Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 11, no. 3 (2018) pp. 19–26

О регулярных тканях, определенных плюригармоническими функциями

Л. М. Пиджакова, А. М. Шелехов

Abstract. As is known, the function of two variables $z = f(x, y)$ on the plane of the variables (x, y) in the neighborhood of a regular point defines a three-web formed by the foliations $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, and $f(x, y) = \text{const}$. A three-web is called *regular* if it is equivalent (locally diffeomorphic) to a three-web formed by three families of parallel lines. In this case, the equation of the three-web has the form $z = f(\alpha(x) + \beta(y))$.

In one of the works of the authors of this article, all regular three-webs, determined by some well-known partial differential equations, in particular, determined by harmonic functions, were found. In the present paper, the results are generalized for pluriharmonic functions of the form

$$u = f(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r).$$

First, a function of this type on a manifold of dimension $2r$ determines a $(2r + 1)$-web formed by foliations of codimension 1:

$$x_i = \text{const}, \qquad y_i = \text{const}, \ (i = 1, 2, \ldots, r), \qquad u = \text{const}.$$

A $(2r + 1)$-web is called *regular* if in some local coordinates its equation can be written as

$$u = f\big(\varphi_1(x_1) + \ldots + \varphi_r(x_r) + \psi_1(y_1) + \ldots + \psi_r(y_r)\big).$$

In the present paper, we find all pluriharmonic functions defining regular $(2r + 1)$-webs (Theorem 1).

On the other hand, each pluriharmonic function

$$u = f(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r)$$

defines a three-web $W(r, r, 2r - 1)$ on a $2r$-dimensional manifold formed by two r-dimensional foliations $x_i = \text{const}$ and $y_i = \text{const}$ and one foliation $u = \text{const}$ of codimension 1. This three-web is called regular if its equation in some local coordinates can be written as

$$u = f\left(\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r) + \psi(y_1, y_2, \ldots, y_r)\right).$$

In this work found all pluriharmonic functions defining regular $W(r, r, 2r-1)$-webs (Theorem 2).

Ключевые слова: плюригармоническая функция, регулярная ткань
DOI: http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v11i3.1201

Анотація. Як відомо, функція двох змінних $z = f(x, y)$ визначає на площині (x, y) в околі регулярної точки деяку три-тканину, утворену шаруваннями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ та $f(x, y) = \text{const}$. Три-тканина називається *регулярною*, якщо вона еквівалента (тобто локально дифеоморфна) три-тканині, утвореній трьома сім'ями паралельних прямих. В цьому випадку рівняння тканини має вигляд $z = f(\alpha(x) + \beta(y))$.

В одній з робіт авторів цієї статті були знайдені всі регулярні три-тканини, що задаються деякими відомими рівняннями в частинних похідних, зокрема, визначаються гармонійними функціями. В даній роботі ці результати узагальнюються на випадок плюрігармонічних функцій виду $u = f(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r)$.

По-перше, така функція на многовиді розмірності $2r$ визначає $(2r+1)$-тканину, утворену шаруваннями ковиміру 1 виду

$$x_i = \text{const}, \qquad y_i = \text{const}, \ (i = 1, 2, \dots, r), \qquad u = \text{const}.$$

$(2r + 1)$-тканина називається *регулярною*, якщо в деяких локальних координатах її рівняння може бути записано у вигляді

$$u = f\big(\varphi_1(x_1) + \ldots + \varphi_r(x_r) + \psi_1(y_1) + \ldots + \psi_r(y_r)\big).$$

В представленій роботі ми знаходимо всі плюригармонічні функції, що визначають регулярні $(2r + 1)$-тканини (теорема 1).

З іншого боку, кожна плюригармонічна функція

$$u = f(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r)$$

на $2r$-вимірному многовиді визначає три-тканину $W(r, r, 2r - 1)$, утворену двома r-вимірними шаруваннями $x_i = \text{const}$ і $y_i = \text{const}$ та шаруванням $u = \text{const}$ ковиміру 1. Ця тканина називається *регулярною*, якщо в деяких локальних координатах її рівняння може бути записано у вигляді

$$u = f\left(\varphi(x_1, x_2, \dots, x_r) + \psi(y_1, y_2, \dots, y_r)\right).$$

Ми також знаходимо всі плюригармонічні функції, що визначають регулярні три-тканини $W(r, r, 2r - 1)$ (теорема 2).

