Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 11, no. 1 (2018) pp. 27–38

Существование в пространстве Минковского поверхности с краем, имеющей заданный грассманов образ

Гречнева Марина, Стеганцева Полина

Abstract. The problem of reconstructig a surface via its Grassman image can be reduced to the proof of the existence of a solution of a certain second order partial differential equation. Its local variant has been solved for Euclidean and for Minkowsky space, while globally its was considered only for Euclidean space. Yu. A. Aminov made the first contributions to the solution of this problem.

The present article deals with a reconstruction of a non-isotropic surface in Minkowsky space in the global aspect which has the given Grassman image. It is related with solutions of hyperbolic differential equations. We prove a possibility of the reconstruction of the timelike surface with boundary which belongs to C^2 class using its given Grassman image. K. O. Kizbikenov solved this problem for Euclidean space by Shikin's method.

We start with a reconstruction of the surface $\widetilde{V}^2$ being a bijective projection of the required timelike surface V^2 onto a timelike hyperplane ${}^1\mathbb{R}_3$ in Minkowsky space. We require that the surface $\widetilde{V}^2$ has a bijective spherical image. Under these conditions the surface $\widetilde{V}^2$ is completely determined by its support function.

Further we describe a specialization technique of the moving frame of the surface based on metric properties of Minkowsky space. The coordinates on the unit sphere in the space ${}^1\mathbb{R}_3$ are transferred from the tangent plane by means of the central projection from the centre of the sphere. The central projection is a homeomorphism between a semisphere and the domain on the tangent plane, defined by the inequality $x^2 - y^2 < 1$.

We found the form of the partial differential equation with the unknown support function for the reconstruction of the surface $\widetilde{V}^2$ and the conditions on its coefficients, which provide existence of a solution.

Ключевые слова: грассманов образ, пространство Минковского, времениподобная поверхность

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v11i1.917

Анотація. Задача відновлення поверхні за її грассмановим образом зводиться до доведення існування розв'язку диференціального рівняння другого порядку у частинних похідних. Локально ця задача розв'язана як у евклідовому просторі, так і у просторі Мінковського. В глобальному аспекті вона розглядалась лише у евклідовому просторі. Перші публікації щодо розв'язання цієї задачі належать Амінову Ю. А.

В цій роботі розглядається в глобальному аспекті задача відновлення неізотропної поверхні простору Мінковського за її грасмановим образом. В статті розглядається випадок гіперболічного типу диференціального рівняння. Доведена можливість відновлення регулярної часоподібної поверхні з краєм в ${}^1\mathbb{R}_4$ за її грасмановим образом. Цю задачу для поверхонь евклідова простору розв'язав Кізібікенов К.О. При доведенні існування розв'язку диференціального рівняння використовувався метод Шикіна Є. В.

Розв'язання задачі починається з відновлення поверхні $\widetilde{V}^2$, яка є бієктивною проекцією шуканої часоподібної поверхні V^2 на часоподібну гіперплощину ${}^1\mathbb{R}_3$ простору Мінковського. При цьому вимагається, щоб поверхня $\widetilde{V}^2$ мала бієктивний сферичний образ. При вказаних умовах поверхня $\widetilde{V}^2$ повністю визначається своєю опорною функцією.

Описано спосіб спеціалізації рухомого репера поверхні, при якому враховуються метричні властивості простору Мінковського. У якості локальних координат x, y шуканої поверхні обираються координати на сфері одиничного радіусу простору ${}^1\mathbb{R}_3$, що природнім чином переносяться з дотичної до сфери площини при центральному проектуванні із центру сфери. Центральне проектування є гомеоморфізмом півсфери і області на дотичній площині, декартові координати точок якої задовольняють умову $x^2 - y^2 < 1$.

Знайдено вигляд диференціального рівняння в частинних похідних відносно опорної функції для відновлення поверхні $\widetilde{V}^2$ та умови на його коефіцієнти для забезпечення існування розв'язку.

Аннотация. Рассматривается задача о восстановлении неизотропной поверхности пространства Минковского по ее грассманову образу в глобальном аспекте. Эта задача сводится к доказательству существования решения дифференциального уравнения второго порядка в частных производных. В статье рассматривается гиперболический случай. Описан способ специализации подвижного репера поверхности, при котором учитываются метрические свойства пространства Минковского.

