Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 11, no. 3 (2018) pp. 1–18

Про моногенні функції на розширеннях комутативної алгебри

В. С. Шпаківський

Abstract. A relation between spatial potential fields and analytic functions given in commutative algebras was established by P. W. Ketchum who has shown that every analytic function $\Phi(\zeta)$ of the variable $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ satisfies the equation

$$\Delta_3 u(x,y,z) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u(x,y,z) = 0$$

in the case where the elements e_1, e_2, e_3 of a commutative algebra satisfy the condition

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0\,,$$

because

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \equiv \Phi''(\zeta)\ (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 0\,,$$

where $\Phi'' := (\Phi')'$ and $\Phi'(\zeta)$ is defined by the equality $d\Phi = \Phi'(\zeta)d\zeta$.

I. P. Mel'nichenko noticed that doubly differentiable in the sense of Gateaux functions form the largest algebra of functions Φ satisfying identically the above equalities, where Φ'' is the Gateaux second derivative of function Φ.

It is proved in [1] that for constructing solutions of the equation

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, \frac{\partial^N U}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma} = 0, \quad C_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathbb{R}.$$

in the form of components of monogenic functions with values in finite-dimensional commutative associative algebras it suffices to confine itself to studying monogenic functions in algebras of a certain type, that is, in algebras $\mathbb{A}_n$.

For n-dimensional $(2 \le n < \infty)$ commutative associative algebra $\mathbb{A}_n$ we introduce a concept of *expansion* as a set of $(n+1)$-dimensional commutative associative algebras with certain multiplication rules. A relation between

Робота виконана при підтримці Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U001528).

2010 Mathematics Subject Classification: 30G35, 57R35

Ключові слова: commutative associative algebra, monogenic function, expansion of algebra

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v11i3.1200

monogenic (continuous and differentiable in the sense of Gâteaux) functions in the algebra $\mathbb{A}_n$ and monogenic functions that defined on expansions of $\mathbb{A}_n$ is established. For the equation above it will mean the following: if its complex-valued solution $U(x, y, z)$ is a component of monogenic function in the algebra $\mathbb{A}_n$ for $n < N$, then there exists the algebra of the form $\mathbb{A}_N$ and there exists a monogenic function Φ in $\mathbb{A}_N$ such that $U(x, y, z)$ is a component of the function Φ. The results obtained in this paper hold for the equations of the above type of d variables for all integer $2 \leq d \leq 2N$.

Анотація. Для n-вимірної ($2 \leq n < \infty$) комутативної асоціативної алгебри $\mathbb{A}_n$ введено поняття *розширення* як сімейства $(n+1)$-вимірних комутативних асоціативних алгебр з певними правилами множення. Встановлено зв'язок між моногенними (неперервними і диференційовними за Гато) функціями в алгебрі $\mathbb{A}_n$ і моногенними функціями, визначеними на розширеннях алгебри $\mathbb{A}_n$.

1. Постановка проблеми

Ідея про побудову розв'язків заданих диференціальних рівнянь в частинних похідних у вигляді компонент аналітичних функцій в комутативних алгебрах знаходить свій початок ще в роботі П. Кетчума [3]. Він використав аналітичні функції зі значення в комутативній алгебрі для побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа.

Узагальнюючи П. Кетчума, М. Рошкулець [7], [8] використовував аналітичні функції зі значеннями в комутативних алгебрах для дослідження рівнянь вигляду

$$\mathcal{L}_N U(x, y, z) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\partial^N U}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta \, \partial z^\gamma} = 0, \quad C_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Розглядаючи змінну $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ і аналітичну функцію $\Phi(\zeta)$, отримуємо наступну рівність для мішаної похідної:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}\Phi}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta \, \partial z^\gamma} = e_1^\alpha \, e_2^\beta \, e_3^\gamma \, \Phi^{(\alpha+\beta+\gamma)}(\zeta) = e_1^\alpha \, e_2^\beta \, e_3^\gamma \, \Phi^{(N)}(\zeta). \tag{1.2}$$

Підставляючи (1.2) в рівняння (1.1), маємо рівність

$$\mathcal{L}_N \Phi(\zeta) = \Phi^{(N)}(\zeta) \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \, e_1^\alpha \, e_2^\beta \, e_3^\gamma \,,$$

яка показує, що для виконання рівності $\mathcal{L}_N \Phi(\zeta) = 0$ елементи алгебри $e_1 = 1, e_2, e_3$ мають задовольняти таке *характеристичне рівняння*:

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \, e_2^\beta \, e_3^\gamma = 0 \,. \tag{1.3}$$

Якщо ліву частину рівняння (1.3) розкласти за базисом алгебри, то характеристичне рівняння (1.3) рівносильне *характеристичній системі рівнянь*, породженій рівнянням (1.3).

Таким чином, при виконанні умови (1.3) кожна аналітична функція Φ зі значеннями в довільній комутативній асоціативній алгебрі задовольняє рівняння (1.1), і, відповідно, усі дійснозначні компоненти функції Φ є розв'язками рівняння (1.1).

В роботі [6] розглядаються диференціальні рівняння в частинних похідних від декількох змінних і наведено ряд прикладів на застосування описаного вище методу.

І. Мельниченко [4] запропонував розглядати в рівності (1.2) функції Φ, що N разів диференційовні за Гато. При цьому неперервну і диференційовну за Гато функцію І. Мельниченко назвав *моногенною*.

Підкреслимо, що описаний вище підхід до побудови розв'язків певних класів рівнянь з частинними похідними розвивається з використанням комутативних алгебр. І тому результати, що одержуються у цьому напрямку ніяк не можуть бути наслідками деяких схожих за формую результатів з кліффордового аналізу. Зокрема, в роботі [9] отримано конструктивний опис моногенних функцій (пов'язаних з рівнянням (1.1)) зі значеннями в довільній комутативній асоціативній алгебрі над полем $\mathbb{C}$ за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної.

