Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 11, no. 1 (2018) pp. 39–51

$2F$-планарные отображения псевдоримановых пространств с f-структурой

Коновенко Н.Г., Курбатова И.Н., Цвентух Е.

Abstract. The paper is devoted to existence of diffeomorphisms between manifolds with affinor structure of some type. The concept of $2F$-planar mapping of spaces with affine connection and Riemannian spaces was defined by R. J. Kadem. This is a natural generalization of F-planar mappings and includes as a special case the following well known diffeomorphisms of spaces with affine connection and Riemannian spaces with affinor structure: geodesic, quasi-geodesic, holomorphically projective mappings. R. J. Kadem investigated general problems of $2F$-planar mappings theory for the spaces with affine connection and Riemannian spaces with affinor structure. In particular, he proved that every such mapping preserves affinor structure. I. N. Kurbatova studied $2F$-planar mappings of pseudo-Riemannian spaces with the third order affinor structure F, which is given by the equation $F^3 = 0$. N. G. Konovenko considered some questions of $2F$-planar mappings of pseudo-Riemannian spaces with covariantly constant f-structure F which is given by the equation $F^3 + F = 0$.

In the present article we continue study $2F$-planar mappings of pseudo Riemannian spaces with f-structure. It is proved that a pseudo Riemannian space with covariantly constant f-structure is a direct product of pseudo Riemannian spaces, one of which admits a Kahlerian structure; the class of pseudo Riemannian spaces with covariantly constant f-structure is closed with respect to the maps above; under assumption of covariant constancy of an affinor of f-structure $2F$-planar mappings can be of one of the following three types: either complete or canonical of types I, or II; depending on type $2F$-planar mapping induces either geodesic or holomorphically projective or affine mapping on the multiples of that product f pseudo Riemannian spaces. In the theory of diffeomorphisms of manifolds there are well known wide classes of Riemannian spaces admitting geodesic mappings and Kahlerian spaces admitting holomorphically projective mappings preserving complex structure. Therefore the results of the article give a chance to construct numerous classes of pseudo Riemannian spaces with absolutely parallel f-structure and their $2F$-planar mappings.

Ключевые слова: $2F$-планарное отображение, f-структура
DOI: http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v11i1.918

Анотація. Статтю присвячено проблемі дифеоморфізмів многовидів, на яких задано афінорну структуру певного типу. Поняття $2F$-планарного відображення афіннозв'язних та ріманових просторів було введене Р. Дж. Кадемом. Воно є природним узагальненням F-планарного відображення і містить в собі такі відомі дифеоморфізми афіннозв'язних і ріманових просторів з афінорною структурою, як геодезичні, квазі-геодезичні, голоморфно-проективні відображення. Р. Дж. Кадем досліджував загальні питання теорії $2F$-планарних відображень афіннозв'язних і ріманових просторів з афінорною структурою. Зокрема, він довів, що кожне таке відображення за необхідністю зберігає афінорну структуру. І. М. Курбатова вивчала $2F$-планарні відображення псевдоріманових просторів з афінорною структурою F третього порядку, що задовольняє умовам $F^3 = 0$. Н. Г. Коновенко розглядала деякі питання $2F$-планарних відображень псевдоріманових просторів з коваріантно сталою f-структурою F, яка визначається співвідношеннями $F^3 + F = 0$.

В даній роботі продовжується дослідження $2F$-планарних відображень псевдоріманових просторів з f-структурою. Доведено, що псевдоріманoвий простір з коваріантно сталою f-структурою є добутком псевдоріманових просторів, один з яких є келеровим; клас псевдоріманових просторів з коваріантно сталою f-структурою замкнений відносно відображень, що розглядаються; за умови коваріантної сталості афінора f-структури $2F$-планарні відображення можуть належати до одного з трьох типів: повні і канонічні I-го або II-го типу; залежно від типу $2F$-планарне відображення індукує на компонентах добутку відповідних просторів геодезичне, голоморфно-проективне, або афінне відображення. В теорії дифеоморфізмів многовидів відомі потужні класи ріманових просторів, що допускають геодезичні відображення, та келерових просторів, що допускають голоморфно-проективні відображення зі збереженням комплексної структури. Тому висновки статті дають змогу будувати численні класи псевдоріманових просторів з коваріантно сталою f-структурою та їх $2F$-планарні відображення.