1. Введение

Задача о восстановлении поверхности по заданному грассманову образу является одной из наиболее интересных задач в теории грассмановых многообразий и их подмногообразий. В работах [3, гл.8] и [5, гл.6] содержится обзор результатов решения этой задачи в евклидовом пространстве. В статьях [1], [2], [6] решается вопрос о восстановлении двумерных поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве.

В работе [10] рассматривается в глобальном аспекте задача о восстановлении двумерных поверхностей четырехмерного евклидова пространства по заданному грассманову образу. В ней сформулированы и доказаны теоремы о существовании и единственности поверхности с заданным грассмановым образом. Тип дифференциального уравнения для восстановления поверхности зависит от знака кривизны грассманова образа вдоль одной из нормалей. Перед формулировкой теорем автор строит специальный подвижный репер и с его помощью выводит основное уравнение.

Аналогичную задачу можно рассматривать для двумерных поверхностей пространства Минковского. В работе [8] эта задача уже решалась авторами. В ней были сформулированы и доказаны локальные теоремы существования неизотропной поверхности пространства Минковского с заданным грассмановым образом.

В четырехмерном пространстве Минковского ${}^1\mathbb{R}_4$ (имеющем метрику $ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$) грассманово многообразие $PG(2,4)$ двумерных плоскостей представляет собой объединение подмногообразий пространственноподобных, времениподобных и изотропных плоскостей, которые будем обозначать ${}^SPG(2,4)$, ${}^TPG(2,4)$ и ${}^{Is}PG(2,4)$ соответственно. При стандартном плюккеровом погружении объемлющим пространством для многообразия $PG(2,4)$ является шестимерное псевдоевклидово пространство индекса 3 (обозначают ${}^3\mathbb{R}_6$).

Пусть V^2 — регулярная неизотропная двумерная поверхность пространства ${}^1\mathbb{R}_4$. Поставим в соответствие каждой точке x поверхности V^2 плоскость, проходящую через фиксированную точку пространства ${}^1\mathbb{R}_4$ и параллельную нормальной плоскости N_x поверхности в точке x. Получим отображение поверхности V^2 в грассманово подмногообразие ${}^SPG(2,4)$ или ${}^TPG(2,4)$. Грассмановым образом Γ^2 поверхности V^2 называют образ указанного отображения. Он представляет собой двумерную поверхность пространства ${}^3\mathbb{R}_6$. Если поверхность V^2 — пространственноподобна (времениподобна), то ее грассманов образ принадлежит подмногообразию ${}^TPG(2,4)$ (${}^SPG(2,4)$), при этом тип грассманова образа может не совпадать с типом поверхности (и даже быть изотропным). Геометрия грассмановых многообразий и грассманова образа поверхности пространства Минковского изучалась в работах [7], [9].

Поставим следующую задачу. Пусть дана поверхность $\Gamma^2 \subset {}^SPG(2,4)$ в ${}^3\mathbb{R}_6$ и регулярная кривая l в ${}^1\mathbb{R}_4$. Требуется найти такую времениподобную поверхность V^2 в ${}^1\mathbb{R}_4$, чтобы ее краем была заданная кривая l, а грассманов образ совпадал с поверхностью Γ^2.

2. Основные уравнения времениподобной поверхности пространства $^1\mathbb{R}_4$ в произвольном ортонормированном подвижном репере

Пускай V^2 — двумерная времениподобная регулярная поверхность класса C^2 в $^1\mathbb{R}_4$, $P \in V^2$ и $(P, \bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3, \bar{e}^4)$ — такой ортонормированный подвижный репер поверхности, что $(\bar{e}^1)^2 = -1$, $(\bar{e}^i)^2 = 1, i = 2, 3, 4$. Векторы $\bar{e}^1, \bar{e}^2$ лежат в касательной плоскости, а $\bar{e}^3, \bar{e}^4$ — в нормальной плоскости к поверхности V^2 в точке P. Будем рассматривать только поверхности с отличной от нуля кривизной вдоль нормали $\bar{e}^3$. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ — векторное уравнение поверхности. Первые производные вектор-функции в репере $(P, \bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3, \bar{e}^4)$ можно записать в виде

