^h}_{,j} + \tfrac{1}{2}\omega^h\omega_j\big)g_{ik} - \\
&\quad - \tfrac{1}{n+2}\Big(\delta^h_k\big(R_{ij} - \tfrac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\big) - \delta^h_j\big(R_{ik} - \tfrac{\Delta_2\omega g_{ik}}{2}\big) + \\
&\quad + (J^h_k J^t_i - J^h_i J^t_k)\big(R_{tj} - \tfrac{n-2}{2}\big(\omega_{t,j} + \tfrac{\omega_t\omega_j}{2} - \tfrac{||\omega||^2 g_{tj}}{2}\big) - \tfrac{\Delta_2\omega g_{tj}}{2}\big) - \\
&\quad - (J^h_j J^t_i - J^h_i J^t_j)\big(R_{tk} - \tfrac{n-2}{2}\big(\omega_{t,k} + \tfrac{\omega_t\omega_k}{2} - \tfrac{||\omega||^2 g_{tk}}{2}\big) - \tfrac{\Delta_2\omega g_{tk}}{2}\big)\Big)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

зберігається при інфінітезимальних конформно голоморфно-проективних перетвореннях. Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема 3.7. *Якщо на ЛКК-многовиді (M^n, g, J) контраваріантне аналітичне векторне поле ξ породжує інфінітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення, то тензор (3.11) є інваріантним відносно перетворень*

$$\mathfrak{L}_\xi P^h_{ijk} = 0. \tag{3.12}$$

Зауважимо, що (3.12) – це скорочена форма (3.10), яка є умовою інтегровності рівняння $(3.1)_3$. Знайдемо умови інтегровності рівняння $(3.1)_4$. Диференціюючи коваріантно $(3.1)_4$ по x^k та альтернуючи, маємо:

$$\begin{aligned}
&\rho_{i,jk}-\rho_{i,jk}= \\
&\quad=\tfrac{1}{n+2}\Big(\Big(\mathfrak{L}_\xi\big(R_{ij}-\tfrac{n-2}{2}\big(\omega_{i,j}+\tfrac{\omega_i\omega_j}{2}-\tfrac{||\omega||^2g_{ij}}{2}\big)-\tfrac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\big)\Big)_{,j}- \\
&\qquad-\Big(\mathfrak{L}_\xi\big(R_{ik}-\tfrac{n-2}{2}\big(\omega_{i,k}+\tfrac{\omega_i\omega_k}{2}-\tfrac{||\omega||^2g_{ik}}{2}\big)-\tfrac{\Delta_2\omega g_{ik}}{2}\big)\Big)_{,k}\Big)+ \\
&\qquad+\tfrac{1}{2}\omega_{t,k}\rho^tg_{ij}+\tfrac{1}{2}\omega^t\rho_{t,k}g_{ij}-\tfrac{1}{2}\omega_j\rho_{i,k}-\tfrac{1}{2}\omega_{i,k}\rho_j- \\
&\qquad\quad-\tfrac{1}{2}\omega_{t,j}\rho^tg_{ik}-\tfrac{1}{2}\omega^t\rho_{t,j}g_{ik}+\tfrac{1}{2}\omega_k\rho_{i,j}+\tfrac{1}{2}\omega_{i,j}\rho_k=\rho_tR^t_{ijk}.
\end{aligned}$$