1. Введение

Понятие pF-планарного отображения аффинносвязных и римановых пространств было введено Р. Дж. Кадемом [1]. Оно является естественным обобщением F-планарных отображений [9] и включает в себя как частный случай такие известные диффеоморфизмы аффинносвязных и римановых пространств, наделенных аффинорной структурой, как геодезические [10], квази-геодезические [4], голоморфно-проективные [2] отображения.

В работе [1] было обстоятельно исследовано $2F$-планарное отображение (2FПО) псевдоримановых пространств (V_n, g_{ij}, F_i^h) и $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$ с метрическими тензорами $g_{ij}, \overline{g}_{ij}$ и аффинорными структурами $F_i^h, \overline{F}_i^h$, соответственно. В частности, показано, что 2FПО по необходимости сохраняет структуру, т.е. в общей по отображению системе координат (x^i) имеют место

$$F_i^h(x) = \overline{F}_i^h(x), \quad h, i = 1, 2, \dots, n.$$

В [1] изучались 2FПО псевдоримановых пространств со структурой вида $F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta = \delta_i^h$, в [7], [8] — $F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta = 0$ при условии ковариантного постоянства аффинора.

В [6] рассматривались некоторые вопросы 2FПО псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f-структурой [11], которая определяется соотношениями

$$F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta + F_i^h = 0$$

и согласована с метрикой пространств $V_n, \overline{V}_n$ в виде

$$\begin{aligned} F_{ij} + F_{ji} &= 0, & F_{ij} &= g_{i\alpha} F_j^\alpha, \\ \overline{F}_{ij} + \overline{F}_{ji} &= 0, & \overline{F}_{ij} &= \overline{g}_{i\alpha} F_i^\alpha. \end{aligned}$$

Продолжая изучение 2FПО псевдоримановых пространств с f-структурой, мы выяснили, что класс пространств с абсолютно параллельной f-структурой представляет собой произведение псевдоримановых пространств, одно из которых кэлерово, и является замкнутым относительно рассматриваемых отображений. Далее, показано, что при условии ковариантного постоянства f-структуры $2F$-планарные отображения могут быть трех типов: полные и канонические I и II типа. Доказано также, что в зависимости от типа 2FПО индуцирует на компонентах произведения, представляющего отображаемые пространства, геодезическое, голоморфно-проективное или аффинное отображение [2].

Исследование ведется в тензорной форме, локально, в классе вещественных достаточно гладких, а в общем случае аналитических функций.

2. Свойства псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f-структурой

1°. Рассмотрим псевдориманово пространство (V_n, g_{ij}, F_i^h) с метрическим тензором g_{ij} и аффинорной структурой F_i^h. Говорят, что F_i^h определяет *f-структуру*, если имеют место условия

$$F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta + F_i^h = 0, \qquad i, h, \alpha, \beta, \ldots = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.1}$$
$$Rg\|F_i^h\| = 2k \quad (2k < n).$$

Самостоятельное понятие f-структуры было введено К. Яно [3], а впоследствии В. Ф. Кириченко пришел к f-структуре как частному случаю введенных им обобщенно почти эрмитовых (GAH)-структур [5].

Будем считать f-структуру согласованной с метрикой в виде

$$F_{ij} + F_{ji} = 0, \qquad F_{ij} = g_{i\alpha} F^{\alpha}_{j} \tag{2.2}$$

Обозначим

$$\overset{1}{F}{}^{h}_{i} = F^{h}_{i}, \qquad \overset{2}{F}{}^{h}_{i} = F^{h}_{\alpha} F^{\alpha}_{i}.$$

В дальнейшем полагаем аффинор ковариантно постоянным:

$$\overset{1}{F}{}^{h}_{i,j} = 0, \tag{2.3}$$

где “,” — знак ковариантной производной в V_n.

2°. Ввиду (2.3) наша аффинорная структура интегрируема [10] и, следовательно, в некоторой окрестности каждой точки V_n за счет выбора системы координат (адаптированной к аффинору) F^{h}_{i} можно привести к виду

$$(\overset{1}{F}{}^{h}_{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_k \\ 0 & -E_k & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\overset{2}{F}{}^{h}_{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_k & 0 \\ 0 & 0 & -E_k \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