В роботі [11] показано, що для побудови розв'язків рівняння (1.1) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в скінченновимірних комутативних асоціативних алгебрах достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій у алгебрах певного виду. Зупинимось детальніше на цьому результаті.

Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел і $m, n \in \mathbb{N}$ такі, що $m \leq n$. Нехай далі $\mathbb{A}_n^m$ — довільна комутативна асоціативна алгебра з одиницею над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Е. Картан [1, с. 33] довів, що в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ існує базис $\{I_k\}_{k=1}^n$, який задовольняє наступні правила множення:

- для всіх $r, s \in [1, m] \cap \mathbb{N}$

$$I_r I_s = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq s, \\ I_r & \text{при } r = s; \end{cases}$$

- для всіх $r, s \in [m+1, n] \cap \mathbb{N}$

$$I_r I_s = \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \Upsilon_{r,k}^{s} I_k \tag{1.4}$$

- для кожного $s \in [m+1, n] \cap \mathbb{N}$ існує таке $u_s \in [1, m] \cap \mathbb{N}$, що для всіх $r \in [1, m] \cap \mathbb{N}$

$$I_r I_s = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq u_s\,, \\ I_s & \text{при } r = u_s. \end{cases}$$

Відмітимо, що перші m базисних векторів $\{I_u\}_{u=1}^m$ є ідемпотентами і породжують напівпросту підалгебру S алгебри $\mathbb{A}_n^m$. Очевидно також, що вектори $\{I_r\}_{r=m+1}^n$ породжують нільпотентну підалгебру N цієї алгебри. Крім того, з правил множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$ випливає, що $\mathbb{A}_n^m$ є напівпрямою сумою m-вимірної напівпростої підалгебри S і $(n-m)$-вимірної нільпотентної підалгебри N, тобто

$$\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N.$$

Теорема 5.1 роботи [11] стверджує, що для побудови розв'язків диференціального рівняння (1.1) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в комутативних асоціативних алгебрах, достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в алгебрах з базисом

$$\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\},$$

де $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — нільпотенти, тобто в алгебрах виду

$$\mathbb{A}_n := \mathbb{A}_n^1 = 1 \oplus_s N.$$

Це означає, що кількість таких n-вимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем $\mathbb{C}$, в яких потрібно вивчати моногенні функції, дорівнює кількості $(n-1)$-вимірних комутативних асоціативних нільпотентних алгебр над $\mathbb{C}$. Наведемо таблицю з даними про кількість таких алгебр (відносно посилань по кількість таких алгебр див. зауваження 5.3 в роботі [11]).

n	кількість алгебр виду $\mathbb{A}_n^m$	кількість алгебр виду $\mathbb{A}_n$
2	2	1
3	4	2
4	9	4
5	25	9
6	53	25
≥ 7	∞	∞

У даній роботі буде встановлено зв'язок між моногенними функціями, що визначені в алгебрах $\mathbb{A}_n$ та в спеціальних алгебрах виду $\mathbb{A}_{n+1}$ (які буде названо *розширеннями*) при всіх натуральних $n \geq 2$. Для рівняння (1.1) це означатиме таке: якщо комплекснозначний розв'язок $U(x, y, z)$ рівняння (1.1) є деякою компонентою моногенної функції в деякій алгебрі $\mathbb{A}_n$ при $n < N$, то серед алгебр виду $\mathbb{A}_N$ існує алгебра $\mathbb{A}$ і існує моногенна функція Φ в $\mathbb{A}$ така, що $U(x, y, z)$ є деякою компонентою функції Φ.

2. Характеристичне рівняння в алгебрах $\mathbb{A}_n$

Спершу покажемо, що у всіх алгебрах виду $\mathbb{A}_n$ характеристичне рівняння (1.3) завжди має розв'язки.

З правил множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$ випливає, що таблиця множення алгебри $\mathbb{A}_n$ має вигляд

$$I_r\, I_s = \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \Upsilon_{r,k}^{s} I_k\,, \qquad \forall\, r, s \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \tag{2.1}$$

тобто

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c}
\cdot & 1 & I_1 & I_2 & \ldots & I_{n-1} \\
\hline\hline
1 & 1 & I_1 & I_2 & \ldots & I_{n-1} \\
\hline
I_1 & I_1 & \sum\limits_{k=2}^{n-1} \Upsilon_{1,k}^{1} I_k & \sum\limits_{k=3}^{n-1} \Upsilon_{2,k}^{1} I_k & \cdots & 0 \\
\hline
I_2 & I_2 & \sum\limits_{k=3}^{n-1} \Upsilon_{2,k}^{1} I_k & \sum\limits_{k=3}^{n-1} \Upsilon_{2,k}^{2} I_k & \cdots & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
I_{n-1} & I_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\,, \tag{2.2}$$

де структурні константи алгебри $\Upsilon_{r,k}^{s} \in \mathbb{C}$ такі як і в рівності (1.4). Покладемо $I_0 := 1$.

Лема 2.1. *Для довільного елемента $a := \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\, I_k$, $a_k \in \mathbb{C}$, алгебри $\mathbb{A}_n$ і довільного натурального β справедлива рівність*

$$a^{\beta} = a_0^{\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(a_0, a_1, \ldots, a_k)\, I_k\,, \tag{2.3}$$

де P_k — однорідний поліном степеня β своїх аргументів.