Враховуючи знову $(3.1)_4$, отримуємо

$$\begin{aligned}
\rho_tP^t_{ijk}=\tfrac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi\Big(&\big(R_{ij}-\tfrac{n-2}{2}\big(\omega_{i,j}+\tfrac{\omega_i\omega_j}{2}-\tfrac{||\omega||^2g_{ij}}{2}\big)-\tfrac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\big)_{,k}- \\
&-\big(R_{ik}-\tfrac{n-2}{2}\big(\omega_{i,k}+\tfrac{\omega_i\omega_k}{2}-\tfrac{||\omega||^2g_{ik}}{2}\big)-\tfrac{\Delta_2\omega g_{ik}}{2}\big)_{,j}+ \\
&+\tfrac{1}{2}(\delta^t_i\omega_k+\delta^t_i\omega_k-\omega^tg_{ik})\times \\
&\quad\times\big(R_{tj}-\tfrac{n-2}{2}\big(\omega_{t,j}+\tfrac{\omega_t\omega_j}{2}-\tfrac{||\omega||^2g_{tj}}{2}\big)-\tfrac{\Delta_2\omega g_{tj}}{2}\big)- \\
&-\tfrac{1}{2}(\delta^t_i\omega_j+\delta^t_i\omega_j-\omega^tg_{ij})\times \\
&\quad\times\big(R_{tk}-\tfrac{n-2}{2}\big(\omega_{t,k}+\tfrac{\omega_t\omega_k}{2}-\tfrac{||\omega||^2g_{tk}}{2}\big)-\tfrac{\Delta_2\omega g_{tk}}{2}\big)\Big),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

де P^t_{ijk} є інваріантним тензором (3.11), який можна вважати аналогом тензору голоморфно-проективної кривини келерових многовидів. Диференціюючи декілька разів (3.10) та (3.13) ми можемо отримати диференціальні продовження умов інтегровності. Для зручності, користуючись тотожністю для похідної Лі коваріантної похідної тензору [5, с.16], ми отримуємо перше продовження для (3.10):

$$\mathfrak{L}_\xi\big(P^h_{ijk}\big)_{,l}=\mathfrak{L}_\xi\Gamma^h_{tl}P^t_{ijk}-\mathfrak{L}_\xi\Gamma^t_{il}P^h_{tjk}-\mathfrak{L}_\xi\Gamma^t_{jl}P^h_{itk}-\mathfrak{L}_\xi\Gamma^t_{kl}P^h_{ijt}, \tag{3.14}$$

де $\mathfrak{L}_\xi\Gamma^h_{jk}$ та P^h_{ijk} визначені у рівняннях (3.2) та (3.11) відповідно. Аналогічно, можна знайти продовження для (3.13)

$$\mathfrak{L}_\xi\big(P_{ijk}\big)_{,l}-\big(\mathfrak{L}_\xi P_{ijk}\big)_{,l}=-\mathfrak{L}_\xi\Gamma^t_{il}P_{tjk}-\mathfrak{L}_\xi\Gamma^t_{jl}P_{itk}-\mathfrak{L}_\xi\Gamma^t_{kl}P_{ijt}. \tag{3.15}$$

У (3.15) позначено

$$\begin{aligned}
P_{ijk}=&\Big(R_{ij}-\tfrac{n-2}{2}\big(\omega_{i,j}+\tfrac{\omega_i\omega_j}{2}-\tfrac{||\omega||^2g_{ij}}{2}\big)-\tfrac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\Big)_{,k}- \\
&-\Big(R_{ik}-\tfrac{n-2}{2}\big(\omega_{i,k}+\tfrac{\omega_i\omega_k}{2}-\tfrac{||\omega||^2g_{ik}}{2}\big)-\tfrac{\Delta_2\omega g_{ik}}{2}\Big)_{,j}+ \\
&+\tfrac{1}{2}(\delta^t_i\omega_k+\delta^t_i\omega_k-\omega^tg_{ik})\times \\
&\qquad\times\Big(R_{tj}-\tfrac{n-2}{2}\big(\omega_{t,j}+\tfrac{\omega_t\omega_j}{2}-\tfrac{||\omega||^2g_{tj}}{2}\big)-\tfrac{\Delta_2\omega g_{tj}}{2}\Big)- \\
&-\tfrac{1}{2}(\delta^t_i\omega_j+\delta^t_i\omega_j-\omega^tg_{ij})\times
\end{aligned}$$

$$\times\Big(R_{tk}-\tfrac{n-2}{2}\big(\omega_{t,k}+\tfrac{\omega_t\omega_k}{2}-\tfrac{||\omega||^2g_{tk}}{2}\big)-\tfrac{\Delta_2\omega g_{tk}}{2}\Big).$$

Можна продовжувати диференціювання поки не виявиться, що на деякому етапі отримані рівняння задовольняються тотожно або отримана система рівнянь є несумісною. Система (3.1) є системою рівнянь у частинних похідних відносно $(n+1)^2=(2m+1)^2$ невідомих функцій ξ_i, $\xi_{i,j}$, ρ, ρ_i. Вимога аналітичності контраваріантного поля ξ^i дає $2m^2$ обмежень. Остаточно отримані результати можна підсумувати у вигляді теореми.