то есть

$$\begin{gathered} \overset{1}{F}{}^{a}_{b} = \overset{1}{F}{}^{a}_{B} = \overset{1}{F}{}^{a}_{B+k} = \overset{1}{F}{}^{A}_{b} = \overset{1}{F}{}^{A}_{B} = \overset{1}{F}{}^{A+k}_{b} = \overset{1}{F}{}^{A+k}_{B+k} = 0, \\ \overset{1}{F}{}^{A}_{B+k} = -\overset{1}{F}{}^{A+k}_{B} = \delta^{A}_{B}, \end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} \overset{2}{F}{}^{a}_{b} = \overset{2}{F}{}^{a}_{B} = \overset{2}{F}{}^{a}_{B+k} = \overset{2}{F}{}^{A}_{b} = \overset{2}{F}{}^{A}_{B+k} = \overset{2}{F}{}^{A+k}_{b} = \overset{2}{F}{}^{A+k}_{B} = 0, \\ \overset{2}{F}{}^{A+k}_{B+k} = \overset{2}{F}{}^{A}_{B} = -\delta^{A}_{B}, \end{gathered} \tag{2.6}$$

где $a, b = 1, 2, \dots, n-2k$ и $A, B = n-2k+1, n-2k+2, \dots, n-k$.

Очевидно, что в любой системе координат

$$\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{\alpha} = 0, \qquad \overset{2}{F}{}^{\alpha}_{\alpha} = -2k. \tag{2.7}$$

3°. В адаптированной системе координат на основании (2.2) и (2.4) матрица метрического тензора пространства V_n приобретает специфику:

$$(g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} g_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & g_{AB} & g_{AB+k} \\ 0 & g_{A+kB} & g_{A+kB+k} \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

причем

$$\begin{gathered} g_{ab}(x)=g_{ba}(x), \quad g_{A+kB}(x)=-g_{AB+k}(x) \\ g_{A+kB+k}(x)=g_{AB}(x), \quad g_{AB}(x)=g_{BA}(x) \end{gathered} \tag{2.9}$$

и, по необходимости,

$$Rg\|g_{ab}\|=n-2k, \qquad Rg\|g_{pq}\|=2k,$$

для $a,b=1,2,\ldots,n-2k$ и $p,q=n-2k+1,n-2k+2,\ldots,n$.

Далее, ввиду (2.3) и (2.4), компоненты римановой связности пространства V_n в адаптированной системе координат удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} &\Gamma^a_{cB}=\Gamma^a_{CB}=\Gamma^a_{cB+k}=\Gamma^a_{C+kB+k}=\Gamma^a_{CB+k}=\Gamma^A_{cb}= \\ &\quad=\Gamma^A_{cB+k}=\Gamma^A_{cB}=\Gamma^{A+k}_{cb}=\Gamma^{A+k}_{cB}=\Gamma^{A+k}_{cB+k}=0, \\ &\Gamma^A_{CB+k}=-\Gamma^{A+k}_{CB}=\Gamma^{A+k}_{C+kB+k}, \\ &\Gamma^{A+k}_{C+kB}=-\Gamma^A_{C+kB+k}=\Gamma^A_{CB}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

В частности, на основании (2.8), (2.9), (2.10) следующие компоненты символов Кристоффеля первого рода пространства V_n обращаются в нуль:

$$\Gamma_{ab,C}=\Gamma_{AB,c}=\Gamma_{ab,C+k}=\Gamma_{A+kB,c}=\Gamma_{A+kB+k,c}=0.$$

Отсюда с учетом (2.8) и (2.9) следует:

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^C}=\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^{C+k}}=\frac{\partial g_{AB}}{\partial x^c}=\frac{\partial g_{A+kB}}{\partial x^c}=\frac{\partial g_{A+kB+k}}{\partial x^c}=0,$$

то есть компоненты метрического тензора g_{ab} не зависят от координат x^C, x^{C+k}, а компоненты g_{AB}, g_{AB+k} и g_{A+kB+k} — от координат x^c:

$$\begin{aligned} g_{ab}&=g_{ab}(x^c), & g_{A+kB+k}&=g_{A+kB+k}(x^C,x^{C+k}), \\ g_{AB}&=g_{AB}(x^C,x^{C+k}), & g_{A+kB}&=g_{A+kB}(x^C,x^{C+k}). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Это означает, что наше V_n локально приводимо.

4°**.** Рассмотрим псевдориманово пространство V_{2k} с метрическим тензором

$$(g_{pq}(x^r))=\begin{pmatrix} g_{AB} & g_{AB+k} \\ -g_{AB+k} & g_{AB} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

и аффинорной структурой

$$(\tilde F^p_q)=\begin{pmatrix} 0 & E_k \\ -E_k & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

где $A,B=n-2k+1,\ldots,n-k$ и $p,q,r=n-2k+1,\ldots,n$.