$$\bar{r}_u(u, v) = x^1(u, v)\bar{e}^1 + x^2(u, v)\bar{e}^2, \tag{2.1}$$

$$\bar{r}_v(u, v) = y^1(u, v)\bar{e}^1 + y^2(u, v)\bar{e}^2. \tag{2.2}$$

Деривационные формулы подвижного репера имеют вид

$$\bar{e}^i_u = \sum_{i \neq j} \alpha_{ij}\bar{e}^j, \tag{2.3}$$

$$\bar{e}^i_v = \sum_{i \neq j} \beta_{ij}\bar{e}^j, i, j = 1, \ldots, 4. \tag{2.4}$$

Заметим, что в пространстве $^1\mathbb{R}_4$ коэффициенты α_{ij} удовлетворяют равенствам $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, если $i = 1$, и $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, если $i = 2, 3, 4$. Аналогично для β_{ij}. Продифференцируем (2.1) по v, а (2.2) по u. Используя разложения (2.3), (2.4) и учитывая линейную независимость векторов $\bar{e}^i$, получим для x^1, x^2, y^1, y^2 систему уравнений

$$\begin{cases} x^1_v - y^1_u + \beta_{21}x^2 - \alpha_{21}y^2 = 0, \\ x^2_v - y^2_u + \beta_{12}x^1 - \alpha_{12}y^1 = 0, \\ \beta_{13}x^1 + \beta_{23}x^2 - \alpha_{13}y^1 - \alpha_{23}y^2 = 0, \\ \beta_{14}x^1 + \beta_{24}x^2 - \alpha_{14}y^1 - \alpha_{24}y^2 = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Кроме того, потребуем, чтобы коэффициенты α_{ij} и β_{ij} удовлетворяли условиям интегрируемости. Для этого произведем с системой равенств (2.3), (2.4) такие же операции, как и с системой равенств (2.1), (2.2). Получим

$$\begin{cases}\alpha_{12_v}-\beta_{12_u}+\alpha_{13}\beta_{32}-\alpha_{32}\beta_{13}+\alpha_{14}\beta_{42}-\alpha_{42}\beta_{14}=0,\\ \alpha_{13_v}-\beta_{13_u}+\alpha_{12}\beta_{23}-\alpha_{23}\beta_{12}+\alpha_{14}\beta_{43}-\alpha_{43}\beta_{14}=0,\\ \alpha_{14_v}-\beta_{14_u}+\alpha_{12}\beta_{24}-\alpha_{24}\beta_{12}+\alpha_{13}\beta_{34}-\alpha_{34}\beta_{13}=0,\\ \alpha_{23_v}-\beta_{23_u}+\alpha_{21}\beta_{13}-\alpha_{13}\beta_{21}+\alpha_{24}\beta_{43}-\alpha_{43}\beta_{24}=0,\\ \alpha_{24_v}-\beta_{24_u}+\alpha_{21}\beta_{14}-\alpha_{14}\beta_{21}+\alpha_{23}\beta_{34}-\alpha_{34}\beta_{23}=0,\\ \alpha_{34_v}-\beta_{34_u}+\alpha_{31}\beta_{14}-\alpha_{14}\beta_{31}+\alpha_{32}\beta_{24}-\alpha_{24}\beta_{32}=0.\end{cases}\tag{2.6}$$

Система (2.5), коэффициенты α_{ij} и β_{ij} которой удовлетворяют (2.6), является условием совместности для системы (2.1), (2.2), решение $\bar{r}(u,v)$ которой задает поверхность V^2. Покажем, что от двух последних уравнений системы (2.5) можно перейти к одному уравнению. Найдем коэффициенты второй квадратичной формы поверхности V^2 относительно нормали $\bar{e}^3$. Они имеют вид

$$L=\alpha_{13}x^1+\alpha_{23}x^2,\qquad M=\beta_{13}x^1+\beta_{23}x^2,$$
$$M=\alpha_{13}y^1+\alpha_{23}y^2,\qquad N=\beta_{13}y^1+\beta_{23}y^2.$$