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції по β. При $\beta = 1$ твердження леми очевидне. Припустимо, що формула (2.3) справедлива при $\beta = s$:

$$a^{s} = a_0^{s} + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(a_0, a_1, \ldots, a_k)\, I_k$$

де P_k — однорідний поліном степеня s. Користуючись таблицею множення алгебри $\mathbb{A}_n$, доведемо справедливість формули (2.3) при $\beta = s+1$. Отже, маємо:

$$a^{s+1} = a^s a = a_0^{s+1} + I_1(a_0^s a_1 + P_1 a_0) + I_2(a_0^s a_2 + P_1 a_1 \Upsilon_{1,1}^2 + a_0 P_2) + \cdots$$
$$\cdots + I_{n-1}\Big[a_0^s a_{n-1} + P_{n-1} a_0 + \Upsilon_{1,n-1}^1 a_1 P_1 + \Upsilon_{2,n-1}^1 (a_2 P_1 + a_1 P_2) +$$
$$+ \Upsilon_{2,n-1}^2 a_2 P_2 + \Upsilon_{3,n-1}^1 (a_3 P_1 + a_1 P_3) + \Upsilon_{3,n-1}^1 (a_3 P_1 + a_1 P_3) +$$
$$+ \Upsilon_{3,n-1}^2 (a_3 P_2 + a_2 P_3) \cdots + \Upsilon_{n-1,n-1}^{n-2} a_{n-2} P_{n-2}\Big] =:$$
$$=: a_0^{s+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{P}_k(a_0, a_1, \ldots, a_k)\, I_k\,,$$

де $\widetilde{P}_k$ — однорідний поліном степеня $s+1$. □

Повністю аналогічно до леми 2.1, з використанням таблиці множення (2.2), доводиться така лема.

Лема 2.2. *Поліноми P_k з рівності* (2.3) *подаються у вигляді*

$$P_k(a_0, a_1, \ldots, a_k) = \beta a_0^{\beta-1} a_k + \widehat{P}_k(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}),$$

де $\widehat{P}_k$ — однорідний поліном степеня β. □

Теорема 2.3. *В кожній алгебрі виду $\mathbb{A}_n$ характеристичне рівняння* (1.3) *має розв'язки.*

Доведення. Нехай

$$e_1 = 1, \quad e_2 = \sum_{r=0}^{n-1} a_r I_r\,, \quad e_3 = \sum_{r=0}^{n-1} b_r I_r\,,$$

де $a_r, b_r \in \mathbb{C}$.

З леми 2.1 випливають рівності

$$e_2^\beta = a_0^\beta + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(a_0, a_1, \ldots, a_k)\, I_k\,, \quad e_3^\gamma = b_0^\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} Q_k(b_0, b_1, \ldots, b_k)\, I_k\,,$$

де $P_k\,, Q_k$ — однорідні поліноми степенів β і γ, відповідно. Тоді для лівої частини рівняння (1.3) маємо

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, e_2^\beta\, e_3^\gamma = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, a_0^\beta\, b_0^\gamma + I_1\, R_1\big(b_0^\gamma P_1, a_0^\beta Q_1\big) +$$
$$+ I_2\, R_2\big(b_0^\gamma P_2, a_0^\beta Q_2, P_1 Q_1\big) + I_3\, R_3\big(b_0^\gamma P_3, a_0^\beta Q_3, P_1 Q_1, P_1 Q_2, P_2 Q_1\big) + \cdots$$
$$\cdots + I_{n-1}\, R_{n-1}\big(b_0^\gamma P_{n-1}, a_0^\beta Q_{n-1}, P_i Q_j\,,\, i,j = \{1, 2, \ldots, n-2\}\big),$$

де R_k — лінійна функція своїх аргументів. Отже, при $k = 1, 2, \ldots, n-1$ функція R_k є однорідним поліномом степеня $\beta+\gamma$ від аргументів a_0, b_0, $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$.

Таким чином, характеристичне рівняння (1.3) рівносильне такій характеристичній системі рівнянь:

$$\begin{gathered}\sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, a_0^\beta\, b_0^\gamma = 0,\\ R_1(a_0, b_0, a_1, b_1) = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ R_{n-1}(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}) = 0,\end{gathered} \tag{2.4}$$

де поліноми R_k визначені вище.

Перше рівняння системи (2.4) є комплексним поліномом від двох змінних степеня $\beta+\gamma$. Зафіксуємо $a_0 \neq 0$. Тоді за основною теоремою алгебри з першого рівняння системи (2.4) знаходимо b_0. Тепер a_0, b_0 визначені. Тоді за лемою 2.2 друге рівняння системи (2.4) є лінійним відносно невідомих a_1, b_1. Зафіксуємо a_1. Тоді з лінійного відносно b_1 рівняння $R_1(a_0, b_0, a_1, b_1) = 0$ знаходимо b_1 через a_0, a_1. Аналогічно з третього рівняння виражаємо b_2 через a_0, a_1, a_2. Продовжуючи цей процес $n-1$ раз всі b_k при $k = 1, 2, \ldots, n-1$ будуть виражені через $a_0, a_1, \ldots, a_k$. При цьому $a_0, a_1, \ldots, a_k$ — довільні комплексні числа. $\square$

Зауважимо, що в теоремі 2.3 не стверджується лінійна незалежність векторів e_1, e_2, e_3.

Отже, ми довели навіть більше, що за умов теореми 2.3 вектор e_2 (або e_3) можна вибрати довільним, а тому знайдеться вектор e_3 (або e_2), який задовольняє характеристичне рівняння (1.3).

Теорему 2.3 можна узагальнити на випадок характеристичного рівняння вигляду:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, e_1^\alpha\, e_2^\beta\, e_3^\gamma = 0\,, \tag{2.5}$$

тобто сума $\alpha+\beta+\gamma$ не рівна N. Ми також відмовилися від умови $e_1 = 1$.

Наслідок 2.4. *В кожній алгебрі виду $\mathbb{A}_n$ характеристичне рівняння* (2.5) *має розв'язки.*

Доведення повністю аналогічне до доведення теореми 2.3, лише у системі (2.4) R_k є поліномами степеня $\alpha+\beta+\gamma$, але не однорідними.

Характеристичне рівняння (2.5) виникає тоді, коли ми розглядаємо лінійне диференціальне рівняння вигляду

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma} C_{\alpha,\beta,\gamma}\,\frac{\partial^N U}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}=0,\quad C_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathbb{R}. \tag{2.6}$$

У цьому випадку функція $\Phi(\zeta)=\exp\zeta$ при $\zeta=xe_1+ye_2+ze_3$ зі значеннями у будь-якій алгебрі виду $\mathbb{A}_n$ є розв'язком рівняння (2.6), якщо вектори e_1,e_2,e_3 задовольняють рівняння (2.5). Вказаний підхід було реалізовано в роботі [10] для рівняння

$$V_{ttt}(t,x)+\mu V_{tt}(t,x)-\nu V_{xx}(t,x)=0,$$

при $\mu,\nu\in(0,\infty)$, яке використовується в одній моделі гідродинаміки.