Теорема 3.8. *Для того, щоб ЛКК-многовид (M^n,J,g) допускав наявність групи конформно голоморфно-проективних перетворень, необхідно та достатньо, щоб система умов інтегровності (3.10), (3.13) та їх продовжень (3.14), (3.15), та ін., була сумісною. Тоді ЛКК-многовид (M^n,J,g) допускає наявність r-параметричної групи, де*

$$r=2(m+1)^2-1-k,$$

а m і k є відповідно комплексною розмірністю многовиду та рангом системи умов інтегровності, а також їх продовжень. У випадку, якщо умови (3.10) та (3.13) задовольняються тотожно, розв'язок системи (3.1) залежатиме від $r=2(m+1)^2-1$ параметрів.

3.9. **Конформно голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення на компактних ЛКК-многовидах.** Нехай (M^n,J,g) є компактним ЛКК-многовидом, а вектор ξ породжує на цьому многовиді конформно голоморфно-проективні деформації (3.1). Згорнемо рівняння $(3.1)_3$ з g^{jk}. Тоді отримаємо

$$\begin{aligned}\xi_{i,t}{}^{t}-\xi_\alpha R^\alpha_i&=\frac{2-n}{2}(\omega_\alpha\xi^\alpha)_{,i}-\frac{\omega_i}{2}g^{jk}\mathfrak{L}_\xi g_{jk}+\frac{\omega^\alpha}{2}(\mathfrak{L}_\xi g_{i\alpha})g_{jk}g^{jk}\\&=\frac{2-n}{2}(\omega_\alpha\xi^\alpha)_{,i}+\frac{1}{2}\omega_i g_{jk}\mathfrak{L}_\xi g^{jk}+\frac{n}{2}\omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{i\alpha}),\end{aligned}\tag{3.16}$$

або, піднімаючи у (3.16) індекс i,

$$\xi^i{}_{,t}{}^{t}-\xi^\alpha R^i_\alpha=\frac{(2-n)g^{it}}{2}(\omega_\alpha\xi^\alpha)_{,t}+\frac{1}{2}\omega^i g_{jk}\mathfrak{L}_\xi g^{jk}-\frac{n}{2}\omega_\alpha(\mathfrak{L}_\xi g^{i\alpha}).\tag{3.17}$$

З іншого боку, [7], для того, щоб контраваріантне векторне поле ξ на компактному майже ермітовому многовиді було контраваріантним майже аналітичним, необхідно та достатньо, щоб тотожно виконувалась умова

$$\xi^i{}_{,t}{}^{t}-\xi^\alpha R^i_\alpha=-J^i_\alpha(\mathfrak{L}_\xi J^\beta_{\gamma,\beta}g^{\alpha\gamma})+\frac{1}{2}\big(J^\alpha_{k,j}+J^\alpha_{j,k}\big)J^i_\alpha\mathfrak{L}_\xi g^{jk}.\tag{3.18}$$

Для ЛКК-многовидів, враховуючи (2.7) та (2.6), маємо:

$$- J^i_\alpha(\mathfrak{L}_\xi J^\beta_{\gamma,\beta} g^{\alpha\gamma}) + \frac{1}{2}\big(J^\alpha_{k,j} + J^\alpha_{j,k}\big) J^i_\alpha \mathfrak{L}_\xi g^{jk} =$$
$$= \frac{(2-n)g^{it}}{2}(\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,t} + \frac{1}{2}\omega^i g_{jk}\mathfrak{L}_\xi g^{jk} - \frac{n}{2}\omega_\alpha(\mathfrak{L}_\xi g^{i\alpha}). \quad (3.19)$$

Порівнюючи (3.17) та (3.18), врахувавши (3.19), отримуємо теорему

Теорема 3.10. *На компактному ЛКК-многовиді (M^n, J, g) векторне поле ξ, що генерує нетривіальні інфінітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення, є контраваріантним майже аналітичним.*