Из этих формул можно выразить x^1,x^2,y^1,y^2 через коэффициенты второй квадратичной формы следующим образом

$$x^1=\frac{\beta_{23}L-\alpha_{23}M}{\alpha_{13}\beta_{23}-\alpha_{23}\beta_{13}},\qquad x^2=\frac{-\beta_{13}L+\alpha_{13}M}{\alpha_{13}\beta_{23}-\alpha_{23}\beta_{13}},$$
$$y^1=\frac{\beta_{23}M-\alpha_{23}N}{\alpha_{13}\beta_{23}-\alpha_{23}\beta_{13}},\qquad y^2=\frac{-\beta_{13}M+\alpha_{13}N}{\alpha_{13}\beta_{23}-\alpha_{23}\beta_{13}}.$$

Отметим, что знаменатель полученных дробей равен нулю тогда и только тогда, когда кривизна поверхности V^2 вдоль нормали $\bar{e}^3$ равна нулю. При найденных значениях x^1,x^2,y^1,y^2 третье уравнение системы (2.5) выполняется тождественно, а четвертое можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}L(\beta_{23}\beta_{14}-\beta_{24}\beta_{13})+&\\ +M(-\alpha_{23}\beta_{14}+\alpha_{13}\beta_{24}-\alpha_{14}\beta_{23}+\alpha_{24}\beta_{13})+&\\ +N(\alpha_{23}\alpha_{14}-\alpha_{24}\alpha_{13})=0.&\end{aligned}$$

3. Локальные координаты подмногообразия ${}^{S}PG(2,4)$ относительно специализированного репера пространства ${}^{1}\mathbb{R}_4$

Специализируем репер пространства ${}^{1}\mathbb{R}_4$ с помощью метода, описанного в работе [10] Кизбикенова К. О., учитывая метрические свойства пространства Минковского.

В пространстве ${}^1\mathbb{R}_4$ с декартовыми координатами z^1, z^2, z^3, z^4 зададим гиперплоскость ${}^1\mathbb{R}_3$ уравнением $z^4 = 0$. В ней рассмотрим двумерную сферу S^2 единичного радиуса, уравнение которой имеет вид

$$-(z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2 = 1.$$

Введем на S^2 координаты x, y следующим образом. Пусть O — центр сферы, A — точка на сфере с координатами $(0, 0, 1)$. Проведем касательную плоскость к S^2 в точке A, она будет времениподобной. Пусть x, y — координаты в этой плоскости относительно ортонормированного репера с центром в точке A. Тогда произвольная точка $M(z^1, z^2, z^3)$ сферы, для которой $z^3 > 0$, центральным проектированием из точки O перейдет в некоторую точку $M_1(x, y, 1)$ касательной плоскости. При этом $z^1 = \frac{x}{k}$, $z^2 = \frac{y}{k}$, $z^3 = \frac{1}{k}$, где $k = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$. Поскольку вектор $\bar{OM}$ пространственноподобный (его конец лежит на сфере действительного радиуса), то вектор $\bar{OM}_1$ также будет пространственноподобным, причем $k > 0$. Таким образом, точки рассматриваемой полусферы будут проектироваться в точки касательной плоскости, координаты которых удовлетворяют условию $x^2 - y^2 < 1$. Примем за вектор $\bar{f}^3$ базиса $(\bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3, \bar{f}^4)$ подвижного репера вектор $\bar{\xi} = \bar{OM}$. Построим остальные векторы репера следующим образом. Рассмотрим вектор $\bar{\xi}^1 = (0, \frac{1}{n}, -\frac{y}{n})$, $n = \sqrt{1 + y^2}$, ортогональный к $\bar{\xi}$. Найдем в пространстве ${}^1\mathbb{R}_3$ векторное произведение векторов $\bar{\xi}$ и $\bar{\xi}^1$

$$\bar{\xi}^2 = \bar{\xi} \times \bar{\xi}^1 = \begin{vmatrix} -\bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{x}{k} & \frac{y}{k} & \frac{1}{k} \\ 0 & \frac{1}{n} & -\frac{y}{n} \end{vmatrix} = \left(\frac{n}{k}, \frac{xy}{nk}, \frac{x}{nk}\right).$$