Непосредственным вычислением проверяется, что аффинор $\tilde{F}^p_q$ в V_{2k} удовлетворяет условиям

$$\tilde{F}^p_r \tilde{F}^r_q = -\delta^p_q,$$
$$\tilde{F}_{pq} + \tilde{F}_{qp} = 0, \qquad \tilde{F}_{pq} = g_{pr} \tilde{F}^r_q,$$
$$\tilde{F}^p_{q;r} = 0,$$

где “;” — знак ковариантной производной по связности V_{2k}. Таким образом, $(V_{2k}, g_{pq}(x^r), \tilde{F}^p_q)$ является кэлеровым пространством относительно аффинора $\tilde{F}^p_q$, причем (2.12) и (2.13) — вид матриц $g_{pq}(x^r)$ и $\tilde{F}^p_q$ в системе координат (x^r) адаптированной к аффинору $\tilde{F}^p_q$.

Имеет место

Теорема 2.1. *Псевдориманово пространство (V_n, g_{ij}, F^h_i), в котором аффинор F^h_i удовлетворяет условиям* (2.1)–(2.3), *локально приводимо и представляет собой произведение*

$$\big(V_n, g_{ij}(x^h), F^i_j(x^h)\big) = \big(V_{n-2k}, g_{ab}(x^c)\big) \times \big(V_{2k}, g_{pq}(x^r), \tilde{F}^p_q\big)$$

псевдориманова пространства V_{n-2k} с метрическим тензором $g_{ab}(x^c)$, $a, b, c = 1, \dots, n-2k$ и кэлерова пространства V_{2k} с метрическим тензором g_{pq} и аффинором $\tilde{F}^p_q(x^r)$, $p, q, r = n-2k+1, \dots, n$, которые в адаптированной к $\tilde{F}^p_q$ системе координат x^r имеют вид (2.12) *и* (2.13).

3. 2F-планарные отображения псевдоримановых пространств с f-структурой

1°. Рассмотрим псевдориманово пространство (V_n, g_{ij}, F^h_i) с метрическим тензором $g_{ij}(x)$ и аффинорной структурой $F^h_i(x) \neq a\delta^h_i$ (здесь a — инвариант).

Кривая L, заданная уравнениями

$$x^i = x^i(t),$$
$$\lambda^i(t) = \frac{dx^i}{dt},$$

где t — вещественный параметр, называется $2F$-*планарной*, [1], если вдоль нее выполняются дифференциальные уравнения

$$\lambda^h_{,\alpha}(t)\lambda^\alpha(t) = \overset{\circ}{\rho}(t)\lambda^h(t) + \overset{1}{\rho}(t)\,\overset{1}{F}{}^h_\alpha\,\lambda^\alpha(t) + \overset{2}{\rho}(t)\,\overset{2}{F}{}^h_\alpha\,\lambda^\alpha(t),$$

где ρ°, ρ^1, ρ^2 — некоторые произвольные функции зависящие от параметра t.

Из теории дифференциальных уравнений следует, что через каждую точку V_n в каждом фиксированном направлении проходит множество

$2F$-планарных кривых, зависящее от двух произвольных функций. В класс $2F$-планарных кривых естественным образом входят F-планарные [9], аналитически планарные [2], квази-геодезические кривые, почти геодезические и геодезические линии [10].

2°. Пусть (V_n, g_{ij}, F_i^h) и $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$ — псевдоримановы пространства с заданными на них аффинорными структурами. Отображение V_n на $\overline{V}_n$ называется $2F$-*планарным*, [1], если в результате его любая $2F$-планарная кривая V_n переходит в $2\overline{F}$-планарную кривую в $\overline{V}_n$.

В [1] доказано, что $2F$-планарное отображение по необходимости сохраняет структуру, то есть в общей по отображению системе координат (x^i)

$$F_i^h(x) = \overline{F}_i^h(x), \tag{3.1}$$

и основные уравнения 2FПО имеют вид

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}\delta_{j)}^h + \phi_{(i}\overset{1}{F}{}_{j)}^h + \sigma_{(i}\overset{2}{F}{}_{j)}^h, \tag{3.2}$$

где $\Gamma_{ij}^h, \overline{\Gamma}_{ij}^h$ – компоненты объектов связности $V_n, \overline{V}_n$; $\psi_i(x), \phi_i(x), \sigma_i(x)$ – некоторые ковекторы, а круглыми скобками обозначена операция симметрирования. Кроме того, как и ранее

$$\overset{1}{F}{}_i^h = F_i^h, \qquad \overset{2}{F}{}_i^h = F_\alpha^h F_i^\alpha.$$

2FПО считается тривиальным при $\psi_i = \phi_i = \sigma_i = 0$.