3. Розширення алгебри та їх властивості

Нехай $\widetilde{\mathbb{A}}_{n+1}$ — $(n+1)$-вимірна комутативна асоціативна алгебра з базисом $\{1,\widetilde{I}_1,\widetilde{I}_2,\dots,\widetilde{I}_n\}$ виду (2.1):

$$\forall\, r,s\in\{1,2,\dots,n\}\qquad \widetilde{I}_r\,\widetilde{I}_s=\sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n}\widetilde{\Upsilon}^s_{r,k}\,\widetilde{I}_k\,.$$

Нехай, як і раніше, $\mathbb{A}_n$ — n-вимірна комутативна асоціативна алгебра з базисом $\{1,I_1,I_2,\dots,I_{n-1}\}$ і таблицею множення (2.1).

Означення 3.1. Алгебра $\widetilde{\mathbb{A}}_{n+1}$ називається розширенням алгебри $\mathbb{A}_n$, якщо справедливі рівності

$$\widetilde{\Upsilon}^s_{r,k}=\Upsilon^s_{r,k} \tag{3.1}$$

$$\forall\, k\in\{2,\dots,n-1\}\quad \forall\, r,s\in\{1,2,\dots,k-1\}. \tag{3.2}$$

Надалі розширення алгебри $\mathbb{A}_n$ позначатимемо через $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$.

Зауваження 3.2. З умови (3.2) випливає, що $r,s=1,2,\dots,n-2$. Тому для коректності означення необхідно, щоб $n\geq 3$. При $n=2$ за означенням покладаємо, що алгебра $\mathbb{A}_3(\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{C}$, з таблицею множення

$\cdot$	1	$\widetilde{I}_1$	$\widetilde{I}_2$
1	1	$\widetilde{I}_1$	$\widetilde{I}_2$
$\widetilde{I}_1$	$\widetilde{I}_1$	$\alpha\widetilde{I}_2$	0
$\widetilde{I}_2$	$\widetilde{I}_2$	0	0

є розширенням бігармонічної алгебри $\mathbb{B}$ (див., наприклад, [2]) з таблицею множення

$\cdot$	1	I_1
1	1	I_1
I_1	I_1	0

Зауважимо, що алгебра $\mathbb{A}_3(\alpha)$ при всіх $\alpha \in \mathbb{C}$ ізоморфна алгебрі $\mathbb{A}_3(1)$, моногенні функції в якій вивчались в роботі [5].

Зауваження 3.3. Іншими словами, рівність (3.1) означає, що якщо в таблиці множення виду (2.2) алгебри $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ відкинути останній рядок і останній стовпчик і скрізь у таблиці множення елемент $\widetilde{I}_n$ замінити на нуль, то отримаємо таблицю множення алгебри $\mathbb{A}_n$.

Розглянемо приклади розширень.

Приклад 3.4. Кожна з наведених нижче алгебр є розширенням попередньої алгебри.

$\mathbb{B} \ \rightarrow \ \mathbb{A}_3(1) \ \rightarrow$

$\cdot$	1	I_1	I_2	I_3
1	1	I_1	I_2	I_3
I_1	I_1	I_2	I_3	0
I_2	I_2	I_3	0	0
I_3	I_3	0	0	0

$\rightarrow$

$\cdot$	1	I_1	I_2	I_3	I_4
1	1	I_1	I_2	I_3	I_4
I_1	I_1	I_2	I_3	I_4	0
I_2	I_2	I_3	I_4	0	0
I_3	I_3	I_4	0	0	0
I_4	I_4	0	0	0	0

.

Можна говорити також про *послідовність розширень*. Очевидно, що наведені вище алгебри мають такі відповідні базиси: $\{1, I^1\}$, $I^2 = 0$; $\{1, I^1, I^2\}$, $I^3 = 0$; $\{1, I^1, I^2, I^3\}$, $I^4 = 0$; $\{1, I^1, I^2, I^3, I^4\}$, $I^5 = 0$. Для кожного натурального n розглянемо алгебру з базисом $\{1, I^1, I^2, \ldots, I^n\}$, $I^{n+1} = 0$. Очевидно, що $(n+1)$-ша алгебра є розширенням n-ї алгебри. Якщо n пробігає всю множину натуральних чисел, то у такому випадку будемо казати, що маємо *послідовність розширень.*

Наведемо найпростіші властивості розширень.

1^o *Розширення алгебри* $\mathbb{A}_n$ *не єдине.*

2^o *Довільна алгебра виду* $\mathbb{A}_{n+1}$ *є розширенням лише однієї алгебри.*

Перейдемо до вивчення аналітичних властивостей в алгебрі $\mathbb{A}_n$ та в її розширенні $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$.

Означення 3.5. На алгебрі $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ визначимо лінійний оператор

$$\widetilde{P} : \mathbb{E}(\mathbb{A}_n) \mapsto \mathbb{A}_n$$

рівностями

$$\widetilde{P}(1) = 1, \qquad \widetilde{P}(\widetilde{I}_k) = I_k \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad \widetilde{P}(\widetilde{I}_n) = 0.$$

Тобто, для довільного $\tilde{a} := a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \widetilde{I}_k \in \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$, $a_0, a_k \in \mathbb{C}$ маємо $\widetilde{P}(\tilde{a}) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k I_k \in \mathbb{A}_n$.

Означення 3.6. На алгебрі $\mathbb{A}_n$ визначимо лінійний оператор

$$P : \mathbb{A}_n \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$$

рівностями

$$P(1) = 1, \qquad P(I_k) = \widetilde{I}_k \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Тобто, для довільного $a := a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k I_k \in \mathbb{A}_n$, $a_0, a_k \in \mathbb{C}$ маємо $P(a) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k \widetilde{I}_k \in \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$.