Отметим, что плоскость, определяемая векторами $\bar{\xi}^1$ и $\bar{\xi}^2$, времениподобна. Поэтому произвольный единичный вектор $\bar{\xi}^3$ в ${}^1\mathbb{R}_3$, ортогональный $\bar{\xi}$, имеет вид

$$\bar{\xi}^3 = \operatorname{ch}\alpha \bar{\xi}^1 + \operatorname{sh}\alpha \bar{\xi}^2.$$

Пусть $\bar{t}^4$ — единичный вектор, ортогональный гиперплоскости ${}^1\mathbb{R}_3$. Тогда произвольный единичный вектор $\bar{\eta}$, ортогональный $\bar{\xi}$ в ${}^1\mathbb{R}_4$, можно представить в виде

$$\bar{\eta} = \operatorname{ch}\alpha\, \cos\beta \bar{\xi}^1 + \operatorname{sh}\alpha\, \cos\beta \bar{\xi}^2 + \sin\beta \bar{t}^4 = \cos\beta \bar{\xi}^3 + \sin\beta \bar{t}^4.$$

Выберем в качестве вектора $\bar{f}^4$ вектор $\bar{\eta}$. Положим

$$\bar{f}^1 = \operatorname{sh}\alpha \bar{\xi}^1 + \operatorname{ch}\alpha \bar{\xi}^2,$$
$$\bar{f}^2 = -\operatorname{ch}\alpha\, \sin\beta \bar{\xi}^1 - \operatorname{sh}\alpha\, \sin\beta \bar{\xi}^2 + \cos\beta \bar{t}^4.$$

Введем обозначения

$$\lambda = \operatorname{ctg}\beta\ \operatorname{sh}\alpha, \quad \mu = \operatorname{ctg}\beta\ \operatorname{ch}\alpha, \quad a = \sqrt{1+\mu^2-\lambda^2}, \quad b = \sqrt{\mu^2-\lambda^2}.$$

Таким образом, векторы построенного подвижного ортонормированного репера имеют вид

$$\begin{aligned}
\bar f^1 &= \frac{\lambda}{b}\bar\xi^1 + \frac{\mu}{b}\bar\xi^2,\\
\bar f^2 &= -\frac{\mu}{ab}\bar\xi^1 - \frac{\lambda}{ab}\bar\xi^2 + \frac{b}{a}\bar t^4,\\
\bar f^3 &= \bar\xi,\\
\bar f^4 &= \eta = \frac{\mu}{a}\bar\xi^1 + \frac{\lambda}{a}\xi^2 + \frac{1}{a}\bar t^4.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Коэффициенты деривационных формул полученного репера находим по формулам

$$\alpha_{ij} = (\bar f^i_x, \bar f^j), \qquad \beta_{ij} = (\bar f^i_y, \bar f^j).$$

Получим

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} = \alpha_{21} &= \frac{\lambda\mu_x - \mu\lambda_x}{ab^2}, & \alpha_{13} = \alpha_{31} &= \frac{\mu n}{bk^2},\\
\alpha_{14} = \alpha_{41} &= \frac{\lambda_x\mu - \lambda\mu_x}{ab}, & \alpha_{23} = -\alpha_{32} &= -\frac{\lambda n}{abk^2},\\
\alpha_{24} = -\alpha_{42} &= \frac{\mu\mu_x - \lambda\lambda_x}{a^2b}, & \alpha_{34} = -\alpha_{43} &= -\frac{\lambda n}{ak^2}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\beta_{12} = \beta_{21} &= \frac{\lambda\mu_y - \mu\lambda_y}{ab^2} - \frac{x}{an^2k}, & \beta_{13} = \beta_{31} &= -\frac{\lambda}{bnk} - \frac{\mu xy}{bnk^2},\\
\beta_{14} = \beta_{41} &= \frac{\lambda_y\mu - \lambda\mu_y}{ab} + \frac{bx}{an^2k}, & \beta_{23} = -\beta_{32} &= -\frac{\mu}{abnk} + \frac{\lambda xy}{abnk^2},\\
\beta_{24} = -\beta_{42} &= \frac{\mu\mu_y - \lambda\lambda_y}{a^2b}, & \beta_{34} = -\beta_{43} &= \frac{\mu}{ank} + \frac{\lambda xy}{ak^2}.
\end{aligned}$$