3°. Предположим, что псевдориманово пространство (V_n, g_{ij}, F_i^h) с абсолютно параллельной f-структурой F_i^h допускает нетривиальное 2FПО на $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$. Тогда имеют место (3.1), (3.2), (2.1), (2.2), (2.3). Пусть при этом в $\overline{V}_n$ аффинор согласован с метрикой так же, как и V_n:

$$\overline{F}_{ij} + \overline{F}_{ji} = 0, \qquad \overline{F}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha}F_j^\alpha. \tag{3.3}$$

Найдем связь между ковариантными производными аффинора в $\overline{V}_n$ и V_n:

$$\overset{1}{F}{}_{i|j}^h = \psi_\alpha \overset{1}{F}{}_i^\alpha \delta_j^h + (-\psi_i + \phi_\alpha \overset{1}{F}{}_i^\alpha + \sigma_i) \overset{1}{F}{}_j^h + (\sigma_\alpha \overset{1}{F}{}_i^\alpha - \phi_i) \overset{2}{F}{}_j^h. \tag{3.4}$$

Здесь "|" — знак ковариантной производной в $\overline{V}_n$. Опустим здесь индекс h в $\overline{V}_n$, а затем просимметрируем по h, i. В результате получим соотношения

$$\psi_\alpha \overset{1}{F}{}_{(i}^\alpha \overline{g}_{h)j} + (-\psi_{(i} + \phi_\alpha \overset{1}{F}{}_{(i}^\alpha + \sigma_{(i)}) \overset{1}{\overline{F}}{}_{h)j} + (\sigma_\alpha \overset{1}{F}{}_{(i}^\alpha - \phi_{(i)}) \overset{2}{\overline{F}}{}_{h)j} = 0,$$

из которых свертыванием с $\overline{g}^{hj}$ по h, j с учетом (2.7) находим:

$$\psi_\alpha \overset{1}{F}{}_i^\alpha = 0, -\psi_i + \phi_\alpha \overset{1}{F}{}_i^\alpha + \sigma_i = 0, \qquad \sigma_\alpha \overset{1}{F}{}_i^\alpha - \phi_i = 0 \tag{3.5}$$

При этих условиях из (3.4) вытекает

$$\overset{1}{F}{}_{i|j}^{h} = 0.$$

Таким образом, доказана

Теорема 3.1. *Если псевдориманово пространство (V_n, g_{ij}, F_i^h) с абсолютно параллельной f-структурой допускает нетривиальное $2F$-планарное отображение на $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$, то при условии* (3.3) *аффинор F_i^h определяет на $(\overline{V}_n)$ также абсолютно параллельную в $(\overline{V}_n)$ f-структуру.*

4°. Из (3.5) заключаем, что $\sigma_i = 0$ эквивалентно $\psi_i = \phi_i = 0$, то есть в этом случае 2FПО тривиально, так что нетривиальные 2FПО следует искать среди отображений (V_n, g_{ij}, F_i^h) на $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$ с основными уравнениями (3.2), где имеет место один из вариантов:

$$\begin{array}{llll} I & \psi_i = 0, & \phi_i \neq 0, & \sigma_i \neq 0; \\ II & \psi_i \neq 0, & \phi_i = 0, & \sigma_i \neq 0; \\ III & \psi_i \neq 0, & \phi_i \neq 0, & \sigma_i \neq 0. \end{array}$$

Будем называть $2F$-планарное отображение *каноническим I типа (соотв. II типа)* и обозначать 2FПО(I) (соотв. 2FПО(II)) в случае I (соотв. II) и просто 2FПО в случае III. Заметим, что теорема 3.1 верна и для канонических 2FПО(I) и 2FПО(II).