В работе [3] рассматриваются решения вида $z = f(\alpha(x) + \beta(y))$ некоторых уравнений в частных производных. В частности, найдены гармонические функции такого строения. На плоскости (XOY) указанные функции определяют, как известно [1], [4], регулярные три-ткани.

Целью данной работы является обобщение полученных результатов для плюригармонических функций вида

$$u = f(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r). \tag{1}$$

С одной стороны, функция (1) определяет в окрестности регулярной точки пространства $\mathbb{R}^{2r}$ переменных (x_i, y_i) $(2r + 1)$-ткань, образованную $2r+1$ слоениями коразмерности 1: $x_i = \text{const}$, $y_i = \text{const}$ и $u = \text{const}$ (здесь и далее $i, j, k = 1, 2, \dots, r$). Уравнение (1) называется уравнением этой ткани. $(2r + 1)$-ткань называется *регулярной*, если допустимой заменой переменных ее уравнение можно привести к виду

$$u = f\big(\varphi_1(x_1) + \ldots + \varphi_r(x_r) + \psi_1(y_1) + \ldots + \psi_r(y_r)\big). \tag{2}$$

С другой стороны, уравнение (1) определяет в пространстве $\mathbb{R}^{2r}$ три-ткань $W(r, r, 2r-1)$ со слоениями различной размерности: два r-параметрических слоения $x_i = \text{const}$ и $y_i = \text{const}$, и одно слоение $u = \text{const}$ коразмерности 1. Три-ткань $W(r, r, 2r-1)$ называется *регулярной*, если функция (1) имеет вид

$$u = f\left(\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r) + \psi(y_1, y_2, \ldots, y_r)\right), \tag{3}$$

или короче $u = f\left(\varphi(x_i) + \psi(y_i)\right)$.

Функция вида (1) называется *плюригармонической*, если выполняются следующие условия [2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_i}. \tag{5}$$

1. Найдём плюригармонические функции вида (2). Для них уравнения (5) примут вид:

$$u'' \cdot \left(\varphi_i' \cdot \psi_j' - \varphi_j' \cdot \psi_i'\right) = 0, \tag{6}$$

а уравнения (4) — вид

$$u'' \cdot \left(\varphi_i' \cdot \varphi_j' + \psi_i' \cdot \psi_j'\right) = 0 \text{ при } i \neq j, \tag{7}$$

и

$$u'' \cdot \left((\varphi_i')^2 + (\psi_i')^2\right) + u' \cdot \left(\varphi_i'' + \psi_i''\right) = 0 \text{ при } i = j. \tag{8}$$

а) Если $u'' = 0$, то уравнения (6) и (7) удовлетворяются, а функция u является линейной:

$$u = a\big(\varphi_1(x_1) + \ldots + \varphi_r(x_r) + \psi_1(y_1) + \ldots + \psi_r(y_r)\big) + b, \tag{9}$$

для всех $a, b \in \mathbb{R}$. Соотношения (8) примут вид:

$$u' \cdot \left(\varphi_i'' + \psi_i''\right) = 0.$$

Так как $u' \neq 0$ ($u \neq \text{const}$), то имеем, что $\varphi_i''(x_i) + \psi_i''(y_i) = 0$ для любых i. Так как аргументы x_i и y_i независимы, то $\varphi_i'' = -\psi_i'' = 2c_i = \text{const}$, то есть

$$\varphi_i(x_i) = c_i x_i^2 + b_i x_i + a_i, \qquad \psi_i(y_i) = -c_i y_i^2 + m_i y_i + n_i,$$

для всех $a_i, b_i, c_i, m_i, n_i \in \mathbb{R}$. Подставляя найденные функции $\varphi_i(x_i)$ и $\psi_i(y_i)$ в (9), получаем

$$u = \sum_{i=1}^{r} c_i \left(x_i^2 - y_i^2\right) + \sum_{i=1}^{r} a_i x_i + + \sum_{i=1}^{r} b_i y_i + k, \tag{10}$$

для всех $a_i, b_i, c_i, k \in \mathbb{R}$.