Покажем, что набор x, y, λ, μ является набором локальных координат в четырехмерном грассмановом подмногообразии двумерных пространственноподобных плоскостей пространства Минковского. Действительно, по заданному набору x, y, λ, μ можно однозначно определить векторы построенного базиса, а по векторам $\bar f^3, \bar f^4$ этого базиса определить пространственноподобную плоскость, то есть точку подмногообразия ${}^SPG(2,4)$. С другой стороны, любая плоскость, натянутая на векторы

$\bar{f}^3, \bar{f}^4$, может быть записана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x^1 = \frac{x}{k}t_1 - \frac{\lambda n}{ak}t_2, \\ x^2 = \frac{y}{k}t_1 + \frac{\mu k + xy\lambda}{ank}t_2, \\ x^3 = \frac{1}{k}t_1 - \frac{y\mu k - x\lambda}{ank}t_2, \\ x^4 = \frac{1}{a}t_2. \end{cases}$$

Исключая из этой системы параметры t_1, t_2, получим систему вида

$$\begin{cases} x^1 = \xi_1^1 x_3 + \xi_1^2 x_4, \\ x^2 = \xi_2^1 x_3 + \xi_2^2 x_4, \end{cases}$$

где $\xi_1^1 = x$, $\xi_2^1 = y$, а для определения λ и μ имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \lambda \frac{k}{n} + \mu \frac{xy}{n} = \xi_1^2, \\ n\mu = \xi_2^2. \end{cases}$$

Поскольку определитель этой системы равен k, а значит отличен от нуля (в области $x^2 - y^2 < 1$), то система имеет единственное решение.

Таким образом, набор x, y, λ, μ определяется однозначно по заданной пространственноподобной плоскости.

Предположим, что λ, μ есть дифференцируемые функции от x, y. Тогда двумерное подмногообразие Γ^2 с локальными координатами x, y является поверхностью в ${}^3\mathbb{R}_6$, заданной вектор-функцией $\bar{\sigma} = [\bar{f}^3, \bar{f}^4]$, то есть является грассмановым образом заданной поверхности V^2.

4. Теорема о восстановлении поверхности пространства ${}^1\mathbb{R}_4$ по ее грассманову образу

Пусть x, y — координаты на времениподобной плоскости относительно ортонормированного репера и Δ — область на плоскости, определяемая условием $x^2 - y^2 < 1$. Будем рассматривать такую времениподобную поверхность V^2 класса C^2 в ${}^1\mathbb{R}_4$ с внутренними координатами x, y, гомеоморфную области Δ, которая взаимнооднозначно проектируется на времениподобную поверхность $\tilde{V}^2$ трехмерного пространства ${}^1\mathbb{R}_3$. Кроме того, будем считать, что $\tilde{V}^2$ имеет взаимнооднозначный сферический образ. Поверхность V^2 будем задавать радиус-вектором $\bar{r}(x, y) = (z^1(x, y), z^2(x, y), z^3(x, y), z^4(x, y))$, а трехмерное пространство ${}^1\mathbb{R}_3$ уравнением $z^4 = 0$. Тогда поверхность $\tilde{V}^2$ задается векторным уравнением $\bar{r}_1(x, y) = (z^1(x, y), z^2(x, y), z^3(x, y), 0)$. В качестве подвижного репера поверхности V^2 выберем репер, построенный в предыдущем пункте, причем векторы $\bar{f}^1$, $\bar{f}^2$ лежат в касательной плоскости, а векторы $\bar{f}^3$, $\bar{f}^4$ — в нормальной. Отметим, что $\bar{f}^3$ является нормалью к поверхности $\tilde{V}^2$.