Зауваження 3.7. Надалі у цій роботі для елемента $\tilde{a} \in \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ і елемента $a \in \mathbb{A}_n$ використовуватимуться позначення, введені в означеннях 3.5 та 3.6.

Твердження 3.8. *Оператор $\widetilde{P}$ узагальнено обернений відносно P.*

Доведення проводиться шляхом безпосередньої перевірки рівності $P\widetilde{P}P = P$.

Теорема 3.9. *Для довільних $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ справедлива рівність*

$$\widetilde{P}(\tilde{a}\,\tilde{b}) = \widetilde{P}(\tilde{a})\,\widetilde{P}(\tilde{b}). \tag{3.3}$$

Доведення. Розглянемо рівність

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(\widetilde{I}_s\,\widetilde{I}_r) &= \widetilde{P}\left(\sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \Upsilon^s_{r,k}\,\widetilde{I}_k\right) = \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \Upsilon^s_{r,k}\,\widetilde{P}(\widetilde{I}_k) \\ &= \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n-1} \Upsilon^s_{r,k}\,I_k = I_s\,I_r\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Тепер з урахуванням рівності (3.4), маємо

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(\tilde{a}\,\tilde{b}) &= \widetilde{P}\left(\sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j\,\widetilde{I}_i\,\widetilde{I}_j\right) = \sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j\,\widetilde{P}(\widetilde{I}_i\,\widetilde{I}_j) \\ &= \sum_{i,j=0}^{n-1} a_i b_j\,I_i\,I_j = ab = \widetilde{P}(\tilde{a})\widetilde{P}(\tilde{b}). \end{aligned}$$

□

Наслідок 3.10. *Для довільного $\tilde{a} \in \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ такого, що $a_0 \neq 0$ справедлива рівність*

$$\widetilde{P}(\tilde{a}^{-1}) = a^{-1}. \tag{3.5}$$

Доведення. Поклавши $\tilde{b} = \tilde{a}^{-1}$ в рівності (3.3) отримаємо

$$\widetilde{P}(\tilde{a}\,\tilde{a}^{-1}) = \widetilde{P}(1) = 1 = \widetilde{P}(\tilde{a})\,\widetilde{P}(\tilde{a}^{-1}) = a\widetilde{P}(\tilde{a}^{-1}). \qquad \square$$

Продемонструємо рівність (3.5)) на простому прикладі. Як зазначалося в зауваженні 3.2, алгебра $\mathbb{A}_3(\alpha)$ є розширенням алгебри $\mathbb{B}$.

Приклад 3.11. В алгебрі $\mathbb{B}$ обернений елемент a^{-1} має вигляд

$$a^{-1} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2}\,I_1\,, \quad a_0 \neq 0.$$

А в алгебрі $\mathbb{A}_3(\alpha)$ обернений елемент $\tilde{a}^{-1}$ має такий вигляд

$$\tilde{a}^{-1} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2}\,\widetilde{I}_1 + \left(\frac{a_2}{a_0^2} + \frac{a_1^2}{a_0^3}\,\alpha\right)\widetilde{I}_2\,, \quad a_0 \neq 0.$$

На цих прикладах бачимо виконання рівності (3.5).

Означення 3.12. Для довільного $k \in \mathbb{N}$ та довільного $\tilde{a} \in \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ визначимо $\tilde{a}^{-k}$ такою рівністю $\tilde{a}^{-k} := (\tilde{a}^{-1})^k$.

З (3.3) випливає ще такий наслідок.

Наслідок 3.13. *Для довільного цілого k і довільного $\tilde{a} \in \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ справедлива рівність*

$$\widetilde{P}\big(\tilde{a}^k\big) = \big(\widetilde{P}(\tilde{a})\big)^k. \tag{3.6}$$

Наступний наслідок випливає з рівностей (3.3) та (3.6).

Наслідок 3.14. *Якщо вектори $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ алгебри $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ задовольняють рівняння* (2.5)*, то вектори $\widetilde{P}(\tilde{e}_1)$, $\widetilde{P}(\tilde{e}_2)$, $\widetilde{P}(\tilde{e}_3)$ алгебри $\mathbb{A}_n$ також задовольняють рівняння* (2.5)*.*

Приклад 3.15. Якщо вектори

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2, \qquad e_3 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_2,$$

$a_k\,, b_k \in \mathbb{C}$, алгебри $\mathbb{A}_3(\alpha)$ задовольняють рівняння (2.5), то вектори

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = a_0 + a_1 I_1, \qquad e_3 = b_0 + b_1 I_1$$

вже алгебри $\mathbb{B}$ також задовольняють рівняння (2.5).

Далі доведемо теорему, яка встановлює зв'язок між алгебрами виду $\mathbb{A}_n$ та їх розширеннями. З цією метою введемо таке означення.

Означення 3.16. Нульовим розширенням алгебри виду $\mathbb{A}_n$ назвемо таке розширення $\mathbb{E}_0(\mathbb{A}_n)$ в якому

$$\widetilde{\Upsilon}^s_{r,n+1} = 0 \qquad \forall\, r, s = 1, 2, \ldots, n.$$

Іншими словами, таблиця множення нульового розширення $\mathbb{E}_0(\mathbb{A}_n)$ утворюється з таблиці множення алгебри $\mathbb{A}_n$ шляхом додавання $(n+1)$-го рядка і $(n+1)$-го стовпчика скрізь заповнених нулями крім тих клітинок де відбувається множення на одиницю алгебри.

Очевидно, що *нульове розширення єдине.* Наприклад, серед усіх розширень $\mathbb{A}_3(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, алгебри $\mathbb{B}$ нульовим розширенням є лише алгебра $\mathbb{A}_3(0)$.

Якщо оператор P, який визначений в означенні 3.6, приймає значення в нульовому розширенні $\mathbb{E}_0(\mathbb{A}_n)$, то подібно до оператора $\widetilde{P}$, він буде мультиплікативним. А саме, аналогічно до доведення теореми 3.9 доводиться наступне твердження.