4. Структурные особенности $2F$-планарных отображений псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f-структурой

1°. Рассмотрим $2F$-планарное отображение пространства с абсолютно параллельной f-структурой (V_n, g_{ij}, F_i^h) на $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$ при условиях III и (3.3). Из теорем 2.1 и 3.1 следует, что $\overline{V}_n$, как и V_n, приводимо и в адаптированной системе координат, общей по отображению, а его метрический тензор имеет вид

$$(\overline{g}_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} \overline{g}_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{g}_{AB} & \overline{g}_{AB+k} \\ 0 & \overline{g}_{A+kB} & \overline{g}_{A+kB+k} \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где

$$\begin{aligned}\overline{g}_{ab}(x^c) &= \overline{g}_{ba}(x^c),\\ \overline{g}_{A+kB}(x^C, x^{C+k}) &= -\overline{g}_{AB+k}(x^C, x^{C+k})\\ \overline{g}_{A+kB+k}(x^C, x^{C+k}) &= \overline{g}_{AB}(x^C, x^{C+k}),\\ \overline{g}_{AB}(x^C, x^{C+k}) &= \overline{g}_{BA}(x^C, x^{C+k}),\end{aligned}$$

$a, b = 1, \ldots, n-2k$, $A, B = n-2k+1, \ldots, n-k$. Соотношения (3.5), записанные в адаптированной системе координат с учетом (2.5) и (2.6) дают нам:

$$(\psi_i) = (\psi_a, 0, 0), \qquad (\phi_i) = (0, \phi_A, \phi_{A+k}), \qquad (\sigma_i) = (\psi_a, \phi_{A+k}, -\phi_A).$$

Тогда основные уравнения $2F$-планарного отображения (3.2) распадаются на группы:

$$\begin{aligned}\Gamma^a_{bp} = \Gamma^a_{pq} = \Gamma^p_{aq} = \Gamma^p_{ab} = 0,\\ \overline{\Gamma}^a_{bp} = \overline{\Gamma}^a_{pq} = \overline{\Gamma}^p_{aq} = \overline{\Gamma}^p_{ab} = 0,\end{aligned} \tag{4.2}$$

и

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^a_{bc}(x^d) &= \Gamma^a_{bc}(x^d) + \psi_{(b}\delta^a_{c)},\\ \overline{\Gamma}^p_{qr}(x^s) &= \Gamma^p_{qr}(x^s) + \eta_t \tilde{F}^t_{(q}\delta^p_{r)} + \eta_{(q}\tilde{F}^p_{r)},\end{aligned} \tag{4.3}$$

где

$$(\eta_q) = (\phi_A, \phi_{A+k}), \qquad\qquad (\tilde{F}^p_q) = \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ -E_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Из (4.3) следует, что

$$\psi_a = \psi_a(x^b), \qquad\qquad \eta_q = \eta_q(x^p),$$

где $a, b, c, d = 1, \ldots, n-2k$, $p, q, r, s, t = n-2k+1, \ldots, n$, а также что с учетом теорем 2.1 и 3.1 $\tilde{F}^p_q$ определяет кэлерову структуру на пространствах (V_{2k}, g_{pq}) и $(\overline{V}_{2k}, \overline{g}_{pq})$.

Первая группа соотношений (4.3) представляют собой основные уравнения геодезического отображения римановых пространств, см. [10],

$$f_1 : (V_{n-2k}, g_{ab}(x^c)) \to (\overline{V}_{n-2k}, \overline{g}_{ab}(x^c)),$$

а вторая — основные уравнения голоморфно-проективного отображения кэлеровых пространств с сохранением почти комплексной структуры, см. [2],

$$f_2 : \big(V_{2k}, g_{pq}(x^r), \tilde{F}^p_q\big) \to \big(\overline{V}_{2k}, \overline{g}_{pq}(x^r), \tilde{F}^p_q\big).$$

Таким образом, доказана

Теорема 4.1. *$2F$-планарное отображение псевдоримановых пространств с сохранением абсолютно параллельной f-структуры*

$$\left(V_n, g_{ij}, F_i^h\right) = \left(V_{n-2k}, g_{ab}(x^c)\right) \times \left(V_{2k}, g_{pq}(x^r), \tilde{F}_q^p\right)$$

и

$$\left(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, F_i^h\right) = \left(\overline{V}_{n-2k}, \overline{g}_{ab}(x^c)\right) \times \left(\overline{V}_{2k}, \overline{g}_{pq}(x^r), \tilde{F}_q^p\right)$$

индуцирует геодезическое отображение псевдоримановых пространств

$$f_1 : \left(V_{n-2k}, g_{ab}(x^c)\right) \to \left(\overline{V}_{n-2k}, \overline{g}_{ab}(x^c)\right),$$

и голоморфно-проективное отображение кэлеровых пространств с сохранением почти комплексной структуры

$$f_2 : \left(V_{2k}, g_{pq}(x^r), \tilde{F}_q^p\right) \to \left(\overline{V}_{2k}, \overline{g}_{pq}(x^r), \tilde{F}_q^p\right).$$

При этом метрические тензоры и структурный аффинор указанных пространств в адаптированной системе координат представлены формулами (2.4), (2.8), (2.12), (2.13), (4.1).