В работе [4, стр.278] утверждается, что опорная функция полностью определяет поверхность, которая имеет взаимнооднозначный сферический образ. Там же показано, как в случае евклидова пространства координаты поверхности выражаются через опорную функцию h. Можно показать, что для времениподобной поверхности $\tilde{V}^2$ эти выражения примут вид

$$z^1 = -h_x, \qquad z^2 = h_y, \qquad z^3 = h - xh_x - yh_y, \tag{4.1}$$

где $Pgradh = (-h_x, h_y)$ - псевдоградиент опорной функции. Тогда

$$\bar{r}_{1_x} = (-h_{xx}, h_{yx}, -xh_{xx} - yh_{xy}),$$
$$\bar{r}_{1_y} = (-h_{xy}, h_{yy}, -xh_{xy} - yh_{yy}).$$

Коэффициенты второй квадратичной формы поверхности $\tilde{V}^2$ выражаются следующим образом:

$$L = -\frac{h_{xx}}{k}, \qquad M = -\frac{h_{xy}}{k}, \qquad N = -\frac{h_{yy}}{k}.$$

Поскольку вторые квадратичные формы поверхностей V^2 и $\tilde{V}^2$ относительно нормали $\bar{f}^3$ совпадают, то можно подставить найденные выражения для L, M, N и α_{ij}, β_{ij} в последнее уравнение пункта 2. Получим

$$h_{xx}\left(\frac{k}{n^2}\lambda_y + \frac{xy}{n^2}\mu_y + \frac{x}{n^4}\mu + \frac{x^2y}{n^4k}\lambda\right) + \\ + h_{xy}\left(-\frac{xy}{n^2}\mu_x + \mu_y - \frac{k}{n^2}\lambda_x + \frac{x}{n^2k}\lambda\right) - h_{yy}\mu_x = 0.$$

Преобразуем последнее уравнение к виду

$$h_{xx}\left(\frac{k\lambda}{n} + \frac{xy}{n}\mu\right)_y - h_{xy}\left(\left(\frac{k\lambda}{n} + \frac{xy}{n}\mu\right)_x - (n\mu)_y\right) - h_{yy}(n\mu)_x = 0. \tag{4.2}$$

Обозначим

$$A = -\left(\frac{k\lambda}{n} + \frac{xy}{n}\mu\right), \qquad B = n\mu,$$

тогда уравнение (4.2) примет вид

$$A_y h_{xx} - (A_x + B_y)h_{xy} + B_x h_{yy} = 0. \tag{4.3}$$

Аналогичное уравнение в случае евклидова пространства в работе [10] называется *основным уравнением*. Тип уравнения определяется знаком дискриминанта $D = 4A_yB_x - (A_x + B_y)^2$.

В случае, когда уравнение (4.3) имеет гиперболический тип, справедлива следующая

Теорема 4.1. *Пусть $\Gamma^2 \subset {}^S PG(2,4)$ — двумерная поверхность в ${}^3\mathbb{R}_6$, заданная в плюккеровых координатах в виде*

$$\bar{\sigma}(x,y) = \left(\frac{yA+xB}{ak}, \frac{A}{ak}, \frac{x}{ak}, -\frac{B}{ak}, \frac{y}{ak}, \frac{1}{ak}\right),$$

где x, y — координаты на полусфере S^2 единичного радиуса, введенные в пункте 3. Пусть Ω — область на S^2, ограниченная двумя кривыми, которые являются сечениями полусферы плоскостями, проходящими через ее диаметр, Ω' — проекция области Ω на касательную плоскость к S^2. Функции $A(x,y)$, $B(x,y)$ являются функциями класса C^2 в области Ω' и вместе со своими производными до второго порядка включительно ограничены в Ω'. Пусть выполняются условия

$$D = 4A_yB_x - (A_x + B_y)^2 < 0,$$

$$\min_{\Omega'}\left\{|4A_yB_x - (A_x+B_y)^2|, |A_y|, |B_x|\right\} \geq n_0 = \text{const} > 0,$$

и пусть на одной из кривых l, ограничивающих область Ω, задана непрерывная функция $\bar{R}(s) = (R^1(s), R^2(s), R^3(s), R^4(s))$, причем

$$R^3_s = -a_o R^1_s - sR^2_s, \qquad R^4_s = -A|_l R^1_s + B|_l R^2_s, \qquad a_o = \text{const}.$$

Тогда существует единственная двумерная регулярная времениподобная поверхность V^2 класса C^1 в ${}^1\mathbb{R}_4$ такая, что её грассманов образ совпадает с поверхностью Γ^2 и край поверхности V^2 совпадает с кривой $\bar{R} = \bar{R}(s)$.