Також, відомо [6, с. 26], що будь-який вектор на компактному многовиді має задовольняти рівність

$$\int\limits_{M^n} \Big(\big(\xi^{i}{}_{,t}{}^{t} - \xi^\alpha R^i_\alpha\big)\xi_i - \big(\mathfrak{L}_\xi g^{jk}\big)\big(\mathfrak{L}_\xi g_{jk}\big) - \big(\xi^t{}_{,t}\big)^2\Big) d\sigma = 0. \quad (3.20)$$

Враховуючи (3.20), з (3.17) отримуємо теорему.

Теорема 3.11. *На компактному ЛКК-многовиді (M^n, J, g) векторне поле ξ, що генерує нетривіальні інфінітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення, має задовольняти умову*

$$\int\limits_{M^n} \Big(\big(\tfrac{2-n}{2}(\omega_\alpha\xi^\alpha)_{,t} + \tfrac{1}{2}\omega_i g_{jk}\mathfrak{L}_\xi g^{jk} + \tfrac{n}{2}\omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{i\alpha})\big)\xi^t -$$
$$- (\mathfrak{L}_\xi g^{jk})(\mathfrak{L}_\xi g_{jk}) - (\xi^t{}_{,t})^2\Big) d\sigma = 0. \quad (3.21)$$

Зокрема, якщо

$$\big(\tfrac{2-n}{2}(\omega_\alpha\xi^\alpha)_{,t} + \tfrac{1}{2}\omega_i g_{jk}\mathfrak{L}_\xi g^{jk} + \tfrac{n}{2}\omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{i\alpha})\big)\xi^t = 0 \qquad \text{та} \qquad \xi^t{}_{,t} = 0,$$

то інфінітезимальні перетворення породжувані ξ будуть рухами.

Література

[1] Sorin Dragomir, Liviu Ornea. *Locally conformal Kähler geometry*, volume 155 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998.

[2] Josef Mikeš, Hana Chudá, Irena Hinterleitner. Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 11(5):1450044, 8, 2014.

[3] Josef Mikeš, Elena Stepanova, Alena Vanžurová, et al. *Differential geometry of special mappings*. Palacký University Olomouc, Faculty of Science, Olomouc, 2015.

[4] Izu Vaisman. On locally conformal almost Kähler manifolds. *Israel J. Math.*, 24(3-4):338–351, 1976.

[5] Kentaro Yano. *The theory of Lie derivatives and its applications.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam; P. Noordhoff Ltd., Groningen; Interscience Publishers Inc., New York, 1957.

[6] Kentaro Yano. *Differential geometry on complex and almost complex spaces.* International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49. A Pergamon Press Book. The Macmillan Co., New York, 1965.

[7] Kentaro Yano, Mitsue Ako. Almost analytic vectors in almost complex spaces. *Tôhoku Math. J. (2)*, 13:24–45, 1961.

[8] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. *Современная геометрия: методы и приложения.* Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

[9] В. Ф. Кириченко. Локально конформно-келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны. *Матем. сб.*, 182(3):354–363, 1991.

[10] В. Ф. Кириченко. Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия. *Матем. сб.*, 51(5):57–66, 1992.

[11] В. М. Кузаконь, В. Ф. Кириченко, О. О. Пришляк. *Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти*, volume 97. Київ: Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування, 2013.

[12] Й. Микеш. Голоморфно-проективные отображения и их обобщения. *Геометрия - 3, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 30:258–289, 2002.

[13] Є. В. Черевко. Голоморфно-проективні перетворення та конформно-келерові многовиди. *Proc. Inter. Geom. Center*, 4(1):51–64, 2016.

[14] Л. П. Эйзенхарт. *Риманова геометрия.* М.: ИЛ, 1948.

Надійшла до редакції 23 жовтня 2017, прийнята до друку 27 листопада 2017.

Черевко Євген Володимирович
Одеський національний економічний університет, Одеса, Україна.
Email: cherevko@usa.com

Чепурна Олена Євгенівна
Одеський національний економічний університет, Одеса, Україна.
Email: chepurna67@gmail.com