2°. Рассмотрим каноническое $2F$-планарное отображение I типа, когда в (3.2)

$$\psi_i = 0, \qquad \phi_i \neq 0, \qquad \sigma_i \neq 0.$$

Тогда соотношения (3.5) в адаптированной системе координат дают нам

$$(\psi_i) = (0,0,0), \qquad (\phi_i) = (0, \phi_A, \phi_{A+k}), \qquad (\sigma_i) = (0, \phi_{A+k}, -\phi_A).$$

и для ненулевых компонент объектов связности $V_n, \overline{V}_n$ имеем:

$$\overline{\Gamma}_{bc}^a(x^d) = \Gamma_{bc}^a(x^d),$$
$$\overline{\Gamma}_{qr}^p(x^s) = \Gamma_{qr}^p(x^s) + \eta_t \tilde{F}_{(q}^t \delta_{r)}^p + \eta_{(q} \tilde{F}_{r)}^p,$$

где

$$(\eta_q) = (\phi_A, \phi_{A+k}), \qquad (\tilde{F}_q^p) = \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ -E_k & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае отображение

$$f_1 : \left(V_{n-2k}, g_{ab}(x^c)\right) \to \left(\overline{V}_{n-2k}, \overline{g}_{ab}(x^c)\right),$$

вырождается в аффинное, [10], а

$$f_2 : \left(V_{2k}, g_{pq}(x^r), \tilde{F}_q^p\right) \to \left(\overline{V}_{2k}, \overline{g}_{pq}(x^r), \tilde{F}_q^p\right),$$

как и прежде, является голоморфно-проективным.

Теорема 4.2. *Каноническое I типа $2F$-планарное отображение псевдоримановых пространств с сохранением абсолютно параллельной f-структуры*

$$\big(V_n, g_{ij}, F_i^h\big) = \big(V_{n-2k}, g_{ab}(x^c)\big) \times \big(V_{2k}, g_{pq}(x^r), \tilde{F}_q^p\big)$$

и

$$\big(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, F_i^h\big) = \big(\overline{V}_{n-2k}, \overline{g}_{ab}(x^c)\big) \times \big(\overline{V}_{2k}, \overline{g}_{pq}(x^r), \tilde{F}_q^p\big)$$

индуцирует аффинное отображение псевдоримановых пространств

$$f_1 : \big(V_{n-2k}, g_{ab}(x^c)\big) \to \big(\overline{V}_{n-2k}, \overline{g}_{ab}(x^c)\big),$$

и голоморфно-проективное отображение кэлеровых пространств с сохранением почти комплексной структуры

$$f_2 : \big(V_{2k}, g_{pq}(x^r), \tilde{F}_q^p\big) \to \big(\overline{V}_{2k}, \overline{g}_{pq}(x^r), \tilde{F}_q^p\big).$$

При этом метрические тензоры и структурный аффинор указанных пространств в адаптированной системе координат представлены формулами (2.4), (2.8), (2.12), (2.13), (4.1).

3°. Наконец, при каноническом $2F$-планарном отображении II типа в (3.2)

$$\psi_i \neq 0, \qquad \phi_i = 0, \qquad \sigma_i \neq 0.$$

Тогда из (3.5) следует $\psi_i = \sigma_i$ и в адаптированной системе координат

$$(\psi_i) = (\sigma_i) = (\psi_a, 0, 0), \qquad (\phi_{(i}) = (0, 0, 0).$$

Поэтому для ненулевых компонент объектов связности $V_n, \overline{V}_n$ имеем:

$$\overline{\Gamma}^a_{bc}(x^d) = \Gamma^a_{bc}(x^d) + \psi_{(b}\delta^a_{c)},$$
$$\overline{\Gamma}^p_{qr}(x^s) = \Gamma^p_{qr}(x^s),$$

то есть отображение

$$f_1 : \big(V_{n-2k}, g_{ab}(x^c)\big) \to \big(\overline{V}_{n-2k}, \overline{g}_{ab}(x^c)\big),$$

является геодезическим, а

$$f_2 : \big(V_{2k}, g_{pq}(x^r), \tilde{F}_q^p\big) \to \big(\overline{V}_{2k}, \overline{g}_{pq}(x^r), \tilde{F}_q^p\big),$$

вырождается в аффинное.