Теорема 3.17. *Для довільної алгебри виду $\mathbb{A}_n$ та оператора*

$$P : \mathbb{A}_n \mapsto \mathbb{E}_0(\mathbb{A}_n)$$

справедлива рівність

$$P(ab) = P(a)P(b) \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{A}_n\,. \tag{3.7}$$

Теорема 3.18. *Якщо нульові розширення $\mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n)$ та $\mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$ алгебр виду* (2.2) *неізоморфні, то й алгебри $\mathbb{V}_n$ і $\mathbb{W}_n$ також неізоморфні.*

Доведення. Будемо доводити методом від супротивного. Припустимо, що алгебри $\mathbb{V}_n$ та $\mathbb{W}_n$ ізоморфні. Це означає, що існує таке лінійне взаємно однозначне відображення $\varphi : \mathbb{V}_n \to \mathbb{W}_n$, що для довільних $a, b \in \mathbb{V}_n$ справедлива рівність

$$\varphi(a\, b) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Нехай $\{I_k\}_{k=0}^{n-1}$ — базис алгебри $\mathbb{V}_n$, $\{\widetilde{I}_k\}_{k=0}^{n}$ — базис алгебри $\mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n)$, а $\{\widetilde{\rho}_k\}_{k=0}^{n}$ — базис алгебри $\mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$. Визначимо відображення

$$\psi : \mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n) \to \mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$$

рівностями:

$$\psi(\widetilde{I}_k) = P\big(\varphi(I_k)\big),\ (k = 0, 1, \ldots, n-1), \qquad \psi(\widetilde{I}_n) = \widetilde{\rho}_n\,. \tag{3.8}$$

Оскільки відображення $\varphi : \mathbb{V}_n \to \mathbb{W}_n$ та оператор $P : \mathbb{W}_n \to \mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$ — лінійні, то за визначенням (3.8) відображення $\psi : \mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n) \to \mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$ також лінійне. Це дає змогу за допомогою рівностей (3.8) визначити відображення ψ для всіх $\tilde{a} \in \mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n)$:

$$\psi(\tilde{a}) = P\big(\varphi(a)\big) + a_n\tilde{\rho}_n\,. \tag{3.9}$$

Тепер для відображення $\psi : \mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n) \to \mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$ доведемо співвідношення

$$\psi(\tilde{a}\,\tilde{b}) = \psi(\tilde{a})\psi(\tilde{b}), \qquad \forall\, \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n). \tag{3.10}$$

Беручи до уваги рівність (3.9), маємо співвідношення

$$\psi(\tilde{a}\,\tilde{b}) = P\big(\varphi(ab)\big) + (a_nb_0 + b_na_0)\tilde{\rho}_n\,. \tag{3.11}$$

Розглянемо добуток

$$\begin{aligned}\psi(\tilde{a})\psi(\tilde{b}) &= \big(P\big(\varphi(a)\big) + a_n\tilde{\rho}_n\big)\,\big(P\big(\varphi(b)\big) + b_n\tilde{\rho}_n\big) = \\ &= P\big(\varphi(a)\big)P\big(\varphi(b)\big) + \big(P\big(\varphi(a)\big)\,b_n + P\big(\varphi(b)\big)\,a_n\big)\,\tilde{\rho}_n.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Оскільки оператор P приймає значення в нульовому розширенні $\mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$, то очевидними є рівності

$$P\big(\varphi(a)\big)\,b_n\tilde{\rho}_n = a_0b_n\tilde{\rho}_n\,, \qquad P\big(\varphi(b)\big)\,a_n\tilde{\rho}_n = b_0a_n\tilde{\rho}_n\,. \tag{3.13}$$

Враховуючи співвідношення (3.7), (3.13), рівність (3.12) набуває вигляду

$$\psi(\tilde{a})\psi(\tilde{b}) = P\big(\varphi(ab)\big) + (a_nb_0 + b_na_0)\tilde{\rho}_n\,. \tag{3.14}$$

Нарешті, наслідком рівностей (3.11), (3.14) є рівність (3.10).

Тепер покажемо, що відображення ψ взаємно однозначне. За визначенням (3.8), матриця переходу від базису до базису має вигляд

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1,0} & \alpha_{n-1,1} & \dots & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки за припущенням алгебри $\mathbb{V}$ та $\mathbb{W}$ ізоморфні, то $\det A \neq 0$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1,0} & \alpha_{n-1,1} & \dots & \alpha_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Розкладаючи $\det \widetilde{A}$ за елементами останнього рядка, отримаємо

$$\det \widetilde{A} = 1 \cdot \det A \neq 0,$$

а отже відображення ψ є взаємно однозначним.

Таким чином, ми побудували лінійне взаємно однозначне відображення $\psi : \mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n) \to \mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$, яке задовольняє умову (3.10). Це означає, що алгебри $\mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n)$ та $\mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$ ізоморфні. Ми прийшли до суперечності з умовою теореми. Отже, алгебри $\mathbb{V}$ та $\mathbb{W}$ не є ізоморфними. $\square$

Зауваження 3.19. З таблиць множення алгебр виду $\mathbb{A}_n$ для значень $n = 2, 3, 4, 5, 6$ (про таблиці множення див. зауваження 5.3 в роботі [11]) видно, що нульові розширення неізоморфних $(n-1)$-вимірних алгебр виду $\mathbb{A}_{n-1}$ знову є неізоморфними. Теорема 3.18 є, в певному сенсі, оберненим результатом до вказаного факту, але для всіх натуральних $n \geq 2$.

4. Моногенні функції на розширеннях алгебри $\mathbb{A}_n$

Нехай

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = \sum_{r=0}^{n-1} a_r I_r, \qquad e_3 = \sum_{r=0}^{n-1} b_r I_r \tag{4.1}$$

при $a_r, b_r \in \mathbb{C}$ — трійка векторів в алгебрі $\mathbb{A}_n$.