б) Если $u'' \neq 0$, то уравнения (6) и (7) принимают следующий вид:

$$\varphi_i' \cdot \psi_j' - \varphi_j' \cdot \psi_i' = 0 \quad \forall i, j, \tag{6'}$$

$$\varphi_i' \cdot \varphi_j' + \psi_i' \cdot \psi_j' = 0 \text{ при } i \neq j. \tag{7'}$$

Из уравнений ($6'$) имеем $\dfrac{\varphi_i'(x_i)}{\varphi_j'(x_j)} = \dfrac{\psi_i'(y_i)}{\psi_j'(y_j)}$. Так как левая и правая части зависят от разных переменных, то эти отношения могут быть только константами, то есть $\dfrac{\varphi_i'(x_i)}{\varphi_j'(x_j)} = \dfrac{\psi_i'(y_i)}{\psi_j'(y_j)} = c_{ij} = \text{const}$, или

$$\varphi_i'(x_i) = c_{ij}\varphi_j'(x_j), \qquad \psi_i'(y_i) = c_{ij}\psi_j'(yx_j).$$

Поскольку аргументы функций левых и правых частей последних уравнений независимы, то они выполняются тогда и только тогда, когда $\varphi_i'(x_i) = a_i$, $\psi_i'(y_i) = c_i$, $a_i = \text{const}$, $c_i = \text{const}$, откуда $\varphi_i(x_i) = a_i x_i + b_i$, $\psi_i(y_i) = c_i y_i + k_i$, $a_i, b_i, c_i, k_i \in \mathbb{R}$. В силу ($7'$) коэффициенты этих функций связаны условиями

$$a_i \cdot a_j + c_i \cdot c_j = 0, \quad i \neq j. \tag{11}$$

Последние условия можно переписать в виде $\dfrac{a_i}{c_i} = -\dfrac{a_j}{c_j}$ $\forall i, j$. Полагая $\frac{a_i}{c_i} = p_i$, получим $p_i = -p_j$, $p_i = -p_k$, $p_j = -p_k$, а следовательно $p_i = 0$.

Таким образом, условия (11) выполняются только если $a_i = c_i = 0$, для всех i, т. е. функции $\varphi_i(x_i)$ и $\psi_i(y_i)$ являются постоянными. Итак, в случае $u'' \neq 0$ получаем только тривиальное решение $u = \text{const}$, то есть ткань не существует. Доказана

Теорема 1. *Уравнение регулярной* $(2r+1)$*-ткани, определяемой плюригармонической функцией, имеет вид* (10).

2. Пусть плюригармонические функции имеют вид (3), где

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r) = \varphi(x_i), \qquad \psi(y_1, \ldots, y_r) = \psi(y_i).$$

Тогда уравнения (5) примут вид:

$$u'' \cdot \left(\varphi_{x_i}' \cdot \psi_{y_j}' - \varphi_{x_j}' \cdot \psi_{y_i}'\right) = 0 \quad \forall i, j, \tag{12}$$

а уравнения (4) —

$$u'' \cdot \left(\varphi'_{x_i}\varphi'_{x_j} + \psi'_{y_i}\psi'_{y_j}\right) + u' \cdot \left(\varphi''_{x_ix_j} + \psi''_{y_iy_j}\right) = 0 \quad \forall i, j. \tag{13}$$

а) Если $u'' = 0$, то уравнения (12) удовлетворяются, а функция u является линейной:

$$u = a\big(\varphi(x_i) + \psi(y_i)\big) + b, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

При этом уравнения (13) перепишутся в виде $u' \cdot \left(\varphi''_{x_ix_j} + \psi''_{y_iy_j}\right) = 0$.

Так как $u' \neq 0$ ($u \neq \mathrm{const}$), то имеем $\varphi''_{x_ix_j} + \psi''_{y_iy_j} = 0$ для любых i, j. Так как аргументы функций $\varphi(x_i)$ и $\psi(y_i)$ независимы, то

$$\varphi''_{x_ix_j} = -\psi''_{y_iy_j} = 2c_{ij} = \mathrm{const},$$

то есть указанные функции имеют следующее строение

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \ldots, x_r) &= \sum_{i,j=1}^{r} c_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{r} a_ix_i + k, \\ \psi(y_1, \ldots, y_r) &= -\sum_{i,j=1}^{r} c_{ij}y_iy_j + \sum_{i=1}^{r} m_iy_i + p, \end{aligned} \tag{15}$$