Эта теорема является аналогом сформулированной и доказанной в работе [10] Кизбикенова К. О. теоремы для двумерной поверхности четырехмерного евклидова пространства. Ее доказательство разбивается на два этапа. Сначала доказывается существование решения основного уравнения при указанных начальных условиях, а затем по найденной опорной функции h и функциям A и B восстанавливается поверхность V^2. При доказательстве существования решения основного уравнения автор использует метод Шикина Е. В. и для этого от основного уравнения переходит к системе пяти линейных дифференциальных уравнений с пятью неизвестными функциями x, y, p, q, h, зависящими от параметров u, v

$$\begin{cases} y_u - \rho_1 x_u = 0, \\ y_v - \rho_2 x_v = 0, \\ p_u + \rho_2 q_u = 0, \\ p_v + \rho_1 q_v = 0, \\ h_u - p x_u - q y_u = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

где $p = h_x$, $q = h_y$, а ρ_1, ρ_2 — корни характеристического уравнения $A_y \rho^2 - (A_x + B_y)\rho + B_x = 0$.

Система первых двух уравнений преобразуется к равносильной системе, к которой можно применить лемму о существовании единственного решения (x, y) в некоторой полосе изменения параметров u, v. Применяя эту лемму необходимое количество раз, получаем вывод о существовании решения системы в полосе, покрывающей Ω'. Функции p, q находятся аналогичным образом из третьего и четвертого уравнений системы (4.4). Из последнего уравнения этой системы находится функция h. Поверхность восстанавливается по функциям A, B и h, поскольку имеют место равенства (4.1).

В случае пространства Минковского основное уравнение имеет тот же вид, но его коэффициенты имеют другой вид, что объясняется метрическими свойствами этого пространства. Вместе с тем, если они удовлетворяют тем же требованиям, что и в случае евклидова пространства, то предложенное в работе [10] доказательство теоремы о восстановлении поверхности евклидова пространства по сути является доказательством теоремы о восстановлении поверхности пространства Минковского.

Литература

[1] Ю. А. Аминов. О грассмановном образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве. *Украинский геометрический сборник*, 23:3–16, 1980.

[2] Ю. А. Аминов. Определение поверхности в 4-мерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу. *Мат. сборник*, 117(2):147–160., 1982.

[3] Ю. А. Аминов. *Геометрия подмногообразий.* Наукова думка, 2002.

[4] И. Я. Бакельман, А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор. *Введение в дифференциальную геометрию «в целом».* Наука, 1973.

[5] А. А. Борисенко. *Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий.* Экзамен, 2003.

[6] В. А. Горькавый. Восстановление специальных подмногообразий евклидова пространства по заданному грассманову образу. *Мат. физика, анализ, геометрия*, (7):131–152, 2000.

[7] М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева. О поверхностях пространства Минковского со стационарными значениями кривизны грассманова образа. *Proceedings of the International Geometry Center*, 9(2):42–48, 2016.

[8] М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева. О существовании поверхности псевдоевклидова пространства с заданным грассмановым образом. *Укр. мат. журн.*, 68(10):1320–1329, 2016.

[9] М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева. Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства. *Известия вузов. Математика*, (2):65–75, 2017.

[10] К. О. Кизбикенов. Двумерные поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве с заданным грассмановым образом. *ЛГПИ, Деп. ВИНИТИ*, 6568-83, 1983.

Поступила в редакцию 8 декабря 2017, принята к печати 25 февраля 2018.

Гречнева Марина
Запорожский национальный университет, Запорожье, ул.Жуковского, 66
Email: mag83@list.ru

Стеганцева Полина
Запорожский национальный университет, Запорожье, ул.Жуковского, 66
Email: steg_pol@mail.ru