Нехай також $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$, де $x, y, z \in \mathbb{R}$. Комплексне число $\xi = x + ya_0 + zb_0$ називається *спектром* точки ζ. Виділимо в алгебрі $\mathbb{A}_n$ лінійну оболонку $E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ породжену векторами e_1, e_2, e_3.

Далі істотним є припущення: $ya_0 + zb_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ при всіх дійсних y, z. Очевидно, що це має місце тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел a_0 чи b_0 належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. В теоремі 7.1 роботи [9] встановлено підклас рівнянь вигляду (1.1) для яких умова $ya_0 + zb_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ виконується при всіх дійсних y, z.

Області Ω простору $\mathbb{R}^3$ поставимо у відповідність область

$$\Omega_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : (x, y, z) \in \Omega\}$$

в E_3.

Неперервну функцію $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n$ називатимемо *моногенною* в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо Φ диференційовна за Гато в кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{A}_n$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\right) \varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_3.$$

При цьому $\Phi'(\zeta)$ називається *похідною Гато* функції Φ в точці ζ.

Розглянемо розклад функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n$ за базисом $\{I_k\}_{k=0}^{n-1}$:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} U_k(x, y, z)\, I_k\,.$$

У випадку, коли функції $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними в області Ω, тобто для довільного $(x, y, z) \in \Omega$

$$U_k(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U_k(x, y, z) =$$
$$= \frac{\partial U_k}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial U_k}{\partial y}\,\Delta y + \frac{\partial U_k}{\partial z}\,\Delta z + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right),$$

при $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \to 0$, функція Φ є моногенною в області Ω_ζ тоді і тільки тоді, коли у кожній точці з Ω_ζ виконуються умови:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, e_2\,, \qquad\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, e_3\,.$$

Відмітимо, що розклад резольвенти має вигляд

$$(te_1 - \zeta)^{-1} = \frac{1}{t - \xi} + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{k=2}^{s+1} \frac{Q_{k,s}}{(t - \xi)^k}\, I_s \tag{4.2}$$

для всіх $t \in \mathbb{C}$ таких, що $t \neq \xi$, де $Q_{k,s}$ визначені наступними рекурентними співвідношеннями:

$$Q_{2,s} := T_s\,, \qquad Q_{k,s} := \sum_{r=k-2}^{s-1} Q_{k-1,r}\, B_{r,\,s}\,, \quad k = 3, 4, \ldots, s+1.$$

при

$$T_s := ya_s + zb_s\,, \qquad B_{r,s} := \sum_{k=1}^{s-1} T_k \Upsilon^k_{r,s}\,, \quad s = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Із співвідношень (4.2) випливає, що точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, які відповідають необоротним елементам $\zeta \in \mathbb{A}_n$, лежать на прямих

$$L : \begin{cases} x + y\,\mathrm{Re}\, a_0 + z\,\mathrm{Re}\, b_0 = 0, \\ y\,\mathrm{Im}\, a_0 + z\,\mathrm{Im}\, b_0 = 0 \end{cases}$$

в просторі $\mathbb{R}^3$.

Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ опукла в напрямку прямої L. Позначимо

$$D := \{\xi = x + ya_0 + zb_0 \in \mathbb{C} : \zeta = x + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta\}.$$

Теорема 4.1. [9] *Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ опукла в напрямку прямої L і нехай хоча б одне з чисел a_0 чи b_0 належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Тоді кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} I_k\, \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F_k(t)(t - \zeta)^{-1}\, dt, \tag{4.3}$$

де F_k — деяка голоморфна функція в області D, а Γ — замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області D і охоплює точку ξ.

Оскільки за умов теореми 4.1 кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n$ продовжується до функції, моногенної в нескінченному циліндрі

$$\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_3 : \xi \in D\},$$

то надалі будемо розглядати моногенні функції Φ, визначені в областях виду Π_ζ. Відмітимо, що циліндр $\Pi := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \zeta \in \Pi_\zeta\}$ паралельний прямій L.

В наступній теоремі встановлюється зв'язок між моногенними функціями в алгебрі виду $\mathbb{A}_n$ і моногенними функціями в її довільному розширенні $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$. Для формулювання результату введемо деякі позначення.

Нехай вектори $1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ алгебри $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ задовольняють характеристичне рівняння (1.3). На ці вектори натягнемо лінійний простір

$$\widetilde{E}_3 := \{\widetilde{\zeta} = x + y\tilde{e}_2 + z\tilde{e}_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

В алгебрі $\mathbb{A}_n$ будемо розглядати трійку $1, \widetilde{P}(\tilde{e}_2), \widetilde{P}(\tilde{e}_3)$ і лінійний простір

$$\widetilde{P}\big(\widetilde{E}_3\big) := \{\zeta = x + y\widetilde{P}(\tilde{e}_2) + z\widetilde{P}(\tilde{e}_3) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Теорема 4.2. *Нехай вектори $1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ виду (4.1) алгебри $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ задовольняють характеристичне рівняння (1.3) і нехай хоча б одне з чисел a_0 чи b_0 належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Крім того, нехай функція $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}} \to \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ змінної $\widetilde{\zeta} = x + y\tilde{e}_2 + z\tilde{e}_3$ моногенна в деякому циліндрі $\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}} \subset \widetilde{E}_3$. Тоді в алгебрі $\mathbb{A}_n$ трійка векторів $1, \widetilde{P}(\tilde{e}_2), \widetilde{P}(\tilde{e}_3)$ також задовольняє характеристичне рівняння (1.3), а функція $\Phi(\zeta) := \widetilde{P}\big(\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta})\big)$ є моногенною в циліндрі $\Pi_\zeta := \{\zeta \in \widetilde{P}\big(\widetilde{E}_3\big) : \widetilde{\zeta} \in \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}}\}$ алгебри $\mathbb{A}_n$.*