где $c_{ij}, a_i, m_i, k, p \in \mathbb{R}$. Подставляя найденные функции (15) в (14), получаем

$$u = \sum_{i,j=1}^{r} c_{ij}\left(x_ix_j - y_iy_j\right) + \sum_{i=1}^{r} a_ix_i + \sum_{i=1}^{r} m_iy_i + b, \quad c_{ij}, a_i, m_i, b \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

б) Если $u'' \neq 0$, то из уравнений (12) получим $\varphi'_{x_i} \cdot \psi'_{y_j} - \varphi'_{x_j} \cdot \psi'_{y_i} = 0$ или

$$\frac{\varphi'_{x_i}(x_1, \ldots, x_r)}{\varphi'_{x_j}(x_1, \ldots, x_r)} = \frac{\psi'_{y_i}(y_1, \ldots, y_r)}{\psi'_{y_j}(y_1, \ldots, y_r)}.$$

Так как левая и правая части зависят от разных переменных, то эти отношения могут быть только константами, то есть

$$\frac{\varphi'_{x_i}(x_1, \ldots, x_r)}{\varphi'_{x_j}(x_1, \ldots, x_r)} = \frac{\psi'_{y_i}(y_1, \ldots, y_r)}{\psi'_{y_j}(y_1, \ldots, y_r)} = c_{ij} = \mathrm{const}.$$

Отсюда получим $\varphi'_{x_i} = c_{ij}\varphi'_{x_j}$, $\psi'_{y_i} = c_{ij}\psi'_{y_j}$.

Последние равенства означают, что функции $\varphi'_{x_i}(x_1, \ldots, x_r)$ пропорциональны друг другу.

Потому полный дифференциал функции $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ имеет вид:

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{r} \varphi'_{x_i} dx_i = \varphi'_{x_1} dx_1 + \ldots + \varphi'_{x_r} dx_r =$$
$$= \varphi'_{x_1} dx_1 + \ldots + c_{1r}\varphi'_{x_1} dx_r = \varphi'_{x_1} d(x_1 + \ldots + c_{1r} x_r).$$

Последнее означает, что функция $\varphi(x_i)$ имеет следующее строение:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r) = \varphi(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Рассуждая аналогично для функции $\psi(y_i)$, получим

$$\psi(y_1, \ldots, y_r) = \psi(\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_r y_r), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

С учётом строения функций $\varphi(x_i)$ и $\psi(y_i)$ уравнение (16) дает:

$$\alpha_i \alpha_j \left(u'' \cdot \left((\varphi')^2 + (\psi')^2\right) + u'(\varphi'' + \psi'')\right) = 0, \quad \alpha_i \neq 0, \quad \forall i.$$

Последнее равенство перепишем в виде:

$$\varphi'' + \psi'' = -\frac{u''}{u'} \cdot \left((\varphi')^2 + (\psi')^2\right),$$

и обозначим $-\dfrac{u''}{u'} = g$. Тогда получим уравнение

$$\varphi'' + \psi'' = g \cdot \left((\varphi')^2 + (\psi')^2\right). \tag{17}$$

Продифференцировав равенство (17) по x_k, а затем по y_m, придём к уравнению

$$\alpha_k \alpha_m \varphi' \psi' \left(g'' \left((\varphi')^2 + (\psi')^2\right) + 2g'(\varphi'' + \psi'')\right) = 0.$$

Так как φ и ψ не являются постоянными, то $\varphi'\psi' \neq 0$. Приравнивая выражение в скобках к нулю, с учетом (17) получим уравнение

$$g'' + 2g' \cdot g = 0,$$

или $g'' + (g^2)' = 0$. Интегрируя, получим $g' + g^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

1) В случае $c = a^2$ решение имеет вид $g = -a \cdot \coth a\,(b - \theta)$.
2) В случае $c = -a^2$ решение имеет вид $g = a \cdot \tan a\,(b - \theta)$.
3) В случае $c = 0$ решение имеет вид $g = \dfrac{1}{b + \theta}$.

Во всех случаях $b \in \mathbb{R}$, $\theta = \varphi(x_i) + \psi(y_i)$.