Теорема 4.3. *Каноническое II типа $2F$-планарное отображение псевдоримановых пространств с сохранением абсолютно параллельной f-структуры*

$$\big(V_n, g_{ij}, F_i^h\big) = \big(V_{n-2k}, g_{ab}(x^c)\big) \times \big(V_{2k}, g_{pq}(x^r), \tilde{F}_q^p\big)$$

и

$$\big(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, F_i^h\big) = \big(\overline{V}_{n-2k}, \overline{g}_{ab}(x^c)\big) \times \big(\overline{V}_{2k}, \overline{g}_{pq}(x^r), \tilde{F}_q^p\big)$$

индуцирует геодезическое отображение псевдоримановых пространств

$$f_1 : \big(V_{n-2k}, g_{ab}(x^c)\big) \to \big(\overline{V}_{n-2k}, \overline{g}_{ab}(x^c)\big),$$

и аффинное отображение кэлеровых пространств с сохранением почти комплексной структуры

$$f_2 : \big(V_{2k}, g_{pq}(x^r), \tilde{F}^p_q\big) \to \big(\overline{V}_{2k}, \overline{g}_{pq}(x^r), \tilde{F}^p_q\big).$$

При этои метрические тензоры и структурный аффинор указанных пространств в адаптированной системе координат представлены формулами (2.4), (2.8), (2.12), (2.13), (4.1).

3°. Как известно, одной из серьезнейших проблем в теоретических исследованиях является построение примеров, подтверждающих существование изучаемых объектов. В теории диффеоморфизмов многообразий известны широкие классы римановых пространств, допускающих геодезические отображения [10], и кэлеровых пространств, допускающих голоморфно-проективные отображения с сохранением почти комплексной структуры [2]. Поэтому полученные выше теоремы дают возможность конструировать многочисленные классы псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f-структурой и их $2F$-планарные отображения.

Литература

[1] Raad Kadem. О $2F$-планарных отображениях пространств аффинной связности. *Abstracts of the Colloquium on Differential Geometry, Eger, Hungary*, 20–25, 1989.

[2] Josef Mikes, Alena Vanzurova, Irina Hinterleitner. *Geodesic mappings and some generalizations*. Palacky University Press, 2009.

[3] Kentaro Yano. On a structure defined by a tensor field f of type (1, 1) satisfying $f^3 + f = 0$. *Tensor (N.S.)*, 14:99–109, 1963.

[4] Петров А. З. Геометрия и физическое пространство-время. *Итоги науки и техники. Серия Алгебра. Топология. Геометрия. Фундаментальные направления*, 5:221–265, 1968.

[5] В. Ф. Кириченко. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий. *Итоги науки и техники. Проблемы геометрии*, 18:25–71, 1986.

[6] Н. Г. Коновенко. $2F$-планарные отображения римановых пространств, сохраняюших обобщенную f-структуру. *Лаптевские чтения: Сборник трудов Международного геометрического семинара имени Г.Ф.Лаптева, Пенза*, 59–64, 2004.

[7] И. Н. Курбатова. $2F$-планарные отображения 3-параболически келеровых пространств. *Математика, информатика, их приложения и роль в образовании: Материалы второй Российской школы-конференции с международным участием для молодых ученых: статьи, обзоры, тезисы докладов, Тверь*, 195–200, 2010.

[8] И. Н. Курбатова. Метрики $2F$-плоских 3-параболически келеровых пространств. *Известия ПГПУ, Физико-математические науки*, (26):121–127, 2011.

[9] Й. Микеш, Н. С. Синюков. О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности. *Известия ВУЗов, Математика*, 27(1):55–61, 1983.

[10] Н. С. Синюков. *Геодезические отображения римановых пространств.* М.:Наука: Москва, 1979.

[11] А. П. Широков. Структуры на дифференцируемых многообразиях. *Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топол. Геом. 1967*, 11:153–207, 1969.

Поступила в редакцию 5 января 2018, принята к печати 22 февраля 2018.

Коновенко Н.Г.
ОНАПТ, Одесса, Украина
Email: konovenko@ukr.net
ORCID: orcid.org/0000-0002-8631-0688

Курбатова И.Н.
ОНУ, Одесса, Украина
Email: irina.kurbatova27@gmail.com

Цвентух Е.
ОНУ, Одесса, Украина
Email: ktsventoukh@gmail.com