Доведення. Той факт, що вектори $1, \widetilde{P}(\tilde{e}_2), \widetilde{P}(\tilde{e}_3)$ задовольняють характеристичне рівняння (1.3) випливає з наслідку 3.14. Тепер зауважимо, що з тотожності (3.5) випливає тотожність

$$(t - \zeta)^{-1} = \widetilde{P}\Big((t - \widetilde{\zeta})^{-1}\Big) \quad \forall\, t \in \mathbb{C} : \, t \neq x + ya_0 + zb_0\,. \tag{4.4}$$

За теоремою **A** функція $\widetilde{\Phi}$ подається у вигляді

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta}) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{I}_k \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \widetilde{F}_k(t)(t - \widetilde{\zeta})^{-1}\, dt. \tag{4.5}$$

Подієmo на рівність (4.5) оператором $\widetilde{P}$. Враховуючи співвідношення (3.9) і (4.4), маємо

$$\widetilde{P}\big(\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta})\big) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{P}(\widetilde{I}_k)\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \widetilde{F}_k(t)\widetilde{P}\big((t-\widetilde{\zeta})^{-1}\big)\,dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} I_k\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \widetilde{F}_k(t)(t-\zeta)^{-1}\,dt.$$

Відповідно до теореми **A** отримана функція $\widetilde{P}\big(\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta})\big)$ є моногенною в циліндрі $\Pi_\zeta := \{\zeta \in \widetilde{P}\big(\widetilde{E}_3\big) : \widetilde{\zeta} \in \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}}\}$. □

Зауваження 4.3. Теорема 4.2 стверджує, що для вивчення моногенних функцій в алгебрах виду $\mathbb{A}_n$ при $n = 2, 3, 4, 5$ достатньо обмежитись дослідженням моногенних функцій у певних дев'яти алгебрах (які є нульовими розширеннями алгебр виду $\mathbb{A}_5$) виду $\mathbb{A}_6$.

Крім того, теорема 4.2 означає, що клас розв'язків рівняння (1.1) (і взагалі кажучи, рівняння (2.6)) у вигляді компонент моногенних функцій буде тим ширший чим більша розмірність алгебри виду $\mathbb{A}_n$. Або точніше: якщо комплекснозначний розв'язок $U(x, y, z)$ рівняння (1.1) є деякою компонентою моногенної функції в деякій алгебрі $\mathbb{A}_n$ при $n < N$, то серед алгебр виду $\mathbb{A}_N$ існує алгебра $\mathbb{A}$ і існує моногенна функція Φ в $\mathbb{A}$ така, що $U(x, y, z)$ є деякою компонентою функції Φ. При цьому N може бути як завгодно великим.

Приклад 4.4. Розглянемо моногенні функції в алгебрі $\mathbb{B}$ і в її розширенні $\mathbb{A}_3(\alpha)$. В алгебрі $\mathbb{B}$ кожна моногенна функція подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = F(\xi) + \big(\xi_1 F'(\xi) + F_0(\xi)\big)I_1, \qquad \zeta = \xi + \xi_1\,I_1\,.$$

А з прикладу 3.11 і теореми **A** випливає, що кожна моногенна функція в алгебрі $\mathbb{A}_3(\alpha)$ подається у такому вигляді:

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta}) = F(\xi) + \big(\xi_1 F'(\xi) + F_0(\xi)\big)\widetilde{I}_1 +$$
$$+ \Big(\xi_2 F'(\xi) + \frac{\xi^2\alpha}{2}F''(\xi) + \xi_1 F_0'(\xi) + F_1(\xi)\Big)\widetilde{I}_2\,,$$
$$\widetilde{\zeta} = \xi + \xi_1\,\widetilde{I}_1 + \xi_2\,\widetilde{I}_2\,.$$

Якщо в $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta})$ покласти $\xi_2 = 0$, відкинути компоненту при $\widetilde{I}_2$ і $\widetilde{I}_1$ ототожнити з I_1, то з $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta})$ отримаємо $\Phi(\zeta)$, тобто моногенну функцію в звуженні $\mathbb{B}$.

Зауваження 4.5. Теорема 4.2 залишається справедливою для моногенних функцій змінної $\zeta = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d$ при $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$, $e_1, e_2, \ldots, e_d \in \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$.

Література

[1] E. Cartan. Les groupes bilinéares et les systèmes de nombres complexes. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 12(1):1–64, 1898.

[2] S. V. Grishchuk, S. A. Plaksa. Monogenic functions in a biharmonic algebra. *Ukr. Math. J.*, 61(12):1865–1876, 2009.

[3] P. W. Ketchum. Analytic functions of hypercomplex variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 30(2):641–667, 1928.

[4] I. P. Mel'nichenko. The representation of harmonic mappings by monogenic functions. *Ukr. Math. J.*, 27(5):599–505, 1975.

[5] S. A. Plaksa, V. S. Shpakovskii. Constructive description of monogenic functions in a harmonic algebra of the third rank. *Ukr. Math. J.*, 62(8):1251–1266, 2011.

[6] A. Pogorui, R. M. Rodriguez-Dagnino, M. Shapiro. Solutions for pdes with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 37(17):2799–2810, 2014.

[7] M. N. Roşculeţ. Algebre infinite asociate la ecuaţii cu derivate parţiale, omogene, cu coeficienţi constanţi de ordin oarecare. *Studii şi Cercetări Matematice*, 6(3-4):567–643, 1955.

[8] M. N. Roşculeţ. Algebre infinite, comutative, asociate la sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale. *Studii şi Cercetări Matematice*, 7(3-4):321–371, 1956.

[9] V. S. Shpakivskyi. Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra. *Adv. Pure Appl. Math.*, 7(1):63–75, 2016.

[10] В. Шпаковский. Гиперкомплексные функции и точные решения одного уравнения гидродинамики. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 14(1):262–274, 2017.

[11] В. С. Шпаківський. Про моногенні функції, визначені в різних комутативних алгебрах. *Прийнято до друку в Укр. мат. вісник*, arXiv:1803.03938v1.

Надійшла до редакції 9 квітня 2018, прийнята до друку 20 серпня 2018.

В. С. Шпаківський
Інститут математики НАН України
Email: `shpakivskyi86@gmail.com`