В первом случае при подстановке в (17) функции g, получим

$$\varphi'' + \psi'' = -a \cdot \coth a\,(b - \theta) \cdot \left((\varphi')^2 + (\psi')^2\right).$$

Продифференцировав это равенство по x_k, а затем по y_m, получим

$$2a^3 \alpha_k \alpha_m \varphi' \psi' \frac{\sinh a\,(b - \varphi - \psi)}{\cosh^3 a\,(b - \varphi - \psi)} = 0.$$

Так как функции φ и ψ не являются постоянными, то отсюда находим

$$\sinh a\,(b-\varphi-\psi)=0, \qquad\qquad \varphi+\psi=b,$$

что невозможно, поскольку φ и ψ зависят от разных независимых аргументов.

Во втором случае получаем аналогичный результат.

В третьем случае равенство (17) примет вид

$$\left(\varphi''+\psi''\right)(b+\varphi+\psi)=(\varphi')^2+(\psi')^2. \tag{18}$$

Продифференцировав равенство (18) по x_k, а затем по y_m, получим

$$\varphi'''\psi'+\varphi'\psi'''=0.$$

Отсюда $\dfrac{\varphi'''}{\varphi'}=-\dfrac{\psi'''}{\psi'}=-p^2=\mathrm{const}$, или

$$\varphi'''+p^2\varphi'=0, \qquad\qquad \psi'''-p^2\psi'=0.$$

Пусть $\varphi'''\neq 0$, $\psi'''\neq 0$, тогда решения последних уравнений имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right)&=\frac{r}{p}\cos\left(p\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right)+\frac{s}{p}\sin\left(p\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right),\\ \psi\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i y_i\right)&=\frac{g}{p}\coth\left(p\sum_{i=1}^{r}\alpha_i y_i\right)+\frac{h}{p}\sinh\left(p\sum_{i=1}^{r}\alpha_i y_i\right),\end{aligned} \tag{19}$$

где $r,s,g,h\in\mathbb{R}$.

Найдем функцию u из уравнения $-\dfrac{u''}{u'}=\dfrac{1}{b+\varphi(x_i)+\psi(y_i)}$ (см. выше). После интегрирования, получим $u=c_1\ln\left(b+\varphi(x_i)+\psi(y_i)\right)+c_2$, где $c_1=c_2=\mathrm{const}$.

Таким образом, учитывая (19), окончательно получаем

$$\begin{aligned}u=c_1\ln\Bigg(b&+\frac{r}{p}\cos\left(p\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right)+\frac{s}{p}\sin\left(p\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right)+\\ &+\frac{g}{p}\coth\left(p\sum_{i=1}^{r}\alpha_i y_i\right)+\frac{h}{p}\sinh\left(p\sum_{i=1}^{r}\alpha_i y_i\right)\Bigg)+c_2.\end{aligned} \tag{20}$$

Рассмотрим случай, когда $\varphi''' = 0$, $\psi''' = 0$. Тогда функции φ и ψ имеют следующее строение:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right) = a_0\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right)^2 + a_1\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i + a_2,$$
$$\psi\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i y_i\right) = b_0\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i y_i\right)^2 + b_1\sum_{i=1}^{r}\alpha_i y_i + b_2,$$

а функция u имеет вид:

$$u = c_1\ln\Bigg(b + a_0\Big(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\Big)^2 + a_1\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i + \\ + b_0\Big(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i y_i\Big)^2 + b_1\sum_{i=1}^{r}\alpha_i y_i\Bigg) + c_2. \quad (21)$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Уравнение регулярной ткани $W(r, r, 2r-1)$, определяемой плюригармонической функцией, имеет вид* (20) *или* (21).

Литература

[1] В. Бляшке. *Введение в геометрию тканей.* М., Физматгиз, 1956.
[2] Б. В. Шабат. *Введение в комплексный анализ.* М., Наука, 1985.
[3] А. М. Шелехов. О «шестиугольных» решениях некоторых уравнений в частных производных. *Proceedings of the International Geometry Center*, 10(2):47–55, 2017.
[4] А. М. Шелехов, В. Б. Лазарева, А. А. Уткин. *Криволинейные три-ткани.* Тверь, 2013.

Поступила в редакцию 18 сентября 2018, принята к печати 2 ноября 2018.

Пиджакова Любовь Михайловна
Тверской государственный технический университет
Email: lpidjhacova@mail.ru

Шелехов Александр Михайлович
Московский педагогический государственный университет
Email: amshelekhov@rambler.ru